

KEKONTINUAN PADA RUANG NORM-2 CONE

CONTINUITY ON CONE 2-NORM SPACES

Ilham Dangu Rianjaya^{1,2§}, Shelvi Ekariani³, Haripamyu Haripamyu⁴

¹Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia [ilham.rianjaya@uinib.ac.id]

²Departemen Matematika dan Data Sains, Universitas Andalas

³Departemen Matematika dan Data Sains, Universitas Andalas, Indonesia [shelviekarani@sci.unand.ac.id]

⁴Departemen Matematika dan Data Sains, Universitas Andalas, Indonesia [haripamyu@gmail.com]

[§]Corresponding Author

Received 18th Jun 2025; Accepted 20th Jun 2025; Published 30th Jun 2025;

Abstrak

Ruang norm-2 *cone* adalah pengembangan ruang norm-2 dan ruang norm *cone*. Pada artikel ini, didefinisikan fungsi kontinu pada ruang norm-2 *cone*. Tujuan dari penelitian adalah untuk membuktikan kriteria barisan untuk kekontinuan dan kekontinuan secara statistik dari fungsi pada ruang norm-2 *cone*.

Kata Kunci: Fungsi kontinu, Fungsi kontinu secara statistik, kriteria kekonvergenan, ruang norm-2 *cone*.

Abstract

Cone 2-normed spaces are developement of 2-normed spaces and cone normed spaces. On this paper, we will introduce continuous function notion on cone 2-normed spaces. Afterward, we will prove the convergence criterion and statistical continuity on continuous functions on cone 2-normed spaces.

Keywords: cone 2-normed spaces, continuous functions, convergence criterion, statistical continuity

1. Pendahuluan

Norm adalah fungsi pada ruang vektor yang memenuhi sifat kepositifan, linearitas dan ketaksamaan segitiga. Norm dapat dipandang sebagai fungsi untuk mengukur panjang dari vektor. Ruang vektor yang dilengkapi dengan norm, disebut sebagai ruang norm atau ruang bernorm (*normed space*).

Salah satu pengembangan dari norm, adalah norm-2 yang diperkenalkan oleh [1]. Alih-alih sebagai penghitung panjang, norm-2 dapat dipandang sebagai penghitung luas dari dua vektor. Selain itu, [2] memperkenalkan norm

cone, yaitu norm dengan daerah hasilnya berupa perumuman himpunan bilangan real tak negatif (*cone*). Lebih jauh, [3] mengkombinasikan kedua konsep sebelumnya menjadi norm-2 *cone*.

Selain itu, [4] memperkenalkan konsep kekonvergenan secara statistik. Tipe kekonvergenan ini menjadi perumuman dari kekonvergenan biasa, karena memandang jumlah suku-suku yang melebihi suatu batasan (ϵ). Konsep ini kemudian dikembangkan menjadi kekontinuan fungsi secara statistik oleh [5]. Selain itu, [6] juga memperkenalkan tipe

Pada penelitian ini, akan dikaji sifat kekontinuan pada ruang norm-2 cone, yaitu kekontinuan secara barisan dan kekontinuan secara statistik.

2. Landasan Teori

Pada ruang Banach E , himpunan P disebut *cone* apabila (1) P tak kosong, tertutup dan $P \neq \{\theta\}$; (2) Untuk setiap bilangan real tak negatif α dan β , dan untuk setiap $x, y \in P$, berlaku $\alpha x + \beta y \in P$; (3) Jika $x \in P$ dan $-x \in P$ maka $x = \theta$. Dalam hal ini, θ adalah unsur nol di E . Urutan parsial " $\leq$ " pada P didefinisikan sebagai $x \leq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, dan $x < y$ jika dan hanya jika $x \leq y$ dan $x \neq y$. Selain itu digunakan $x \ll y$ untuk menyatakan bahwa $y - x \in \text{Int } P$ [7].

Definisi 2.1 [3] Misal X adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Misal juga $(E, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $P \subseteq E$ adalah *cone*. Didefinisikan fungsi norm-2 cone $\|\cdot, \cdot\|_C : X \times X \rightarrow (E, P, \|\cdot\|)$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- (N2C-1) $\|x, y\|_C \geq \theta$ untuk setiap $x, y \in X$;
- (N2C-2) $\|x, y\|_C = \theta$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linear,
- (N2C-3) $\|x, y\|_C = \|y, x\|_C$ untuk setiap $x, y \in X$,
- (N2C-4) $\|kx, y\|_C = |k| \|x, y\|_C$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $k \in \mathbb{R}$,
- (N2C-5) $\|x, y + z\|_C \leq \|x, y\|_C + \|x, z\|_C$ untuk setiap $x, y \in X$.

Apabila X dilengkapi dengan $\|\cdot, \cdot\|_C$ maka $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$ disebut ruang norm-2 cone..

Definisi 2.3 [3] Misal $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$ adalah ruang

norm-2 cone. Barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke x_0 di X jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0, a\|_C = 0$ untuk $a \in X$ tak nol.

3. Hasil Dan Pembahasan

Definisi 3.1 Misal $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$ adalah ruang norm-2 cone. Barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke x_0 secara statistik apabila untuk setiap $\varepsilon \gg 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_0, a\|_C \geq \varepsilon\}| = 0$ untuk setiap $a \in X$ tak nol.

Jika suatu barisan di ruang norm-2 cone $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$ konvergen, maka barisan tersebut juga konvergen secara statistik, karena $\{k \geq n : \|x_k - x_0, a\|_C \geq \varepsilon\}$ adalah himpunan berhingga.

Definisi 3.2 Misal $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$ adalah ruang norm-2 cone dan $f: X \rightarrow X$, serta sebarang $a, b \in X$ tak nol. Fungsi f dikatakan kontinu di $x_0 \in X$ apabila untuk setiap $\varepsilon \gg \theta$, terdapat $\delta \gg \theta$ sedemikian sehingga untuk setiap $\|x - x_0, a\|_C \ll \delta$ berlaku $\|f(x) - f(x_0), b\|_C \ll \varepsilon$.

Berikut ini beberapa sifat terkait kekontinuan fungsi pada ruang norm-2 cone.

Teorema 3.1 Misal $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$ adalah ruang norm-2 cone $f: X \rightarrow X$. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

1. Fungsi f kontinu di x_0 ,
2. Untuk setiap barisan (x_n) di X yang konvergen ke $x_0 \in X$ maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(x_0)$ di X .

BUKTI. (1) $\Rightarrow$ (2) Misalkan f kontinu di x_0 maka untuk setiap $\varepsilon \gg \theta$, dan $a \in X$ tak nol ada $\delta \gg \theta$ sedemikian sehingga untuk $x \in X$,

berlaku $\|f(x) - f(x_0), b\|_C \ll \varepsilon$ untuk $b \in X$ tak nol dan $\|x - x_0, y\|_C \ll \delta$. Ambil sebarang barisan (x_n) yang konvergen ke x_0 , dengan kata lain $\|x_n - x, a\|_C \rightarrow \theta$ saat $n \rightarrow \infty$. Akibatnya untuk n yang cukup besar, diperoleh $\|x_n - x, a\|_C \ll \delta$ untuk $\delta \gg \theta$ dan $b \in X$. Karena f kontinu di x_0 , diperoleh $\|f(x_n) - f(x_0), b\|_C \ll \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon \gg \theta$. Hal ini berarti $(f(x_n))$ konvergen ke $f(x_0)$ di Y .

(2) $\Rightarrow$ (1) Misal f tidak kontinu di x_0 . Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $b \in X$ tak nol, bentuk barisan (x_n) dengan $\|x_n - x_0, a\| \ll \delta_n$ untuk $a \in X$ tak nol dan $\delta_n \in P$, serta suatu $x_0 \in X$. Akibatnya diperoleh barisan (x_n) konvergen ke x . Namun, $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ yang berarti $(f(x_n))$ tidak konvergen ke $f(x_0)$. ■

Fungsi f yang memenuhi Teorema 3.1 disebut sebagai fungsi kontinu secara barisan (*sequentially continuous function*).

Definisi 3.3 Misal $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$ adalah ruang norm-2 cone dan $f: X \rightarrow X$. Fungsi f dikatakan kontinu di $x_0 \in X$ secara statistik apabila untuk setiap (x_n) barisan yang konvergen ke x_0 secara statistik, mengakibatkan $(f(x_n))$ juga konvergen ke $f(x_0)$ secara statistik.

Teorema 3.2 Misal $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$ adalah ruang norm-2 cone dan $f: X \rightarrow X$. Jika f kontinu di $x_0 \in X$, maka f kontinu di x_0 secara statistika.

Bukti Misalkan f kontinu di $x_0 \in X$ maka untuk setiap $\varepsilon \gg \theta$, dan $a \in X$ ada $\delta \gg \theta$ sedemikian sehingga berlaku $\|f(x) - f(x_0), b\|_C \ll \varepsilon$ untuk $\|x - x_0, y\|_C \ll \delta$ dan $b \in X$. Ambil sebarang

barisan (x_n) yang konvergen secara statistik ke x_0 , maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_0, a\|_C \geq \delta\}| = 0$. Hal ini berarti jumlah suku-suku (x_n) yang memenuhi $\|x_n - x, a\|_C \geq \delta$ kurang dari n , dan sisanya memenuhi $\|x_n - x_0, a\|_C \ll \delta$. Hal ini mengakibatkan jumlah suku-suku barisan $(f(x_n))$ yang memenuhi $\|f(x_n) - f(x_0), b\|_C \geq \varepsilon$ juga kurang dari n . Akibatnya $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{n \in \mathbb{N} : \|f(x_n) - f(x_0), b\|_C \geq \varepsilon\}| = 0$. Dengan kata lain, barisan $(f(x_n))$ konvergen secara statistik ke $f(x_0)$.

Akibat 3.1 Misal f fungsi pada ruang norm-2 cone $(X, \|\cdot, \cdot\|_C)$. Jika f fungsi kontinu di $x_0 \in X$, maka f kontinu secara statistik di $x_0 \in X$.

Bukti Dengan menggunakan Teorema 3.1 dan Teorema 3.2, jelas bahwa suatu fungsi f kontinu di x_0 juga kontinu secara statistik di x_0 .

4. Kesimpulan Dan Saran

Berdasarkan hasil yang telah dipaparkan dapat disimpulkan bahwa pada ruang norm-2 cone, berlaku kekontinuan fungsi, kekontinuan secara barisan dan kekontinuan secara statistik.

5. Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada semua pihak yang terlibat dalam penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] S. Gähler, "Lineare 2-normierte Räume," *Math. Nachrichten*, vol. 28, no. 1-2, hlm. 1-43, 1964.
- [2] M. E. Gordji, M. Ramezani, H. Baghani, dan H. Khodaei, "Cone normed spaces," *ArXiv Prepr. ArXiv09120960*, 2009.

- [3] A. Sahiner dan T. Yigit, “2–Cone Banach spaces and fixed point theorem,” dalam *AIP Conference Proceedings*, Kos, Greece: AIP, 2012, hlm. 975–978. doi: 10.1063/1.4756305.
- [4] J. A. Fridy, “On statistical convergence,” *Analysis*, vol. 5, no. 4, hlm. 301–314, 1985.
- [5] İ. Osmanoglu dan E. Dündar, “A Note on Statistical Continuity of Functions,” *Fundam. J. Math. Appl.*, vol. 7, no. 4, hlm. 212–217, Des 2024, doi: 10.33401/fujma.1443574.
- [6] H. Çakalli dan S. Ersan, “New types of continuity in 2-normed spaces,” *Filomat*, vol. 30, no. 3, hlm. 525–532, 2016, doi: 10.2298/fil1603525c.
- [7] K. Li, S. Lin, dan Y. Ge, “On statistical convergence in cone metric spaces,” *Topol. Its Appl.*, vol. 196, hlm. 641–651, 2015.