

HOLOMORPH DARI ALJABAR LIE

HOLOMORPH OF LIE ALGEBRA

Wed Giyarti^{1§}, Sofyan Tio Fajar Maulana²

¹Program Studi Pendidikan Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta [wed.giyarti@uin-suka.ac.id]

²Program Studi Pendidikan Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta [sofyantio.stfm@gmail.com]

[§]Corresponding Author

Received 15th Jan 2025; Accepted 16th Jun 2025; Published 30th Jun 2025;

Abstrak

Aljabar Lie adalah ruang vektor atas suatu lapangan yang dilengkapi dengan *bracket* Lie yang bilinear, bersifat antisimetri dan memenuhi identitas Jacobi. Salah satu contoh dari aljabar Lie adalah himpunan pemetaan linier dari ruang vektor W ke W , yang dinotasikan dengan $gl(W)$, dengan *bracket* Lie berupa komutator. Derivasi D dari aljabar W adalah pemetaan linier dari W ke W yang memenuhi untuk setiap x, y di W berlaku $D(xy) = D(x)y + xD(y)$. Himpunan derivasi dari W , dinotasikan dengan $Der(W)$, membentuk suatu subaljabar Lie dari $gl(W)$. *Holomorph* dari aljabar Lie L didefinisikan sebagai hasil tambah langsung dari L dan $Der(L)$, yaitu $H(L) = L \oplus Der(L)$. Dalam tulisan ini, ditunjukkan secara lengkap dan sistematis bahwa $H(L) = L \oplus Der(L)$ juga merupakan aljabar Lie, dengan menunjukkan bahwa struktur yang dibentuk tetap memenuhi sifat identitas Jacobi dan antisimetri. Hasil penelitian ini memperkuat pemahaman terhadap struktur ekstensi dan automorfisma dalam aljabar Lie.

Kata Kunci: aljabar Lie, *holomorph*, identitas Jacobi, Lie *bracket*

Abstract

A Lie algebra is a vector space over a field together with a bilinear Lie brackets that satisfy antisymmetric and Jacobi identity. An example of a Lie algebra is a set of linear mappings from a vector space W to W , denoted by $gl(W)$, with a commutator as the Lie bracket. The derivation D from the algebra W is a linear mapping from W to W that satisfies for all x, y in W , $D(xy) = D(x)y + xD(y)$. The set of derivations of W , denoted by $Der(W)$, forms a Lie subalgebra of $gl(W)$. The holomorph of the Lie algebra L is defined as the direct sum of L and $Der(L)$, $H(L) = L \oplus Der(L)$. This paper presents a complete and systematic proof that $H(L) = L \oplus Der(L)$ also forms a Lie algebra, by verifying that the resulting structure satisfies both the antisymmetry and the Jacobi identity. The result enhances the structural understanding of extensions and automorphisms in the context of Lie algebras.

Keywords: Lie algebra, *holomorph*, Jacoby identity, Lie bracket

1. Pendahuluan

Hermann Weyl memberikan kontribusi besar dalam pengembangan teori aljabar Lie pada awal abad ke-20, terutama pada tahun 1930-an. Meskipun konsep dasar aljabar Lie sendiri telah

diperkenalkan oleh Sophus Lie pada akhir abad ke-19 dalam konteks grup transformasi diferensial dan transformasi kontinu, Weyl memperluas aplikasi teori Lie dalam fisika matematika,

terutama untuk membangun mekanika kuantum dan teori representasi grup Lie [5]. Grup Lie dan aljabar Lie menjadi bagian penting dari matematika, serta berperan penting dalam pengembangan teori kuantum dan teori fisika pada abad ke 19, salah satunya yaitu *spectroscopy* [4].

Aljabar Lie atas lapangan F adalah ruang vektor V atas lapangan F yang dilengkapi dengan pemetaan bilinear (disebut bracket Lie), $[-, -]: V \times V \rightarrow V$ dengan $(x, y) \mapsto [x, y]$ yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu $[x, x] = 0$, untuk setiap $x \in V$ dan memenuhi identitas Jacobi $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, untuk setiap $x, y, z \in V$ [2]. Beberapa contoh aljabar Lie antara lain adalah ruang vektor riil $\mathbb{R}^3$ dengan bracket Lie berupa hasil kali silang (*cross product*) antara vektor x dan y , serta ruang vektor $gl(V)$ yang terdiri dari pemetaan linier dari V ke V , dengan bracket Lie yang didefinisikan sebagai $[f, h] = f \circ h - h \circ f$, untuk setiap $f, h \in V$. Himpunan derivasi dari V , dinotasikan dengan $Der(V)$, membentuk suatu subaljabar Lie dari aljabar Lie $gl(V)$.

Hingga saat ini, struktur aljabar, terutama aljabar Lie, masih menjadi subjek penelitian yang aktif. Holomorph aljabar Lie, yang merupakan gabungan antara aljabar Lie itu sendiri dan aljabar derivasi yang mempertahankan strukturnya, sangat penting untuk memahami automorfisma dan ekstensi aljabar tersebut.

Hingga abad ke-20, penelitian tentang struktur holomorph banyak dilakukan dalam konteks grup, terutama grup nilpoten dan p-grup. Studi tentang aljabar Lie, seperti yang dilakukan oleh Barnes (1990-an) dan Hardy (2004), telah mempelajari

holomorph dari aljabar Lie nilpoten berdimensi rendah dan hubungannya dengan automorfisma aljabar Lie. Penelitian tentang derivasi dan ekstensi luar aljabar Lie, seperti yang dilakukan oleh Ayupov dan Khakimjanov (1990), juga memberikan fondasi penting untuk pendekatan melalui holomorph. Namun, sebagian besar penelitian berkonsentrasi pada Aljabar Lie solvabel atau nilpoten, serta karakteristik struktur automorfisma atau derivasi.

Belum banyak literatur yang membahas sifat *holomorph* dari sudut pandang konstruksi strukturalnya, terutama bagi pembaca pemula, meskipun struktur *holomorph* telah diperkenalkan dan digunakan dalam studi lanjutan. Selain itu, sedikit literatur yang membahas sifat *holomorph* dari sudut pandang konstruksi strukturalnya. Pada tulisan ini akan diberikan definisi formal dan konstruksi eksplisit dari *holomorph* suatu aljabar Lie dan menyajikan pembuktian lengkap dan sistematis bahwa *holomorph* dari aljabar Lie juga merupakan aljabar Lie.

2. Landasan Teori

Berikut diberikan definisi tentang derivasi dari aljabar Lie dan beberapa struktur yang mendasarinya.

Definisi 2.1. Misalkan F adalah lapangan. Aljabar Lie atas F adalah ruang vektor L atas F dengan pemetaan bilinear (disebut bracket Lie) $[-, -]: L \times L \rightarrow L$, dengan $(x, y) \mapsto [x, y]$, yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu:

$$[y, y] = 0, \forall y \in L \quad \text{dan} \quad \text{Identitas Jacobi:} \\ [w, [x, y]] + [x, [y, w]] + [y, [w, x]] = 0, \\ \forall w, x, y \in L.$$

Definisi 2.2. Derivasi D dari aljabar W adalah pemetaan linier dari W ke W yang memenuhi $D(yz) = D(y)z + yD(z), \forall y, z \in W$.

Lemma 2.3. Himpunan derivasi dari aljabar W membentuk suatu subaljabar Lie dari aljabar Lie $gl(W)$. Selanjutnya, aljabar derivasi dari W dinotasikan dengan $Der(W)$.

BUKTI. Akan ditunjukkan bahwa $Der(W)$ adalah subruang dari $gl(W)$.

- Sudah jelas bahwa $Der(W) \neq \emptyset$, karena $0 \in Der(W)$, yaitu $0(xy) = 0 = 0x + 0y = 0(x)y + x0(y)$.
- Selain itu, untuk setiap $f \in Der(W)$ maka jelas bahwa $f \in gl(W)$.
- Kemudian, diambil sembarang $g, h \in Der(W)$ dan $x, y \in W$, maka

$$\begin{aligned} (g + h)(xy) &= g(xy) + h(xy) \\ &= g(x)y + xg(y) + h(x)y + xh(y) \\ &= g(x)y + h(x)y + xg(y) + xh(y) \\ &= (g(x) + h(x))y + x(g(y) + h(y)) \\ &= (g + h)(x)y + x(g + h)(y). \end{aligned}$$

Jadi $g + h \in Der(W)$.

Diambil sembarang $a \in F, g \in Der(W)$, maka

$$\begin{aligned} (ag)(xy) &= a(g(xy)) \\ &= a(g(x)y + xg(y)) \\ &= a(g(x))y + xa(g(y)) \\ &= (ag)(x)y + x(ag)(y) \end{aligned}$$

Jadi $ag \in Der(W)$.

- Dapat ditunjukkan bahwa $[g, h] \in Der(W)$, untuk setiap $f, g \in Der(W)$. Diambil sembarang $g, h \in Der(W)$ dan $x, y \in W$,

dapat ditunjukkan bahwa $[g, h]$ adalah pemetaan linier.

Pertama ditunjukkan bahwa

$$[g, h](x + y) = [g, h](x) + [g, h](y).$$

$$\begin{aligned} [g, h](x + y) &= (g \circ h)(x + y) - (h \circ g)(x + y) \\ &= g(h(x + y)) - h(g(x + y)) \\ &= g(h(x) + h(y)) - h(g(x) + g(y)) \\ &= g(h(x)) + g(h(y)) - h(g(x)) \\ &\quad - h(g(y)) \\ &= g(h(x)) - h(g(x)) + g(h(y)) \\ &\quad - h(g(y)) \\ &= (g \circ h)(x) - (h \circ g)(x) + (g \circ h)(y) \\ &\quad - (h \circ g)(y) \\ &= [g, h](x) + [g, h](y). \end{aligned}$$

Kedua ditunjukkan

$$[g, h](ax) = a[g, h](x).$$

$$\begin{aligned} [g, h](ax) &= (g \circ h)(ax) - (h \circ g)(ax) \\ &= g(h(ax)) - h(g(ax)) \\ &= g(ah(x)) - h(ag(x)) \\ &= a(g(h(x))) - a(h(g(ax))) \\ &= a(h(g(x)) - h(g(ax))) \\ &= a((g \circ h)(x) - (h \circ g)(x)) \\ &= a[g, h](x). \end{aligned}$$

- Selanjutnya, ditunjukkan bahwa

$$[g, h](xy) = [g, h](x)y + x[g, h](y).$$

$$\begin{aligned} [g, h](xy) &= (g \circ h)(xy) - (h \circ g)(xy) \\ &= g(h(xy)) - h(g(xy)) \\ &= g(h(x)y + xh(y)) - h(g(x)y + xg(y)) \\ &= g((h(x)y) + g(xh(y))) - h(g(x)y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h(x)g(y)) \\
= & g(h(x))y + h(x)g(y) + g(x)h(y) \\
& + xg(h(y)) - h(g(x))y - g(x)h(y) \\
& - h(x)g(y) - xh(g(y))] \\
= & g(h(x))y - h(g(x))y + xg(h(y)) \\
& - xh(g(y)) \\
= & (g(h(x)) - h(g(x)))y \\
& + x(g(h(y)) - h(g(y))) \\
= & ((g \circ h)(x) - (h \circ g)(x))y \\
& + x((g \circ h)(y) - (h \circ g)(y)) \\
= & [g, h](x)y + x[g, h](y).
\end{aligned}$$

Jadi dapat dibuktikan bahwa $Der(W)$ membentuk suatu subaljabar Lie dari aljabar Lie $gl(W)$.

3. Hasil Dan Pembahasan

Berikut diberikan definisi tentang holomorph dari aljabar Lie dan teorema yang terkait dengannya.

Definisi 3.1. Holomorph $H(L)$ dari aljabar Lie L adalah hasil tambah langsung dari L dan $Der(L)$, yaitu $H(L) = L \oplus Der(L)$.

Theorem 3.2. Holomorph $H(L)$ dari aljabar Lie L merupakan aljabar Lie dengan bracket Lie didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}
[(x, d), (y, e)] &= ([x, y] + d(y) - e(x), [d, e]), \\
&\forall x, y \in L, d, e \in Der(L).
\end{aligned}$$

BUKTI.

a. Untuk menunjukkan bahwa $H(L)$ adalah aljabar Lie, terlebih dahulu ditunjukkan bahwa bracket Lie di $H(L)$ bersifat bilinear. Diambil

sembarang $x, y, z \in L$, $d, e, f \in Der\{L\}$ dan $a, b \in F$.

$$\begin{aligned}
& [a(x, d) + b(y, e), (z, f)] \\
= & [(ax, ad) + (by, be), (z, f)] \\
= & [(ax + by, ad + be), (z, f)] \\
= & ([ax + by, z] + (ad + be)(z) - f(ax + by), \\
& [(ad + be), f]) \\
= & ([ax, z] + [by, z] + (ad)(z) + (be)(z) \\
& - f(ax) - f(by), [ad, f] + [be, f]) \\
= & ([ax, z] + (ad)(z) - f(ax), [ad, f]) \\
& + ([by, z] + be(z) - f(by) + [be, f]) \\
= & (a[x, z] + a(d(z)) - af(x), a[d, f]) \\
& + (b[y, z] + b(e(z)) - bf(y) + b[e, f]) \\
= & a([x, z] + d(z) - f(x), [d, f]) + b([y, z] \\
& + e(z) - f(y) + [e, f]) \\
= & a[(x, d) + (z, f)] + b[(y, e), (z, f)].
\end{aligned}$$

Pembuktian serupa untuk

$$\begin{aligned}
& [(x, d), (y, e) + (z, f)] \\
= & a[(x, d) + (y, e)] + b[(x, d), (z, f)].
\end{aligned}$$

b. Dapat ditunjukkan bahwa bracket Lie pada $H(L)$ memenuhi identitas Jacobi. Diambil sembarang $(x, d), (y, e), (z, f) \in H(L)$. Didapatkan bahwa

$$\begin{aligned}
& [(x, d), [(y, e), (z, f)]] \\
= & [(x, d), ([y, z] + e(z) - f(y), [e, f])] \\
= & ([x, [y, z] + e(z) - f(y)] + d([y, z] \\
& + e(z) - f(y)) - [e, f](x), [d, [e, f]]).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(y, e), [(z, f), (x, d)]] \\
= & [(y, e), ([z, x] + f(x) - d(z), [f, d])] \\
= & ([y, [z, x] + f(x) - d(z)] + e([z, x] \\
& + f(x) - d(z)) - [f, d](y), [e, [f, d]]).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(z, f), [(x, d), (y, e)]] \\
& = [(z, f), ([x, y] + d(y) - e(x), [d, e])] \\
& = ([z, [x, y] + d(y) - e(x)] + f([x, y] \\
& \quad + d(y) - e(x)) - [d, e](z), [f, [d, e]]).
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, didapat bahwa

$$\begin{aligned}
& [(x, d), [(y, e), (z, f)]] + [(y, e), [(z, f), (x, d)]] \\
& \quad + [(z, f), [(x, d), (y, e)]] \\
& = ([x, [y, z] + e(z) - f(y)] + d([y, z] \\
& \quad + e(z) - f(y)) - [e, f](x), [d, [e, f]]) \\
& \quad + ([y, [z, x] + f(x) - d(z)] + e([z, x] \\
& \quad + f(x) - d(z)) - [f, d](y), [e, [f, d]]) \\
& + ([z, [x, y] + d(y) - e(x)] + f([x, y] + d(y) \\
& \quad - e(x)) - [d, e](z), [f, [d, e]]) \\
& = ([x, [y, z] + e(z) - f(y)] + [y, [z, x] \\
& \quad + f(x) - d(z)] + [z, [x, y] + d(y) - e(x)] \\
& \quad + d([y, z] + e(z) - f(y)) + e([z, x] + f(x) \\
& \quad - d(z)) + f([x, y] + d(y) - e(x)) \\
& \quad - [e, f](x), [d, [e, f]] - [f, d](y), [e, [f, d]] \\
& \quad - [d, e](z), [f, [d, e]]) \\
& = ([x, [y, z]] + [x, e(z)] - [x, f(y)][y, [z, x]] \\
& \quad + [y, f(x)] - [y, d(z)] + [z, [x, y]] + [z, d(y)] \\
& \quad - [z, e(x)] + d([y, z] \\
& \quad + (d \circ e)(z) - (d \circ f)(y) + e([z, x]) \\
& \quad + (e \circ f)(x) - (e \circ d)(z) + f([x, y]) \\
& \quad + (f \circ d)(y) - (f \circ e)(x) - [f, d](y) \\
& \quad - [d, e](z), 0) \\
& = (([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]]) \\
& \quad - ([d(y), z] + [y, d(z)]) - ([e(z), x] \\
& \quad + [z, e(x)]) - ([f(x), y] + [x, f(y)] \\
& \quad + d([y, z]) + e([z, x]) + f([x, y])) \\
& \quad + ((d \circ e) - (e \circ d))(z) + ((e \circ f) \\
& \quad - (f \circ e))(x) + ((f \circ d) - (d \circ f))(y) \\
& \quad - [e, f](x) - [f, d](y) - [d, e](z), 0) \\
& = (0 - d([y, z]) - e([z, x]) - f([x, y])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d([y, z]) + e([z, x]) + f([x, y]) \\
& + [d, e](z) + [e, f](x) + [f, d](y) \\
& - [e, f](x) - [f, d](y) - [d, e](z), 0) \\
& = (0, 0)
\end{aligned}$$

Karena *bracket* Lie di $H(L)$ bersifat bilinear dan memenuhi identitas Jacobi, maka terbukti bahwa *holomorph* dari suatu aljabar Lie juga membentuk aljabar Lie.

4. Kesimpulan Dan Saran

Studi ini secara sistematis membuktikan bahwa *holomorph* dari suatu aljabar Lie L , yaitu $H(L) = L \oplus \text{Der}(L)$ merupakan aljabar Lie. Pembuktian dilakukan dengan menunjukkan bahwa struktur hasil penjumlahan langsung tersebut memenuhi dua syarat utama, yaitu antisimetri dan identitas Jacobi. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa penggabungan, yang dalam hal ini hasil tambah langsung antara struktur aljabar dan himpunan derivasi tetap mempertahankan karakteristik Lie, dan membuka jalan untuk penelitian lebih lanjut. Oleh karena itu, *holomorph* dapat dianggap sebagai konstruksi penting untuk memahami automorfisma dan ekstensi aljabar Lie secara struktural.

Kajian dalam penelitian dapat dilanjutkan tentang struktur *holomorph* lainnya, seperti sifat nilpoten, solvabel, atau semisederhana, terutama untuk aljabar Lie berdimensi rendah atau beberapa jenis aljabar Lie.

5. Ucapan Terima Kasih

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada keluarga, dan kepada seluruh pihak yang turut membantu, membimbing dan mendukung pelaksanaan kegiatan penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] N. Jacobson, "A note on automorphisms of Lie algebras.," 1962.
- [2] F. Iachello, *Lie algebras and applications*, vol. 708. Springer, 2006.
- [3] S. Lang, *Linear algebra*. Springer Science & Business Media, 1987.
- [4] R. H. HANIFAH, "ENVELOPING ALGEBRA OF A LIE ALGEBRA," 2013, *UIN SUNAN KALIJAGA*.
- [5] D. W. Barnes, "On Cartan subalgebras of Lie algebras," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 101, pp. 350–355, 1967.
- [6] Y. Su and L. Zhu, "Derivation algebras of centerless perfect Lie algebras are complete," *J Algebra*, vol. 285, no. 2, pp. 508–515, 2005.
- [7] D. W. Barnes, "On the cohomology of soluble Lie algebras," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 101, pp. 343–349, 1967.
- [8] K. Erdmann and M. J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*. in Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2006. [Online]. Available: <https://books.google.co.id/books?id=Kbh3-hvDSbIC>
- [9] Andrew, *Karakteristik Aljabar Lie Berdimensi Kurang Dari 4*. 2012.