MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

PENAKSIRAN PARAMETER MODEL *AUTOREGRESSIVE* ORDE (1) DENGAN MENGGUNAKAN METODE LIKELIHOOD MAKSIMUM

ESTIMATION OF PARAMETERS MODEL AUTOREGRESSIVE ORDE(1) BY USING MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD

Miftahul Jannah[1§], Indah Nurina Fitri H[2]

[1]Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia [Miftahuljannah@uinib.ac.id]
[2]Institute Teknologi Bandung, Indonesia [Indahnurina@gmail.com]
[§]*Corresponding Author*

Received 2019; Accepted 2019; Published 2019

Abstrak

Model *Autoregressive* (AR) merupakan suatu model yang digunakan untuk melakukan prediksi atau meramal suatu kejadian dimasa yang akan datang dengan menggunakan data-data pada waktu sebelumnya. Untuk memprediksi kejadian dimasa mendatang dilakukan penaksiran parameter dari model *Autoregressive* (AR). Pada penelitian ini akan dibahas penaksiran parameter *Autoregressive* (AR) untuk orde *p=1* yang disingkat dengan model AR(1). Metode yang digunakan untuk menaksir parameter model AR(1) adalah dengan menggunakan metode Likelihood Maksimum (LM). Langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan menentukan fungsi likelihood dari model AR(1). Untuk menentukan fungsi likelihood dari model AR(1) terlebih dahulu ditentukan fungsi peluang dari model AR(1). Fungsi peluang model AR(1) bisa ditentukan dari definisi model AR(1) tersebut, yaitu $\boldsymbol{X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t}$ dimana $\boldsymbol{X_t}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ saling bebas maka diperoleh $\boldsymbol{X_t | X_{t-1} \sim N(\alpha_1 X_{t-1}, \sigma^2)}$, sehingga diperoleh fungsi peluang dari model AR(1). Selanjutnya dilakukan simulasi data dengan memilih nilai parameter $\boldsymbol{\alpha = 0.4}$ dan $\boldsymbol{\sigma^2 = 0.1}$. Simulasi data dilakukan untuk membandingkan nilai taksiran parameter $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\sigma}$ dari model AR(1). Dengan menggunakan software matematika MATLAB, diperoleh nilai penaksiran dari parameter-parameter model AR(1) secara analitik dan numerik hampir sama. Hal ini tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan.

Kata Kunci: Model *Autoregressive* Orde 1, Metode Likelihood Maksimum

Abstract

Autoregressive (AR) is a model used to predict the future time by using the data in the past. To predict the future time parameter estimation is performed from Autoregressive (AR) model. In this research will discussed estimation Autoregressive (AR) for orde p = 1 which in brief with AR(1). The method used to estimate parameter model of AR(1) is using likelihood maximum method. The first step is determining the function of likelihood from AR(1) model. Before determine the likelihood fuction, we determine the probability function of AR(1) model. The probability function of AR(1) model can be obtained from the *definition of AR(1) model. That is* $\boldsymbol{X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t}$ *where* $\boldsymbol{X_t}$ *and* $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ *independent, then obtained* $\boldsymbol{X_t | X_{t-1} \sim N(\alpha_1 X_{t-1}, \sigma^2)}$, *so that the opportunity function of the model AR(1) is obtained. Futhermore,* *after the parameter estimator obtained from model AR will be simulated using the mathematical software is MATLAB. From the simulation results, the values obtained for the estimation of the parameters of model AR(1) analytically and numerically show almost the same value. This does not show a significant difference.*

Keywords: *Model Autoregressive AR(1), Likelihood Maximum Method*

1. Pendahuluan

Analasis deret waktu (*time series)* adalah salah satu cabang dari ilmu statistika yang digunakan untuk melihat perilaku data-data yang mempertimbangkan pengaruh waktu. Data-data dikumpulkan secara periodik berdasarkan waktu, bisa dalam jam, hari, minggu, bulan, kuartal, dan tahun. Unsur penting dari analisis *Time Series* adalah diperolehnya model yang mampu merepresentasikan data yang telah diberikan. Model *time series* ini tidak hanya digunakan untuk data yang mempunyai satu variabel (*univariate*) tetapi juga bisa digunakan untuk data yang mempunyai banyak variabel (*multivariate*).

Model umum pada time series dinamakan model *Autoregressive Integrateg Moving Avarage* (ARIMA*)* yang telah dipelajari secara mendalam oleh George Box dan Gwilym Jenkins (1976). Pada model ARIMA terdiri dari dua aspek yaitu aspek *Autoregressive* dan M*oving Average*. Secara umum model ARIMA ditulis dengan notasi ARIMA(p,d,q), dimana p menyatakan orde proses *Autoregressive* (AR), q menyatakan orde proses *Moving Average* (MA), dan yang terakhir q menyatakan orde transformasi pembedaan (*differencing*).

Pada model ARIMA, jika nilai $d = 0$ maka model menjadi ARIMA(p,0,q), selanjutnya dinamakan dengan model ARMA(p,q). model ARMA(p,q) ini adalah model ARIMA untuk data deret waktu yang stasioner yaitu data tidak mengalami transformasi perbedaan. Jika $d = 0$ dan $q = 0$, maka model ini dinamakan ARIMA(p,0,0). Atau disebut model ARMA(p,0) lebih umum dinamakan dengan model AR(p). Model AR(p) dikesebut juga dengan model *Autoregressive* orde p. Selanjutnya, jika nilai $p = 0$ dan $d = 0$ maka model ARIMA menjadi model ARMA(0,q) yang dikenal dengan model *Moving Average* orde q yang dinotasikan dengan MA(q) [6].

Pemodelan dengan menggunakan model *time series* memegang peranan penting dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu manfaat dari pemodelan dengan menggunakan model *time series* adalah diperolehnya prediksi nilai dimasa yang akan datang dari data-data yang telah diberikan.

Prediksi ini sangat penting dalam kehidupan untuk mendapatkan suatu perencanaan yang lebih baik agar dapat mengetahui langkah yang harus diambil untuk memperkecil resiko yang tidak diinginkan.

Pada artikel ini dibahas bagaimana menentukan penaksir parameter dari model AR untuk orde satu atau AR(1). Ada beberapa metode yang bisa digunakan untuk menentukan penaksir parameter dari model AR(1), diantaranya adalah dengan metode moment, metode *Ordinary Least Square Estimation* (OLS), metode information criteria dan metode likelihood maksimum estimator.

Beberapa penelitian terdahulu mengenai estimasi model *Autoregressive* dilakukan oleh [8] tentang Estimasi Parameter Model *Autoregressive* (AR) dengan Menggunakan Metode Fungsi Marginal Likelihood. Begitu juga penelitian lainnya pernah dilakukan oleh [7] mengenai Pengestimasian Parameter Model *Autoregressive* (AR) pada Analysis Deret Waktu Univariat.

Dalam artikel ini, metode yang digunakan untuk menaksir parameter model AR(1) adalah dengan menggunakan metode likelihood maksimum. L angkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi likelihood dari model AR(1). Untuk menentukan fungsi likelihood dari model AR(1) terlebih dahulu ditentukan fungsi peluang dari model AR(1). Fungsi peluang model AR(1) ditentukan dari definisi model AR(1) yaitu,

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

dimana X_t dan ε_t diasumsikan saling bebas maka diperoleh $X_t|X_{t-1} \sim N(\alpha_1 X_{t-1}, \sigma^2)$, sehingga fungsi peluang dari model AR(1) dapat ditulis sebagai berikut;

$$f_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t-(\alpha_1 x_{t-1})}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

Selanjutnya, dengan memaksimumkan fungsi likelihood tersebut, akan diperoleh penaksir dari parameter- parameter untuk model AR(1).

2. Landasan Teori

2.1. Model *Autoregressive* (AR)

Model *Autoregressive* merupakan suatu model yang digunakan untuk melakukan prediksi atau meramal suatu kejadian dengan menggunkan nilai-nilai pada waktu sebelumnya [1]. Model AR merupakan salah satu regresi linier yang memenuhi asumsi homoskedalisitas, dimana homoskedalisitas berarti variansi dari error bersifat konstan atau identik [4]. Model Autoregrresive merupakan model yang tidak dapat diobservasi karena nilai standar deviasinya konstan terhadap waktu. Model *Autoregressive* (AR) dengan orde p secara umum didefinisikan sebagai berikut

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

diasumsikan X_t dan ε_t saling bebas.

2.2. Metode Likelihood Maksimum (LM)

Untuk mengetahui besar nilai parameter dari model AR(1), dapat dilakukan penaksiran parameter dengan menggunakan Metode Likelihood Maksimum (LM). Metode Likelihood Maksimum adalah metode yang paling banyak digunakan untuk mengestimasi parameter dalam model statistik. Untuk menaksir parameter dari model AR(1) dilakukan dengan cara mencari parameter yang memaksimumkan fungsi likelihood dari model AR(1) tersebut.

Misalkan terdapat sampel acak $X_1, X_2, \cdots X_n$ yang berdistribusi identik dan saling bebas dengan fungsi peluang $f(x, \theta)$, maka fungsi likelihood dengan parameter θ dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(\Theta) = L(\Theta|x_1, \cdots x_n) \propto f x_1, \cdots x_n(x_1, \cdots x_n|\Theta)$$

Untuk mempermudah perhitungan, fungsi likelihood dapat ditransformasi menjadi fungsi log-likelihood yang didefinisikan:

$$l(\theta) = log\big(L(\theta|x)\big)$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f\,(x_i|\theta\,), \;\; \theta \in \Omega$$

2.3. Syarat Cukup Nilai Ekstrem (Maksimum dan Minimum)

Titik stasioner belum tentu merupakan titik ekstrim. Sebagai contoh, fungsi $f(x,y) = xy$ mempunyai titik stasioner (0, 0), tetapi titik ini bukan merupakan titik ekstrim (global maupun lokal). Oleh karena itu untuk memastikan nilai-nilai ekstrim (optimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan pengujian sampai derivatif keduanya.

Untuk memastikan penaksir parameter tersebut merupakan nilai yang memaksimalkan fungsi log-likelihood dari model AR(1), maka dibutuhkan syarat cukup nilai ekstrim, yaitu dilakukan uji turunan kedua dari fungsi log-likelihood sebagai berikut :

Misalkan $f(x,y)$ adalah fungsi dua variable dengan titik kritis (a,b). Fungsi $f(x,y)$ kontinu pada interval tertutup dan mempunyai turunan parsial pada inerval terbuka, kemudian didefinisikan

$$D = D(a,b) = f_{xx}\,(a,b) f_{yy}(a,b) - \;\big[f_{xy}(a,b)\big]^2$$

asumsikan (a,b) adalah titik kritis untuk $f(x,y)$, maka :

1. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}\,(a,b) > 0$, maka $f(a,b)$ adalah nilai minimum.
2. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}\,(a,b) < 0$, maka $f(a,b)$ adalah nilai maksimum
3. Jika $D < 0$, maka (a,b) adalah titik pelana.
4. Jika $D = 0$, maka pengujian tidak memberi kesimpulan.

3. Hasil Dan Pembahasan

3.1. Model Autoregressive Orde 1

Adapun bentuk umum model AR dengan orde *p* yang dinotasikan dengan AR(*p*) dapat dituliskan sebagai berikut ini;

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Dengan

X_t = parameter pada waktu ke-t

α_1 = model AR, $i = 1,2,3, \cdots, p$

ε_t = nilai error saat ke-t

$\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

p = orde model AR

Ada beberapa asumsi untuk proses AR(*p*) sebagai berikut;

1. Model AR merupakan proses stasioner,
2. Autokovariansi $\varepsilon_t, Y_{t-k} = 0$, untuk $k \neq 0$,
3. Autokovariansi $\varepsilon_t, Y_{t-k} \neq 0$

Pada artikel ini akan dibahas model AR untuk orde *p = 1*, maka modelnya dapat ditulis menjadi

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Dengan asumsi:

1. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$
4. $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik
3. X_t dan ε_t saling bebas

3.2.1. Sifat distribusi model Autoregressive orde 1

Model AR(1) didefinisikan sebagai berikut;

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Karena ε_t berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ^2 sigma2, maka X_t berdistribusi normal dengan parameter mean dan variansi yang belum diketahui. Untuk kita harus menghitung mean dan variansi dari X_t. Telah diketahui bahwa et saling bebas dengan X_{t-1}. Berikut ini mean dan variansi dari model Autoregresi untuk X_t tidak bersyarat dan bersyarat.

Ekspektasi (mean) tidak bersyarat model Autoregerssive untuk nilai $\alpha_0 = 0$,

$E(X_t) = E(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t)$

$E(X_t) = E(\alpha_0) + E(\alpha_1 X_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$

Karena nilai $\alpha_0 = 0$ dan model AR(1) adalah proses yang stasioner maka diperoleh nilai mean dari AR(1), yaitu : $E(X_t) = 0$.

Ekspektasi (mean) tidak bersyarat model Autoregersi untuk nilai $\alpha_0 \neq 0$,

$E(X_t) = E(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t)$

$E(X_t) = E(\alpha_0) + E(\alpha_1 X_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$

$E(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1})$,

Karena nilai $\alpha_0 \neq 0$ dan berdasarkan sifat kestasioneran dari model AR(1), maka diperoleh nilai mean/ekspektasi dari AR(1), yaitu :

$$E(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

Selanjutnya akan ditentukan mean/ekspektasi bersyarat dari model Autoregerssive untuk $\alpha_0 = 0$,

$E(X_t|X_{t-1}) = E(\alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t)$

$E(X_t|X_{t-1}) = \alpha_1 E(X_{t-1}|X_{t-1}) + E(\varepsilon_t|X_{t-1})$

$E(X_t|X_{t-1}) = \alpha_1 X_{t-1}$

Selanjutnya akan ditentukan mean/ekspektasi bersyarat dari model Autoregerssive untuk $\alpha_0 \neq 0$

$E(X_t|X_{t-1}) = E(\alpha_0) + \alpha_1 E(X_{t-1}|X_{t-1}) + E(\varepsilon_t|X_{t-1})$

$E(X_t|X_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}$.

Sifat distribusi model Autoregressive berikutnya adalah variansi. Varinasi tidak bersyarat dari model Autoregerssive untuk nilai $\alpha_0 = 0$,

$Var(X_t) = Var(\alpha_1 X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) + 2cov(\alpha_1 X_{t-1}, \varepsilon_t)$

$Var(X_t) = \alpha_1^2\, Var(X_t) + \sigma^2$

$$Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}$$

Varinasi tidak bersyarat dari model Autoregersi untuk nilai $\alpha_0 \neq 0$,

$Var(X_t) = Var(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t)$

$Var(X_t) = 0 + Var(\alpha_1 X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) + 2cov(\alpha_1 X_{t-1}, \varepsilon_t)$

$$Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}$$

Varinasi bersyarat dari model AR(1) untuk nilai $\alpha_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
Var(X_t|X_{t-1}) & \\
&= Var(\alpha_1 X_t|X_{t-1}) \\
&+ Var(\,\varepsilon_t\,|X_{t-1}) \\
&+ 2\alpha_1 cov(\,X_{t-1}, \varepsilon_t\,|X_{t-1})
\end{aligned}
$$

$Var(X_t|X_{t-1})\ = 0 + \sigma^2 + 0$

$Var(X_t|X_{t-1})\ = \sigma^2$

Variansi bersyarat dari model AR(1) untuk nilai $\alpha_0 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
Var(X_t|X_{t-1}) & \\
&= 0 + Var(\alpha_1 X_t|X_{t-1}) \\
&+ Var(\,\varepsilon_t\,|X_{t-1}) \\
&+ 2\alpha_1 cov(\,X_{t-1}, \varepsilon_t\,|X_{t-1})
\end{aligned}
$$

$Var(X_t|X_{t-1})\ = \sigma^2$

Karena $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, maka $X_t \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}\right)$

Untuk distribusi bersyarat

$$X_t|X_{t-1} \sim N(\alpha_1 X_{t-1}, \sigma^2),$$

dengan demikian fungsi peluang dari model AR (1) adalah

$$f_{X_t}(x_t) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t}{\theta}\right)^2\right\},$$

dimana

$$\theta = \sqrt{\frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}}$$

Fungsi peluang untuk distribusi bersyarat $X_t|X_{t-1}$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
& f_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t - (\alpha_1 x_{t-1})}{\sigma}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

3.3. Fungsi Pembangkit Momen dari Model Autoregresi Orde Pertama

Karena model Autoregresi orde pertama berdistibusi normal, maka fungsi pembangkit momen dari X_t dan $X_t|X_{t-1}$ adalah sebagai berikut ini

$$M_{X_t}(t) = exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}\right)t^2\right\}$$

Untuk $X_t|X_{t-1}$, diperoleh

$$M_{X_t|X_{t-1}}(t) = exp\left\{\alpha_1 x_{t-1} t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$$

Fungsi pembangkit ini digunakan untuk menentukan momen pertama (mean), momen kedua, momen pusat pertama dan momen pusat kedua. Penentuan pusat data dan sebaran data dapat direpresentasikan oleh mean dan variansi. Begitu juga untuk menetukan kemiringan (*Skewness*) dan kurtosis kita dapat menggunakan momen ketiga dan momen keempat.

3.4. Penaksiran paramenter model AR(1)

Metode yang digunakan untuk menaksir parameter model AR(1) adalah dengan menggunakan metode likelihood maksimum Untuk menentukan fungsi likelihood dari model AR(1) terlebih dahulu ditentukan fungsi peluang dari model AR(1). Fungsi peluang model AR(1) bisa ditentukan dari definisi model AR(1), yaitu sebagai berikut;

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

dimana X_t dan ε_t saling bebas maka diperoleh $X_t|X_{t-1} \sim N(\alpha_1 X_{t-1}, \sigma^2)$, sehingga diperoleh fungsi peluang dari model AR(1) sebagai berikut ini:

$$f_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t-(\alpha_1 x_{t-1})}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Untuk menaksir parameter dengan menggunakan metode likelihood maksimum, didefinisikan fungsi likelihoodnya, yaitu:

$$L\big(\alpha_1,\sigma^2|(x_t|x_{t-1})\big) = \prod_{t=2}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t-(\alpha_1 x_{t-1})}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{t=2}^{n} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t-(\alpha_1 x_{t-1})}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Titik maksimum merupakan salah satu titik stasioner, yaitu titik dimana turunan pertama dari fungsi likelihood bernilai 0. Karena fungsi log merupakan fungsi yang monoton naik murni, maka nilai parameter yang memaksimumkan fungsi likelihood sama dengan nilai parameter yang memaksimumkan fungsi log-likelihood, dimana fungsi log-likelihood didefinisikan sebagai berikut :

$$l = log\left(L\big(\alpha_1,\sigma^2|(x_t|x_{t-1})\big)\right)$$

$$= log\left(\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{t=2}^{n} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t-\alpha_1 x_{t-1}}{\sigma}\right)^2\right\}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left\{log(2\pi) + log(\sigma^2) + \left(\frac{x_t-(\alpha_1 x_{t-1})}{\sigma}\right)\right\}$$

Selanjutnya dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood terhadap σ ialah :

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = \frac{\partial log\left(L\big(\alpha_1,\sigma^2|(x_t|x_{t-1})\big)\right)}{\partial\sigma}$$

$$= \frac{\partial\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left\{log(2\pi)+log(\sigma^2)+\left(\frac{x_t-\alpha_1 x_{t-1}}{\sigma}\right)^2\right\}\right)}{\partial\sigma}$$

$$0 = -\frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^3} + \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t-\alpha_1 x_{t-1})^2}{\sigma^3}$$

Sehingga diperoleh penaksir parameter σ^2, yaitu :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t-\hat{\alpha}x_{t-1})^2}{n-1}$$

Selanjutnya akan ditentukan turunan parsial pertama dari fungsi log-likelihood terhadap parameter α, yaitu :

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{\partial log\left(L\big(\alpha,\sigma^2|(x_t|x_{t-1})\big)\right)}{\partial\alpha}$$

$$= \frac{\partial\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left\{log(2\pi)+log(\sigma^2)+\left(\frac{x_t-\alpha_1 x_{t-1}}{\sigma}\right)^2\right\}\right)}{\partial\alpha}$$

$$0 = \sum_{t=2}^{n} x_{t-1}\left(\frac{x_t-\alpha_1 x_{t-1}}{\sigma^2}\right)$$

Sehingga diperoleh penaksir untuk parameter α_1, yaitu :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=2}^{n} x_{t-1}x_t}{\sum_{t=2}^{n} x_{t-1}^2}$$

Berikut ini perhitungan turunan parsial kedua dari fungsi log-likelihood terhadap σ.

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma^2} = \frac{\partial^2 log\left(L\big(\alpha_1,\sigma^2|(x_t|x_{t-1})\big)\right)}{\partial\sigma^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(-\frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^3} + \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t-\alpha_1 x_{t-1})^2}{\sigma^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} = \frac{(n-1)\sigma^2 - 3\sum_{t=2}^{n}(x_t - \alpha_1 x_{t-1})^2}{\sigma^4}$$

Turunan parsial kedua dari fungsi log-likelihood terhadap parameter α ialah :

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 log\left(L\left(\alpha_1, \sigma^2 | (x_t | x_{t-1})\right)\right)}{\partial \alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sum_{t=2}^{n}\frac{x_{t-1}x_t - \alpha_1 x_{t-1}^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} = \sum_{t=2}^{n} -\left(\frac{x_{t-1}^2}{\sigma^2}\right)$$

Turunan kedua dari fungsi log-likelihood terhadap parameter α_1 dan σ ialah :

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial \alpha_1} = \frac{\partial^2 log\left(L\left(\alpha_1, \sigma^2 | (x_t | x_{t-1})\right)\right)}{\partial \sigma \partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial \alpha_1} = \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \alpha_1}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left\{log(2\pi) + log(\sigma^2) + \left(\frac{x_t - \alpha_1 x_{t-1}}{\sigma}\right)^2\right\}\right)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sum_{t=2}^{n}\frac{x_{t-1}x_t - \alpha_1 x_{t-1}^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial \alpha_1} = \frac{-2}{\sigma^3}\sum_{t=2}^{n}(x_{t-1}x_t - \alpha_1 x_{t-1}^2)$$

Apabila turunan parsial kedua dari fungsi log-likelihood terhadap σ dievaluasi pada titik $(\hat{\alpha}, \widehat{\sigma^2})$, maka diperoleh :

$$\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}\middle| (\hat{\alpha}, \widehat{\sigma^2})\right) = \frac{(n-1)^2}{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \hat{\alpha}x_{t-1})^2} - \frac{3(n-1)^2\sum_{t=2}^{n}(x_t - \hat{\alpha}x_{t-1})^2}{(\sum_{t=2}^{n}(x_t - \hat{\alpha}x_{t-1})^2)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}\middle| (\hat{\alpha}, \widehat{\sigma^2})\right) = \frac{-2(n-1)^2}{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \hat{\alpha}x_{t-1})^2}$$

Dapat dilihat bahwa turunan kedua dari fungsi log-likelihood terhadap σ dievaluasi pada titik $(\hat{\alpha}, \widehat{\sigma^2})$ selalu bernilai negative.

Nilai D,yaitu nilai diskriminan dari fungsi log-likelihood model AR(1) ialah;

$$D = \frac{(n-1)\sigma^2 - 3\sum_{t=2}^{n}(x_t - \hat{\alpha}x_{t-1})^2}{\sigma^4} \times \left(\sum_{t=0}^{n} -\left(\frac{x_{t-1}^2}{\sigma^2}\right)\right) - \left(\left(\frac{-2}{\sigma^3}\right)\sum_{t=0}^{n}(x_t - \hat{\alpha}x_{t-1})\right)^2$$

Dapat dilihat bahwa ketika *D* dievaluasi pada titik $(\hat{\alpha}, \widehat{\sigma^2})$, nilai dari *D* cukup sulit ditentukan positif atau negatifnya. Dengan demikian, uji titik maksimum dilakukan dengan membandingkan nilai parameter yang diperoleh berdasaskan grafik fungsi log-likelihhood dengan nilai taksiran parameter MLE secara anlaitik.

3.5. Simulasi data model AR(1)

Akan disimulasikan data berdasarkan model AR(1) dengan parameter $\alpha = 0.4$ dan $\alpha^2 = 0.1$. Kemudian, dari hasil simulasi akan dibandingkan nilai taksiran parameter dari menggunakan konsep maksimum likelihood maksimum yang didapatkan secara numerik dan secara analitik dengan jumlah sampel 100 dan 500.

Berikut simulasi estimasi nilai parameter model AR(1) dengan menggunakan MATLAB.

```
clc
clear all

%%==PROGRAM PENAKSIR PARAMETER MODEL AR(1) DENGAN MLE==%%

alpha    = input('alpha          = ');
variansi = input('variansi       = ');
n        = input('banyaknya data = ');

format long
model arima('Constant',0,'AR',{alpha}'Variance',variansi);
X = simulate(model,n);

i=1;
for alpha  = -1:0.001:1
    a(i,1) = alpha;
    var    = 0;
    for t  = 2:n
  var = var + (X(t) - alpha* X(t1))^2;
    end
  variansi(i,1) = var/(n-1);
    l = 0;
 for t = 2:n
    l = l + log(2*pi) + log(variansi(i,1)) + ...
(variansi(i,1)*(X(t) - alpha*X(t-1))^2);
    end
 likelihood(i,1) = l*(-0.5);
  i = i+1;
end

%Perhitungan taksiran parameter secara numerik
[likemaks,lokasi] = findpeaks(likelihood);
alphatopi = a(lokasi)
vartopi   = variansi(lokasi)

%Perhitungan taksiran parameter secara analitik
[alphatopimle1,alphatopimle2,vartopimle]=deal(0);
for t=2:n
    alphatopimle1=alphatopimle1+ X(t-1)*X(t);
end
for t=2:n
    alphatopimle2=alphatopimle2+ X(t-1)^2;
end
alphatopimle=alphatopimle1/alphatopimle2
for t=2:n
    vartopimle=vartopimle+(X(t)-alphatopimle*X(t-1))^2;
end
vartopimle=vartopimle/(n-1)

plot(a,likelihood)
xlabel('\alpha')
ylabel('Log(L(\alpha,\sigma^2|(x t|x {t-1})))')
title('Grafik Fungsi Loglikelihood')
```

Untuk lebih jelasnya hasil simulasi dapat dilihat pada table berikut ini:

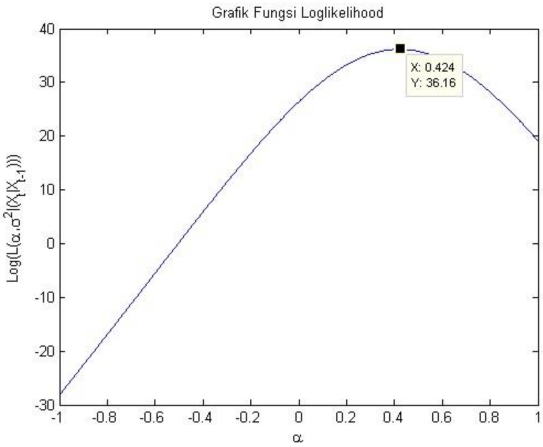
Tabel 1. Perbandingan nilai taksiran parameter secara numerik dan analitik

Jumlah Sample	$\hat{\alpha}$		$\widehat{\sigma^2}$	
	Numerik	**Analitik**	**Numerik**	**Analitik**
100	0.424	0.4236	0.0762	0.0762
500	0.483	0.4834	0.0982	0.0982

Dari table diatas, dapat dilihat bahwa nilai taksiran secara numerik dan analitik hampir sama. Perbedaan diakibatkan karena adanya penentuan lebar selang antar titik yang akan dievaluasi pada metode numerik. Dapat dikatakan bahwa nilai $\hat{\alpha}$ dan $\widehat{\sigma^2}$ yang diperoleh dengan menggunakan turunan pertama dari fungsi log-likelihood merupakan titik maksimum.

Untuk lebih jelasnya, berikut ini disajikan grafik dari fungsi log-likelihood untuk model AR(1).

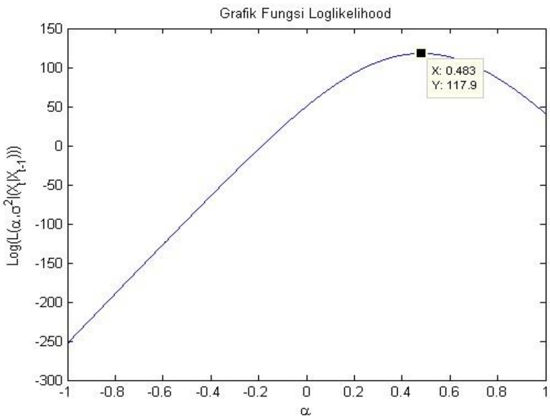
- Untuk n=100



Gambar 1. Plot fungsi Log-likelihood Model AR(1) untuk n=100.

Dari gambar 1 diatas terlihat bahwa nilai parameter α yang memaksimumkan fungsi likelihood adalah 0.423.

- Untuk n=500



Gambar 2. Plot fungsi Log-likelihood Model AR(1) untuk n=500.

Dari gambar 2 diatas terlihat bahwa nilai parameter α yang memaksimumkan fungsi likelihood adalah 0.483.

4. Kesimpulan Dan Saran

Dari hasil penyelesainya dapat disimpulkan bahwa, estimasi parameter model AR(1) dapat dilakukan dengan menggunakan metode maksimum likelihood Estimator (MLE). Dari hasil simulasi secara analitik untuk jumlah sampel 100 diperoleh $\hat{\alpha} = 0.4236$ dan $\widehat{\sigma^2} = 0.0762$, secara numerik diperoleh $\hat{\alpha} = 0.424$ dan $\sigma^2 = 0.0762$. Selanjutnya untuk jumlah sampel 500 dari hasil simulasi secara analitik diperoleh $\hat{\alpha} = 0.4834$ dan $\widehat{\sigma^2} = 0.0982$, secara numerik diperoleh $\hat{\alpha} = 0.483$ dan $\sigma^2 = 0.0982$. Secara analitik dan numerik nilai penaksiran parameter untuk hampir sama, tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan.

5. Ucapan Terima Kasih

Pada artikel ini penulis ucapkan terima kasih kepada pembimbing, teman – teman alumni s2 matematika dan aktuaria serta pihak-pihak yang telah terlibat dalam membantu penulisan ini.

Daftar Pustaka

[1] Ekananda, Mahyus. 2014. *Analisis Data Time Seies*. 1st ed. Jakarta: Mitra Wacana Media.
[2] Walpole,R dan Myers, RH. 2012. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Macmillan Publishing Co.,Inc.
[3] Brockwel, P. J. dan A.Davis. 2001. *Introduction to Time Series and Forecasting*. USA: Springer.
[4] Cryer, J. D. 1992. *Time Serier Analysis*, Boston: PWS Publisher.
[5] Miller, I. Miller, M. 2004. *Mathematical Statistics with Applications.* 7th ed. Prentice Hall.
[6] Suyitno. 2011. *Pengestimasian Parameter Model Autoreggressive pada Analysis Deret WaktuUnivariat.* **ISSN 1412-498X** : 117-132
[7] Sari, Nelfa. *Pendugaan Parameter Model Autiregressive pada Deret Waktu*. **ISSN 2303-291X** : 28-37. Vol.3, No. 4.

[8] Sari, I, dan Novkaniza, F. *Estimasi Parameter Autoregressive dengan Fungsi Marginal Likelihood.* Universitas Indonesia.

[9] Engle, Robert, F. 1982. *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of The Variance of United Kingdom Inflation.* Economterica: Vol.50, No. 4.

[10] Frances, P. D. 1999. *Forcasting with Periodic Autoregressive Time Series.* Netherlands: Eramus Univercity Rotterdam.