UIN IMAM BONJOL PADANG

MAp Journal
Mathematics & Applications

Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

KETERKAITAN ANTARA KONVERGEN ALMOST SURELY, KONVERGEN DALAM PROBABILITAS, KONVERGEN DALAM MEAN, DAN KONVERGEN DALAM DISTRIBUSI

RELATIONS BETWEEN CONVERGENCE ALMOST SURELY, CONVERGENCE IN PROBABILITY, CONVERGENCE IN MEAN, AND CONVERGENCE IN DISTRIBUTIONS

Vira Agusta[1§], Nurweni Putri[2], Maya Sari Syahrul[3]

[1]Prodi Matematika, Unidha, Jl. Sawahan No.103, Padang, Indonesia [Email: agusta.vira@rocketmail.com]
[2]Prodi Matematika, Unidha, Jl. Sawahan No.103, Padang, Indonesia [Email: nurweniputri@gmail.com]
[3]Prodi Matematika, Unidha, Jl. Sawahan No.103, Padang, Indonesia [Email: maya@unidha.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

Received 2019; Accepted 2019; Published 2019

Abstrak

Pada penelitian ini mengkaji keterkaitan antara konvergen almost surely, konvergen dalam probabilitas, konvergen dalam mean, dan konvergen dalam distribusi. Jika barisan variabel random $\{X_n\}$ konvergen almost surely ke suatu variabel random X, maka $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke variabel random ke X. Jika barisan variabel random $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke variabel random X maka $\{X_n\}$ konvergen dalam mean ke X. Jika barisan variabel random $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke variabel random X maka $\{X_n\}$ konvergen dalam distribusi ke X.

Kata Kunci: ruang probabilitas, konvergen almost surely, konvergen dalam probabilitas, konvergen dalam mean, konvergen dalam distribusi.

Abstract

In this research the relations between convergence almost surely, convergence in probability, convergence in mean, and convergence in distribution. If the sequence of random variables $\{X_n\}$ converges almost surely to a random variable X, then it converges in probability to the random variable to X. If the sequence of random variables $\{X_n\}$ converges in probability to a random variable X, then it converges in mean to the random variable to X. If the sequence of random variables $\{X_n\}$ converges in probability to a random variable X, then it converges in the distribution to the random variable to X.

***Keywords**: space probability, convergen almost surely, convergen in probability, convergen in mean, convergen in distribution*

1. Pendahuluan

Teori probabilitas berkaitan dengan cara menentukan hubungan antara sejumlah kejadian khusus dengan sejumlah kejadian sebarang. Teori probabilitas sudah dikenal matematikawan sejak abad 17. Pada tahun 1709 Jaques (Jacob) Bernoulli menulis buku Ars Conjectandi, dimana salah satu isinya adalah tentang teori probabilitas. Kajian mengenai teori probabilitas adalah suatu kajian dalam matematika yang memungkinkan kita untuk menyediakan suatu dasar bagi pembentukan model yang terkait dengan fenomena-fenomena yang mengandung unsur ketidakpastian. Seseorang tidaklah mungkin untuk memahami statistika secara sempurna tanpa memahami apa arti peluang itu sendiri. Oleh karena itu, dapatlah dikatakan bahwa teori probabilitas adalah pondasi dari statistika.

Dalam teori probabilitas terdapat berbagai jenis kekonvergenan diantaranya konvergen almost surely, konvergen dalam probabilitas, konvergen dalam mean, dan konvergen dalam distribusi. Menurut [3], barisan variabel random $\{X_n\}$ dikatakan konvergen almost surely ke suatu variabel random X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \to \infty$,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| < \varepsilon\right) = 1$$

ditulis $X_n \xrightarrow{a.s} X$.

Selanjutnya barisan variabel random $\{X_n\}$ dikatakan konvergen dalam probabilitas ke suatu variabel random X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \to \infty$, berlaku :

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

atau ekuivalen dengan

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1,$$

ditulis $X_n \xrightarrow{p} X$.

Selanjutnya barisan variabel random $\{X_n\}$ dikatakan konvergen dalam mean ke r ke suatu variabel random X jika untuk $n \to \infty$ bila $E(X_n - X)^r \to 0$ untuk $n \to \infty$. Bila $r = 2$, maka $X_n \to X$ disebut konvergen dalam mean kuadrat.

Sementara barisan variabel random $\{X_n\}$ dikatakan konvergen dalam distribusi ke suatu variabel random X jika untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$$

untuk setiap x dengan fungsi sebaran $F(x) = P(X \leq x)$ kontinu dari kanan.

Pada berbagai kajian khususnya di bidang statistika matematika mengenai teori probabilitas dibahas adanya keterkaitan antara kekonvergenan variabel random yang satu dengan kekonvergenan variabel random yang lain. Kajian mengenai hubungan antara beberapa jenis kekonvergenan dari variabel random dalam teori probabilitas sangat penting untuk dibahas karena keterpakaiannya dalam membantu pembuktian teorema-teorema tertentu. Dalam tulisan ini akan dikaji tentang keterkaitan antara konvergen almost surely, konvergen dalam probabilitas, konvergen dalam mean, dan konvergen dalam distribusi.

2. Landasan Teori

2.1 Ruang Probabilitas

Definisi 2.1 [1] *Misalkan $\mathcal{U}$ suatu ukuran nonnegatif pada σ-field $\mathcal{F}$ dan ukuran $\mathcal{U}$ fungsi bernilai real pada σ-field $\mathcal{F}$ tersebut sedemikian sehingga setiap kali himpunan kejadian $A_1, A_2, \dots$ membentuk koleksi berhingga atau tak berhingga terhitung dengan $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ himpunan-himpunan saling asing, dengan*

$$\mathcal{U}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathcal{U}(A_n)$$

untuk $\mathcal{U}(\Omega) = 1$, $\mathcal{U}$ disebut ukuran probabilitas.

Misalkan Ω suatu himpunan dari titik-titik dalam suatu ruang sampel dan $\mathcal{F}$ suatu σ-field yaitu kumpulan dari subhimpunan Ω dimana bisa dihitung probabilitasnya. Subhimpunan ini dikatakan kejadian dan bisa dipandang sebagai suatu kemungkinan yang bisa terjadi. Jika dimisalkan $\mathrm{U} = \mathrm{P}$ suatu ukuran pada $\mathcal{F}$ yaitu suatu fungsi yang diberikan oleh probabilitas untuk sebarang kejadian dalam $\mathcal{F}$, maka tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ dinamakan ruang probabilitas. [1]

2.2 Variabel Random

Berikut diberikan definisi dan teorema yang berhubungan dengan variabel random.

2.2.1 Definisi Variabel Random

Definisi 2.2 [1] *Suatu variabel random X pada ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ adalah fungsi terukur Borel dari himpunan Ω ke bilangan riil $\mathbb{R}$ ditulis $X: \Omega \to \mathbb{R}$.*

Definisi 2.3 [1] *Fungsi distribusi dari variabel random X adalah fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $[0,1]$ didefinisikan sebagai*

$$F(x) = P\{\omega: X(\omega) \leq x\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Definisi 2.4 [4] *Suatu variabel random X disebut variabel random diskret bila jelajahnya ($\mathcal{D}$) berhingga atau tak terhingga terhitung (countable) dengan fungsi massa probabilitas (fmp) dari X adalah*

$$p(x) = P\{X = x\},\ untuk\ x \in \mathcal{D}.$$

Fungsi massa probabilitas $p_x(x)$ memenuhi dua sifat berikut yaitu $0 \leq p(x) \leq 1$ untuk setiap $x \in \mathcal{D}$ dan $\sum_{x \in \mathcal{D}} p(x) = 1$.

Definisi 2.5 [4] *Suatu variabel random X disebut kontinu bila fungsi distribusi kumulatif dari X yaitu $F(x)$ merupakan fungsi kontinu untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan $f(x)$ fungsi kepadatan probabilitas (fkp) sedemikian sehingga fungsi distribusinya dinyatakan sebagai:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

Fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$ merupakan fungsi kontinu. Sehingga fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$ memenuhi dua sifat berikut :

1. $f(x) \geq 1$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

2.2.2 Ekspektasi dan Variansi

Definisi 2.6 [4] *Misalkan X variabel random diskret dengan fungsi massa probabilitas $p(x)$ dan $\sum_{-\infty}^{\infty}|x|p(x) < \infty$, maka ekspektasi dari X didefinisikan sebagai*:

$$E(X) = \sum_x x\,p(x).$$

Bila X variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$ dan $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx < \infty$, maka ekspektasi dari X didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Teorema 2.7 [3] *Misalkan X suatu variabel random dan misalkan $a, b,$ dan c suatu konstanta, maka untuk sebarang fungsi $g_1(X)$ dan $g_2(X)$* (*masing-masing ekspektasinya ada*) *berlaku :*

$$E[ag_1(X) + bg_2(X) + c] = aE[g_1(X)] + b[g_2(X)] + c.$$

Definisi 2.8 [1] *Misalkan X variabel random pada ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Bila $k > 0$, bilangan $E(X^k)$ dinamakan momen ke-k dari variabel random X, sedangkan $E(|X|^k)$ dinamakan momen absolut ke-k dari variabel random X. Selanjutnya $E[(X-\mu)^k]$ disebut momen sentral ke-k dan $E[|X-\mu|^k]$ disebut momen sentral absolut ke-k dengan μ merupakan ekspektasi dari X, momen sentral didefinisikan hanya untuk $E(X)$ berhingga.*

Momen pertama $(k = 1)$ adalah $E(X)$ sering disebut sebagai mean dari X dan momen sentral pertama (jika ada) selalu 0. Momen sentral kedua yaitu $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$ disebut variansi dari X sering ditulis sebagai $Var(X)$ dan deviasi standard didefinisikan sebagai akar positif dari σ^2 yaitu σ.

Teorema 2.9 [1] *Misalkan X suatu variabel random pada ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Jika $E(X)$ ekspektasi dari X berhingga* (*yang berarti $E(X^2)$ selalu ada karena $X^2 \geq 0$*)*, maka*

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2.$$

Teorema 2.10 [2] Jika $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^{\ 2})$, $i = 1, \ldots, n$ menyatakan variabel random normal yang saling bebas, maka

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2} \sigma_i^{\ 2}\right).$$

Berikut ini akan diberikan definisi dari Ketidaksamaan Chebyshev.

Teorema 2.11 [2] Jika *X merupakan suatu variabel random dengan nilai tengah* µ *dan ragam σ^2, maka untuk sebarang $k > 0$*,

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

atau jika $\delta = k\sigma$ maka

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

2.3 Konvergensi Barisan Variabel Random

Berikut diberikan definisi dan teorema yang berkaitan dengan konvergensi barisan variabel random.

Definisi 2.12 [3] *Misalkan $\{X_n\}$ barisan variabel* *random yang didefinisikan pada suatu ruang probabilitas* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Suatu barisan variabel random* $\{X_n\}$ *dikatakan konvergen dalam probabilitas ke variabel random* X, *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *dan* $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

atau ekuivalen dengan $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$, *ditulis* $X_n \xrightarrow{p} X$.

Definisi 2.13 [3] *Misalkan* $\{X_n\}$ *adalah barisan variabel random yang didefinisikan pada suatu ruang probabilitas* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Suatu barisan variabel random* $\{X_n\}$ *dikatakan konvergen hampir pasti (almost surely) ke variabel random* X, *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *dan* $n \to \infty$,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| < \varepsilon\right) = 1$$

ditulis $X_n \xrightarrow{a.s} X$.

Definisi 2.14 [3] *Misalkan* $\{X_n\}$ *barisan variabel random yang didefinisikan pada suatu ruang probabilitas* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Suatu barisan variabel random* $\{X_n\}$ *dikatakan konvergen dalam distribusi ke variabel random* X *untuk* $n \to \infty$ *jika*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

untuk semua titik x *dimana fungsi distribusi* $F_X(x)$ *adalah kontinu dari kanan ditulis* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Definisi 2.15 [5] *barisan variabel random* $\{X_n\}$ *dikatakan konvergen dalam mean ke r ke suatu variabel random* X *jika untuk* $n \to \infty$ *bila* $E(X_n - X)^r \to 0$ *untuk* $n \to \infty$. *Bila* $r = 2$, *maka* $X_n \to X$ *disebut konvergen dalam mean kuadrat.*

Teorema 2.16 [5] *Barisan variabel random* $\{X_n\}$ *konvergen hampir pasti (almost surely) ke variabel random X jika dan hanya jika* $\lim_{n\to\infty} P(\sup_{n\to\infty} |X_m - X_n| > \varepsilon) = 0$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$.

3. Hasil Dan Pembahasan

3.1 Keterkaitan Antara Konvergen Almost Surely, Konvergen dalam Probabilitas, Konvergen dalam Mean, dan Konvergen dalam Distribusi

Teorema 3.1 [3] *Jika barisan variabel random* $\{X_n\}$ *konvergen hampir pasti (almost surely) ke variabel random* X, *maka* $\{X_n\}$ *konvergen dalam probabilitas ke X.*

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $\eta > 0$ sebarang, selanjutnya $X_n \xrightarrow{a.s} 0$ mempunyai arti bahwa untuk $\varepsilon > 0$, terdapat $n > 0$ sedemikian hingga dapat dipilih n_0 sedemikian sehingga,

$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{m\geq n} |X_n|\right) = 0$ atau $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq n_0} [|X_n| > \varepsilon]\right) = 0$.

Sehingga untuk $X_n \xrightarrow{a.s} X$ mengakibatkan untuk setiap $\varepsilon > 0, \eta > 0$ dapat dipilih $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$ sedemikian sehingga

$$P\left(\bigcap_{n\geq n_0}^{\infty} [|X_n - X| \leq \varepsilon]\right) \geq 1 - \eta.$$

Selanjutnya, karena $\bigcap_{n\geq n_0}^{\infty} [|X_n - X| \leq \varepsilon]$ untuk $n \geq n_0$, maka untuk $n \geq n_0$ diperoleh:

$$P([|X_n - X| \leq \varepsilon]) \geq P\left(\bigcap_{n\geq n_0}^{\infty} [|X_n - X| \leq \varepsilon]\right) \geq 1 - \eta,$$

yang berarti $P([|X_n - X| \le \varepsilon]) \ge 1 - \eta$ untuk $n \ge n_0$. Akibatnya karena $\eta > 0$ sebarang maka untuk $\eta \to \infty$ diperoleh limit untuk $n \to \infty$ yaitu

$$\lim_{n\to\infty} P([|X_n - X| \le \varepsilon]) = 1.$$

Hal ini berarti $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke X, yaitu $X_n \overset{p}{\to} X$. ■

Teorema 3.2 [5] *Jika barisan variabel random $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke variabel random X maka $\{X_n\}$ konvergen dalam distribusi ke X.*

Bukti:

Misalkan $F_{X_n}(x) = P(X_n \le x)$ dan $F_X(x) = P(X \le x)$ masing-masing adalah fungsi distribusi dari X_n dan X. Akan ditunjukan bahwa $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ untuk setiap $x \epsilon C(F_X(x))$ dimana $C(F_X(x))$ adalah himpunan fungsi $F_X(x)$ yang kontinu, selanjutnya untuk setiap $\varepsilon > 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \le x) \\ &= P(X_n \le x, X \le x + \varepsilon) + P(X_n \le x, X > x + \varepsilon) \\ &\le P(X \le x + \varepsilon) \\ &\qquad + P(X_n - X \le x - X, x - X < -\varepsilon) \\ &= P(X \le x + \varepsilon) + P(X_n - X < -\varepsilon) \\ &\le P(X \le x + \varepsilon) + P(X_n - X < -\varepsilon) \\ &\qquad + P(X_n - X > \varepsilon) \\ &= P(X \le x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon) \\ &= F_X(x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Sehingga

$$F_{X_n}(x) \le F_X(x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon),$$

dengan cara yang sama diperoleh

$$F_X(x - \varepsilon) \le F_{X_n}(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon).$$

Sehingga

$$F_X(x - \varepsilon) - P(|X_n - X| > \varepsilon) \le F_{X_n}(x) \le F_X(x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon),$$

karena $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke X, maka untuk $n \to \infty$ diperoleh

$$F_X(x - \varepsilon) \le \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \le F_X(x + \varepsilon),$$

Berdasarkan asumsi, fungsi distribusi $F_X(x)$ kontinu pada x, sehingga jika $\varepsilon \to \infty$ maka $F_X(x - \varepsilon) \to F_X(x)$ dan $F_X(x + \varepsilon) \to F_X(x)$. Selanjutnya untuk $\varepsilon > 0$ maka

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x - \varepsilon) = F_X(x) \text{ dan } \lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x + \varepsilon) = F_X(x)$$

Sehingga diperoleh

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x - \varepsilon) \le \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)\right] \le \lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x + \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow F_X(x) \le \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \le F_X(x)$$

Sehingga $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, dengan kata lain, $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ untuk $x \epsilon C(F_X(x))$, artinya $\{X_n\}$ konvergen dalam distribusi *ke* X. ■

Teorema 3.3 [5] *Jika barisan variabel random $\{X_n\}$ konvergen dalam mean ke variabel random X maka $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke variabel random X.*

Bukti:

Menurut ketaksamaan Markov

$$P\left(\left|X_n\right| > \varepsilon\right) \le \frac{E\left|X_n - X\right|^r}{\varepsilon^r} \to 0$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \to \infty$.

Sehingga terbukti $\{X_n\}$ konvergen dalam peluang ke variabel random X.

Teorema 3.4 [5] *Misalkan* $\{X_n, Y_n\}$ *barisan pasangan variabel random untuk* $n = 1,2,3, \ldots$ *Jika* $|X_n - Y_n| \overset{P}{\to} 0$ *dan* $Y_n \overset{d}{\to} Y$, *maka* $X_n \overset{d}{\to} Y$.

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Misalkan x titik kontinu dari fungsi distribusi kumulatif Y maka:

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \le x)$$

$$= P(X_n + Y_n \le x + Y_n)$$
$$= P(Y_n \le x + Y_n - X_n)$$
$$= P(Y_n \le x + Y_n - X_n; Y_n - X_n \le \varepsilon)$$
$$+ P(Y_n \le x + Y_n - X_n; Y_n - X_n > \varepsilon)$$
$$\le P(Y_n \le x + \varepsilon) + P(Y_n - X_n > \varepsilon).$$

Kedua ruas dilimitkan untuk $n \to \infty$, diperoleh

$$\limsup_{n\to\infty} P(X_n \le x) \le \liminf_{n\to\infty} P(Y_n \le x + \varepsilon),$$
$$\Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \le \liminf_{n\to\infty} F_{Y_n}(x + \varepsilon),$$

dengan cara yang sama diperoleh

$$\liminf_{n\to\infty} P(X_n \le x) \ge \limsup_{n\to\infty} P(Y_n \le x - \varepsilon),$$

atau $\liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \ge \limsup_{n\to\infty} F_{Y_n}(x - \varepsilon)$.

Sehingga

$$\limsup_{n\to\infty} F_{Y_n}(x - \varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} P(X_n \le x)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \le \liminf_{n\to\infty} F_{Y_n}(x + \varepsilon),$$

karena $\varepsilon > 0$ sebarang dan x titik kontinu dari fungsi distribusi kumulatif Y, maka untuk $\varepsilon \to 0$ diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x).$$

Selanjutnya, karena $Y_n \xrightarrow{d} Y$ yaitu

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(y),$$

sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(y)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(y).$$

Hal ini berarti $X_n \xrightarrow{p} X$. Konvergen dalam distribusi ke Y atau $X_n \xrightarrow{d} Y$. ■

3.2 Ilustrasi Keterkaitan Antara Konvergen Almost Surely, Konvergen dalam Probabilitas, Konvergen dalam Mean.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots$ suatu barisan variabel random yang berdistribusi secara bebas dan identik menurut distribusi normal dengan $E(X_i) = \mu = 0$ dan $Var(X_i) = \sigma^2 = 1$ Misalkan juga didefinisikan dua variabel random yang baru yaitu $X=0$ dan $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Berdasarkan Teorema 2.3.2.6 maka $\overline{X}_n$ merupakan variabel random normal dengan $E(\overline{X}_n) = 0$ dan $Var(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}$. Dapat dilihat bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left|\overline{X}_n - X\right| < \varepsilon\right) = P\left(\lim_{n\to\infty}\left|\overline{X}_n - 0\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

artinya, $\overline{X}_n$ konvergen almost surely ke variabel random X.

Dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev, selanjutnya akan dibuktikan $\overline{X}_n$ konvergen dalam probabilitas ke variabel random X. Perhatikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\overline{X}_n - X\right| \ge \varepsilon\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - 0\right| \ge \varepsilon\right)$$
$$= P\left(\left(\overline{X}_n - 0\right)^2 \ge \varepsilon^2\right)$$
$$\le \frac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$$
$$= \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Karena itu, diperoleh

$$P\left(\left|\overline{X}_n - X\right| \ge \varepsilon\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - 0\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{n\varepsilon^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - X\right| \ge \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\varepsilon^2} = 0$$

yang berarti bahwa $\overline{X}_n$ konvergen dalam probabilitas ke variabel random X.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\overline{X}_n$ konvergen dalam mean ke X, dengan menggunakan Ketaksamaan Markov diperoleh :

$$P\left(\left|\overline{X_n}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{E\left|\overline{X}_n - X\right|^r}{\varepsilon^r}$$

$$= \frac{E\left|\overline{X}_n - 0\right|^r}{\varepsilon^r}$$

$$= \frac{E\left|\overline{X}_n\right|^r}{\varepsilon^r} \to 0$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \to \infty$ terbukti $\overline{X}_n$ konvergen dalam mean ke *X*.

4. Kesimpulan Dan Saran

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian adalah; Jika barisan variabel random $\{X_n\}$ konvergen almost surely ke variabel random X, maka $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke X. Jika barisan variabel random $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke variabel random X maka $\{X_n\}$ konvergen dalam distribusi ke X. Jika barisan variabel random $\{X_n\}$ konvergen dalam mean ke variabel random X, maka $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke *X*.

Adapun saran untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji hubungan kekonvergenan yang lain dan teorema-teorema yang berkaitan dengan kekonvergenan variabel random tersebut

5. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada rektor Universitas Dharma Andalas (UNIDHA), Prof. Dr. Deddi Prima Putra, Apt. serta kepada LPPM Universitas Dharma Andalas yang telah memberikan kesempatan untuk melakukan penelitian ini.Terima kasih juga kepada Ketua Program Studi Matematika UNIDHA, Bapak Narwen, M.Si serta rekan-rekan dosen Prodi Matematika yang telah banyak membantu penyelesaian penelitian ini. Terimakasih juga kepada Jurusan Matematika Universitas Islam Nasional Imam Bonjol yang telah membantu menerbitkan jurnal ini.

Daftar Pustaka

[1] Ash, R.N. 1972. *Real Analysis and Probability*, Academic Press inc, London.

[2] Bain, L.J. and Engelhardt, Max. 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Duxbury Press, California.

[3] Casella, G. dan R. L. Berger. 1990. *Statistical Inference*. Ed. Ke-1 Wadsworth & Brooks/Cole, Pasific Grove, California.

[4] Subanar. 2013. *Statistika Matematika, Probabilitas, Distribusi, dan Asimtotis dalam Statistika*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

[5] Subanar. 2013. *Statistika Matematika.* Graha Ilmu, Yogyakarta.