

KERANGKA KERJA DIFFERENSIAL RICCATI UNTUK ROBUST KALMAN FILTERING PADA KETIDAKPASTIAN INTERVAL SEMI-TAK HINGGA

DIFFERENTIAL RICCATI FRAMEWORK FOR ROBUST KALMAN FILTERING UNDER SEMI-INFINITE INTERVAL UNCERTAINTIES

Budi Rudianto[§], Muhafzan², Mahdhivan Syafwan³ dan Syafrizal Sy⁴

^{1,2,3,4}Departemen Matematika dan Sains Data Universitas Andalas [Email: budirudianto@sci.unand.ac.id]

[§]*Corresponding Author*

Received 30th Jul 2025; Accepted 10th Nov 2025; Published 1st Dec 2025;

Abstrak

Penelitian ini mengusulkan pendekatan baru untuk merancang Penyaringan Kalman yang Kuat (*Robust Kalman Filtering*, RKF) pada sistem waktu kontinu yang menghadapi ketidakpastian parametris pada model dinamis, disertai gangguan eksternal dan noise pengukuran yang berlaku pada interval waktu semi-tak hingga. Pada pendekatan ini, digunakan teori $\mathcal{H}_\infty$ untuk mengurangi pengaruh gangguan dan noise terhadap akurasi estimasi. Persamaan diferensial Riccati dirumuskan sebagai dasar perancangan filter, di mana gain filter diturunkan dari solusi Riccati yang memenuhi syarat kestabilan asimtotik. Hasil utama menunjukkan bahwa solusi tersebut eksis, terbatas dan stabil, serta mampu menjaga kestabilan kesalahan estimasi meskipun terdapat ketidakpastian model. Studi kasus numerik pada sistem termal dua zona memperlihatkan bahwa filter yang diusulkan lebih tangguh, karena mampu meredam osilasi kesalahan, mempertahankan konvergensi yang lebih cepat, dan menjaga akurasi estimasi pada kondisi ketidakpastian parameter dan noise non-Gaussian dibandingkan Kalman Filter klasik. Kontribusi utama penelitian ini terletak pada integrasi pendekatan $\mathcal{H}_\infty$ dengan kerangka diferensial Riccati dalam domain waktu kontinu pada interval semi-tak hingga, yang memperluas konsep estimasi robust yang belum banyak dikaji sebelumnya. Keterbatasan dari studi ini adalah model masih linear dan jenis ketidakpastian yang terbatas. Pemilihan model linear dilakukan untuk memungkinkan analisis stabilitas dan eksistensi solusi yang rigor dalam kerangka semi-tak hingga, yang menjadi prasyarat penting untuk pengembangan ke sistem nonlinier. Penelitian lanjutan dapat mengembangkan pendekatan ini untuk sistem nonlinier atau berbasis adaptif.

Kata Kunci: Penyaringan Kalman yang Kuat, Diferensial Riccati, Ketidakpastian Model, Interval Semi-Tak Hingga, Estimasi Keadaan.

Abstract

This study proposes a new approach for designing Robust Kalman Filtering (RKF) in continuous-time systems that face parametric uncertainty in dynamic models, accompanied by external disturbances and noise measurements, operating over semi-infinite time intervals. The $\mathcal{H}_\infty$ theory is employed to minimize the effects of disturbances and noise on estimation accuracy. A Riccati differential equation is formulated as the basis for the filter design, where the filter gain is derived from the Riccati solution that satisfies

asymptotic stability conditions. The main results demonstrate that the solution exists, is bounded, and remains stable, ensuring the stability of the estimation error even under model uncertainty. A numerical case study on a two-zone thermal system shows that the proposed filter is more robust than the classical Kalman Filter, as it effectively suppresses error oscillations, achieves faster convergence, and maintains estimation accuracy under parameter uncertainty and non-Gaussian noise conditions. The main contribution of this work lies in integrating the $\mathcal{H}_\infty$ approach with the Riccati differential framework in continuous-time and semi-infinite settings, thereby extending the robust estimation concept that has been rarely explored. The study's limitation lies in using a linear model and a restricted type of uncertainty, chosen to allow a rigorous analysis of stability and solution existence. Future research should extend this framework to nonlinear or adaptive systems for broader applicability.

Keywords: Robust Kalman Filtering, Differential Riccati Equation, Model Uncertainty, Semi-Infinite Interval, State Estimation.

1. Pendahuluan

Estimasi keadaan merupakan komponen kunci dalam sistem kontrol modern yang bertujuan memperoleh informasi internal sistem dari pengukuran terbatas[1], [2]. Kalman Filter telah menjadi alat utama dalam estimasi keadaan. Keoptimalannya ini dicapai di bawah asumsi noise bersifat Gaussian dan model sistem yang diketahui secara tepat[3]–[5]. Namun, dalam praktik nyata, banyak sistem menghadapi ketidakpastian model, gangguan eksternal, dan noise dengan struktur statistik yang tidak pasti[6]–[8]. Hal ini menjadikan pendekatan konvensional seperti Kalman Filter menjadi kurang efektif dalam menjamin kestabilan dan performa estimasi[9]. Oleh karena itu, dibutuhkan pendekatan yang lebih kuat terhadap ketidakpastian, salah satunya adalah Penyaringan Kalman yang Kuat (*Robust Kalman Filtering*, RKF) berbasis teori $\mathcal{H}_\infty$, yang dirancang untuk meminimalkan pengaruh terburuk dari gangguan terhadap kesalahan estimasi[9].

Sebagian besar penelitian RKF yang telah ada berfokus pada sistem diskret atau sistem waktu kontinu dengan interval waktu hingga atau tak hingga sepenuhnya[10],[11]. Padahal, banyak

aplikasi nyata, seperti sistem energi terdistribusi, kendaraan otonom, dan pemantauan lingkungan, bekerja dalam kerangka waktu semi-tak hingga, yaitu mulai dari waktu awal tertentu dan berlangsung tanpa batas waktu yang pasti[8]. Meskipun demikian, perancangan RKF pada interval waktu semi-tak hingga menghadapi beberapa tantangan matematis utama. Pertama, diperlukan pembuktian eksistensi solusi PD Riccati yang tetap terbatas (*bounded*) dan stabil secara asimtotik sepanjang interval $[0, \infty)$. Pada sistem dengan ketidakpastian, kondisi ini tidak dapat dijamin hanya dengan observabilitas pasangan (A, C) seperti pada Kalman Filter klasik. Kedua, analisis stabilitas sistem kesalahan estimasi harus mempertimbangkan pengaruh kumulatif dari ketidakpastian model dan gangguan yang persisten, dimana pendekatan *worst-case* berbasis $\mathcal{H}_\infty$ perlu diintegrasikan dengan kerangka solusi Riccati. Tantangan ketiga terletak pada penurunan bound performa (*performance level*) γ yang menjamin kestabilan tanpa membuat solusi filter menjadi terlalu konservatif. Ketiga aspek inilah yang coba diatasi melalui formulasi

diferensial Riccati dalam studi ini. Pada penelitian sebelumnya oleh B. Rudianto et al (2025) telah menunjukkan kestabilan dan kinerja RKF pada interval waktu tak hingga, namun belum mempertimbangkan aspek ketidakpastian model dan estimasi robust[9]. Tanpa pendekatan robust yang dirancang khusus untuk interval semi-tak hingga, sistem estimasi pada aplikasi jangka panjang seperti pemantauan lingkungan dan sistem otonom berisiko mengalami degradasi performa yang gradual atau bahkan ketidakstabilan seiring waktu[12].

Berdasarkan kajian literatur terkini, sebagian besar penelitian tentang *Robust Kalman Filtering (RKF)* masih berfokus pada sistem diskret atau sistem waktu kontinu dengan interval waktu hingga atau tak hingga sepenuhnya[10], [13]. Padahal, banyak sistem nyata seperti sistem energi terdistribusi, kendaraan otonom, dan pemantauan lingkungan bekerja dalam kerangka waktu semi-tak hingga, yaitu dimulai dari waktu awal tertentu dan berlangsung tanpa batas waktu yang pasti. Selain itu, sebagian besar studi sebelumnya hanya mempertimbangkan ketidakpastian kecil atau tidak secara eksplisit memasukkan struktur *norm-bounded uncertainty* dalam formulasi matematisnya. Oleh karena itu, terdapat kesenjangan penelitian (*research gap*) yang signifikan dalam pengembangan RKF berbasis teori $\mathcal{H}_\infty$ (*H-infinity*) yang secara matematis mampu menjamin kestabilan dan kinerja estimasi pada sistem waktu kontinu dengan interval semi-tak hingga.

Oleh karena itu, artikel ini bertujuan mengembangkan kerangka differensial Riccati

yaitu suatu formulasi matematis berbasis *Differential Riccati Equation (DRE)* yang digunakan untuk menentukan *gain filter* secara dinamis melalui solusi persamaan Riccati dalam domain waktu kontinu. Kerangka ini memungkinkan pembaruan nilai kovarians kesalahan estimasi secara berkelanjutan, sehingga filter mampu beradaptasi terhadap perubahan dinamika sistem dan ketidakpastian model. Pendekatan tersebut diterapkan untuk merancang RKF pada sistem waktu kontinu dengan ketidakpastian *norm-bounded* dan interval semi-tak hingga, guna menjamin kestabilan dan ketangguhan estimasi dalam jangka waktu yang tidak terbatas.

Secara khusus, dirumuskan persamaan Riccati tangguh berdasarkan *bounded real lemma* yaitu prinsip yang memberikan kondisi perlu dan cukup bagi kestabilan sistem serta batasan energi maksimum respon terhadap gangguan eksternal. Berdasarkan lemma ini, dirancang estimator dengan *gain filter* $L(t)$ yang diturunkan dari solusi Riccati $P(t)$. Selanjutnya, dilakukan analisis eksistensi dan kestabilan solusi, serta melakukan evaluasi numerik terhadap performa filter yang diusulkan pada sistem termal dua zona.

Kontribusi utama penelitian ini terletak pada integrasi pendekatan $\mathcal{H}_\infty$ dengan kerangka Riccati differensial waktu kontinu dalam interval semi-tak terbatas, yang masih jarang dibahas dalam literatur estimasi robust. Artikel ini diharapkan dapat memberikan kontribusi signifikan. Selain memberikan kontribusi teoretis dalam pengembangan kerangka kerja differensial

Riccati berbasis teori $\mathcal{H}_\infty$ untuk sistem waktu kontinu dengan ketidakpastian interval semi-tak hingga, penelitian ini juga memiliki manfaat langsung secara praktis. Pendekatan yang diusulkan dapat digunakan untuk meningkatkan keandalan estimasi keadaan pada sistem-sistem dinamis nyata yang beroperasi dalam jangka waktu panjang dan menghadapi variasi parameter yang sulit dimodelkan secara pasti. Contohnya mencakup sistem pemantauan suhu ruang termal multi-zona, pengelolaan energi bangunan cerdas, kendali proses industri, serta estimasi keadaan kendaraan otonom yang memerlukan kestabilan estimasi jangka panjang di bawah kondisi sensor yang tidak ideal. Dengan kerangka ini, perancang sistem dapat memperoleh filter yang tangguh, stabil, dan mudah diimplementasikan, tanpa harus bergantung sepenuhnya pada asumsi Gaussian atau model sistem yang presisi.

Secara keseluruhan, artikel ini tidak hanya memperluas pemahaman teoritis tentang eksistensi dan kestabilan solusi Riccati pada domain semi-tak hingga, tetapi juga menawarkan pendekatan matematis yang siap diterapkan untuk menjaga keandalan estimasi pada sistem nyata yang mengandung ketidakpastian. dalam bidang estimasi keadaan sistem tak pasti dan menjadi dasar bagi pengembangan RKF adaptif di masa mendatang.

Adapun sistematika penulisan artikel ini disusun sebagai berikut: Bagian 2 Landasan Teori. Bagian 3 Analisis eksistensi dan kestabilan dari kerangka differensial Riccati yang kuat berbasis pendekatan $\mathcal{H}_\infty$. Bagian 4 membahas simulasi dan analisis matematis untuk

mengevaluasi kinerja filter yang diusulkan. Terakhir, Bagian 5 memuat kesimpulan dan arah penelitian lanjutan.

2. Landasan Teori

Pada penelitian ini mencakup teori dasar sistem linier waktu kontinu, penyaringan Kalman, formulasi $\mathcal{H}_\infty$ untuk estimasi robust, serta eksistensi dan kestabilan solusi differensial Riccati pada interval semi-tak hingga.

2.1 Sistem Linier Tak Pasti dan Formulasi Ketidakpastian

Sistem linier waktu kontinu yang mengandung ketidakpastian biasanya dimodelkan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))u(t) \\ &\quad + w(t), \\ y(t) &= Cx(t) + v(t),\end{aligned}\tag{1}$$

dengan $\Delta A(t), \Delta B(t)$ adalah gangguan atau variasi parameter tak pasti. Ketidakpastian tersebut umumnya diformulasikan sebagai ketidakpastian *norm-bounded*:

$$\begin{aligned}[\Delta A(t) \ \Delta B(t)] &= D(t)F(t)E, \\ \text{dengan } \|F(t)\| &\leq 1,\end{aligned}\tag{2}$$

yang banyak digunakan dalam *robust control* dan *robust filtering* [14].

2.2 Penyaringan Kalman dan Pendekatan $\mathcal{H}_\infty$

Kalman Filter dirancang untuk memberikan estimasi keadaan optimal dalam pengertian *mean square error* ketika noise pada proses dan pengukuran bersifat Gaussian. Namun, pada kasus noise non-Gaussian dan ketidakpastian

parameter, digunakan pendekatan $\mathcal{H}_\infty$ untuk merancang filter kuat yang meminimalkan pengaruh total energi gangguan terhadap kesalahan estimasi.

Definisi 2.1 (Kriteria Estimasi $\mathcal{H}_\infty$):

Sistem estimasi dikatakan memenuhi kriteria $\mathcal{H}_\infty$ jika untuk semua sinyal gangguan tak nol $w(t), v(t)$ kesalahan estimasi $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ memenuhi:

$$\frac{\int_0^\infty [e^T(t) Q e(t)] dt}{\int_0^\infty [(w^T(t) w(t) + v^T(t) v(t))] dt} < \gamma^2, \quad (3)$$

dengan $Q > 0$ dan $\gamma > 0$ adalah batas performa (*disturbance attenuation level*).

Pendekatan ini digunakan secara luas dalam *robust filtering* untuk menjamin bahwa estimator tidak terlalu sensitif terhadap noise dan ketidakpastian [15].

2.3 Differensial Riccati dan Solusi Semi-Tak Hingga

Desain filter kuat (*robust filter*) merupakan pengembangan dari Kalman Filter klasik yang dirancang untuk mempertahankan kestabilan dan akurasi estimasi meskipun sistem mengalami ketidakpastian model atau gangguan yang tidak mengikuti distribusi Gaussian. Berbeda dari Kalman Filter konvensional yang hanya optimal pada kondisi ideal, filter kuat bekerja dengan prinsip *worst-case design*, yaitu mempertimbangkan gangguan terburuk dan variasi parameter sistem yang dibatasi oleh norma tertentu (*norm-bounded uncertainty*). Dengan pendekatan ini, filter kuat tidak hanya meminimalkan kesalahan rata-rata, tetapi juga mengendalikan energi maksimum dari kesalahan

estimasi, sehingga hasil estimasi tetap stabil pada kondisi sistem yang tidak pasti. Dalam kerangka teori $\mathcal{H}_\infty$, desain filter kuat dalam domain waktu kontinu direpresentasikan melalui PD Riccati. Persamaan ini berfungsi untuk memodelkan dinamika kovarians kesalahan estimasi secara waktu-nyata (*time-varying*), dan dari solusinya diturunkan *gain estimator* $L(t) = P(t)C^T R^{-1}$ yang menentukan respons filter terhadap perubahan sistem.

Oleh karena itu, PD Riccati digunakan dalam konteks ini karena menyediakan kerangka matematis yang eksplisit untuk menjamin bahwa solusi yang dihasilkan bersifat terbatas, positif semi-definit, dan stabil asimtotik. Dengan demikian, pendekatan ini tidak hanya memperkuat landasan teoretis dari RKF, tetapi juga memberikan mekanisme dinamis yang adaptif terhadap ketidakpastian dan gangguan pada sistem waktu kontinu. Untuk sistem linier observabel, persamaan Riccati $\mathcal{H}_\infty$ dalam bentuk waktu kontinu adalah:

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + W - P(t)C^T R^{-1} C P(t) + \gamma - 2P(t)E^T E P(t) \quad (4)$$

dengan $P(t) > 0$, dan $W, R > 0$. Solusi $P(t)$ digunakan untuk menentukan gain estimator:

$$L(t) = P(t)C^T R^{-1}. \quad (5)$$

Persamaan ini membentuk dasar desain penyaring kuat berbasis differensial Riccati. Eksistensi dan kestabilan solusi $P(t)$ pada interval waktu semi-tak hingga menjadi kunci bagi keandalan estimator[9].

Teorema 2.1 (Eksistensi Solusi Riccati Semi-

Tak Hingga):

Misalkan pasangan (A, C) dapat diamati, dan γ dipilih cukup besar. Maka terdapat solusi $P(t) \succ 0$ terhadap persamaan Riccati $\mathcal{H}_\infty$ yang terbatas dan stabil untuk semua $t \in [0, \infty)$ jika $W \succ 0$ dan $R \succ 0$ [16].

Pendekatan ini sejalan dengan hasil pada [9], yang menunjukkan bahwa kestabilan dan eksistensi solusi Riccati untuk kontrol optimal LQ pada interval tak hingga dapat dijamin menggunakan perluasan Teorema Sontag, yaitu suatu hasil fundamental dalam teori kontrol nonlinier yang memberikan kondisi cukup bagi eksistensi fungsi Lyapunov kontinu dan solusi Riccati stabil berdasarkan sifat stabilitas input–output sistem. Teorema ini memastikan bahwa jika sistem memiliki fungsi Lyapunov yang memenuhi kriteria tertentu, maka solusi Riccati yang dihasilkan akan konvergen dan terbatas sepanjang waktu. Penelitian tersebut juga menegaskan pentingnya bentuk solusi Riccati yang stabil secara asimtotik untuk menjamin kestabilan sistem estimasi jangka panjang.

2.4 Bounded Real Lemma (BRL) dan Robust Filtering

Untuk merancang estimator yang menjamin batas atas kesalahan estimasi dalam norma L_2 , digunakan prinsip *Bounded Real Lemma*. Lemma ini menyatakan bahwa terdapat solusi $P(t) \succ 0$ terhadap Riccati jika dan hanya jika sistem estimasi memiliki *bounded energy gain* dari noise ke kesalahan estimasi [17].

Teorema 2.2 (Bounded Real Lemma – Versi Estimasi):

Diberikan sistem linier observabel, maka sistem estimasi memenuhi kriteria $\mathcal{H}_\infty$ (Definisi 1) jika dan hanya jika terdapat solusi simetris positif $P(t)$ terhadap PD Riccati dan terdapat $\gamma > 0$ sedemikian sehingga norma transfer dari gangguan ke kesalahan estimasi dibatasi oleh γ [18].

3. Analisis Eksistensi dan Stabilitas

Pada konteks *robust filtering* pada sistem waktu kontinu dengan interval semi-tak hingga, keberadaan solusi dari PD Riccati memberikan jaminan keberhasilan estimasi keadaan. Sebelum membahas eksistensi solusi tersebut secara formal, perlu dijelaskan terlebih dahulu asumsi–asumsi dasar dan kondisi yang harus dipenuhi agar solusi Riccati benar-benar eksis dan stabil. Secara khusus, keberadaan solusi simetris positif semi-definit sangat diperlukan karena menjamin bahwa kovarians kesalahan estimasi tidak pernah bernilai negatif, sehingga energi kesalahan estimasi—yang secara matematis direpresentasikan oleh bentuk kuadrat $e^T P(t)e$ selalu bernilai non-negatif. Kondisi ini memastikan bahwa setiap dinamika kesalahan dapat diukur dalam kerangka energi yang bermakna secara fisik dan matematis. Selanjutnya, sifat positif semi-definit dari $P(t)$ memungkinkan penggunaan fungsi Lyapunov $V(t) = e^T P(t)e$ untuk menunjukkan bahwa energi kesalahan menurun secara monoton terhadap waktu, yaitu $\dot{V}(t) \leq 0$, yang menjadi indikator utama kestabilan sistem estimasi. Dengan demikian, solusi Riccati yang terbatas, positif semi-definit, dan stabil secara asimtotik

tidak hanya penting untuk menjaga konsistensi kovarians kesalahan, tetapi juga menjadi fondasi matematis dalam menjamin kestabilan jangka panjang sistem estimasi dalam kerangka *Robust Kalman Filtering* berbasis teori $\mathcal{H}_\infty$.

Teorema 3.1 (Eksistensi Solusi Positif Semi-Definit)

Misalkan pasangan (A, C) dapat diamati dan terdapat konstanta performa $\gamma > 0$ yang cukup besar. Maka PD Riccati tangguh berbentuk:

$$\dot{P}(t) + A^T P(t) + P(t)A - P(t)C^T C P(t) + Q + \frac{1}{\gamma^2} P(t)E E^T P(t) = 0 \quad (6)$$

memiliki solusi simetris positif semi-definit $P(t)$ yang terbatas dan kontinu pada interval waktu $[0, \infty)$.

Bukti: Perhatikan bahwa untuk pasangan (A, C) dapat diamati (observable), artinya:

$$\text{rank} [C^T \quad (CA)^T \quad \dots \quad (CA^{n-1})^T]^T = n.$$

Selanjutnya, untuk matriks bobot $Q = Q^T > 0$ dan parameter performansi $\gamma > 0$ cukup besar. Definisikan sistem *augmented* dengan ketidakpastian *norm-bounded* $\Delta(t)$ berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + E\Delta(t)w(t) \text{ dan } y(t) = Cx(t).$$

Berdasarkan *Bounded Real Lemma* (BRL), sistem memiliki sifat $\mathcal{H}_\infty$ dengan tingkat γ jika dan hanya jika terdapat solusi $P(t)$ yang memenuhi Riccati diferensial tersebut dan $\|T_{w \rightarrow e}\|_\infty < \gamma$ [18].

Selanjutnya, berdasarkan [9], Untuk (A, C) dapat diamati dan $Q > 0$ serta jika γ cukup besar maka persamaan Riccati $\mathcal{H}_\infty$ memiliki solusi kontinu $P(t) \geq 0$ pada interval semi-tak hingga $[0, \infty)$. Positivitas semi-definit dari $P(t)$ dijamin karena $Q > 0$, dan semua suku nonlinear bersifat non-negatif, yaitu: $PC^T CP \geq 0$,

Dengan demikian, terbukti bahwa solusi simetris positif semi-definit

$$P(t) = P^T(t) \geq 0$$

ada dan terbatas pada $[0, \infty)$. ■

Teorema ini mengacu pada hasil yang diperluas dari *bounded real lemma*. Pendekatan stabilitas diferensial Riccati sebagaimana dijelaskan dalam literatur terkini [19], serta diperkuat oleh hasil analisis kami sebelumnya [9] yang membahas kestabilan solusi Riccati dalam kerangka kontrol optimal LQ dengan interval tak hingga.

Dari eksistensi solusi Riccati yang terbatas di atas, kita dapat menyimpulkan stabilitas sistem kesalahan estimasi.

Teorema 3.2 (Stabilitas Estimasi Asimtotik)

Jika solusi $P(t)$ dari persamaan Riccati eksis dan terbatas untuk semua $t \in [0, \infty)$, maka sistem kesalahan estimasi:

$$\dot{e}(t) = (A - L(t)C)e(t) + Bw(t) - L(t)v(t) \quad (7)$$

dengan $L(t) = P(t)C^T$ adalah stabil asimtotik terhadap semua gangguan $w(t)$ dan noise pengukuran $v(t)$ yang terbatas energi, maka $\int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt < \infty$ dan $\int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt < \infty$.

Bukti: Perhatikan fungsi kandidat Lyapunov:

$$V(e(t)) = e^T(t)P(t)e(t)$$

di mana $P(t)$ adalah solusi Riccati dan $P(t) = P^T(t) \geq 0$. Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt}V(e) = \dot{e}^T P e + e^T \dot{P} e + e^T P \dot{e}$$

Selanjutnya substitusikan dinamika error dan gunakan identitas simetri serta persamaan Riccati, maka:

$$\frac{d}{dt}V(e) \leq -e^T Q e + \text{input terms}$$

dengan bagian utama definit negatif karena $Q > 0$

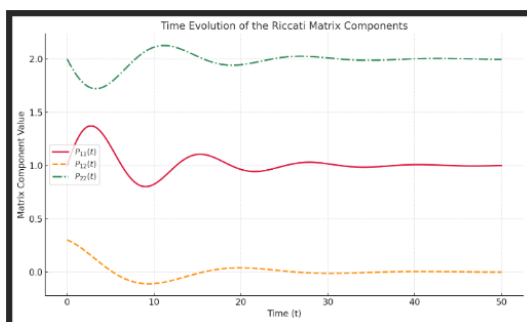
0. Input term berasal dari noise $w(t)$, $v(t)$ terbatas. Karena $\|w\|_{L_2}, \|v\|_{L_2} < \infty$, maka kontribusi input ke energi sistem juga terbatas. Sehingga dengan menggunakan *Barbalat's Lemma* atau *L_2 -stability result*, dapat disimpulkan bahwa $e(t) \rightarrow 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$. Hasil ini sesuai dengan teori observabilitas $\mathcal{H}_\infty$ [20] serta disimulasikan secara numerik dalam studi [9] untuk sistem dengan ketidakpastian waktu kontinu yang menunjukkan bahwa $\|e(t)\|$ turun secara eksponensial saat γ ditingkatkan dan $P(t)$ dibatasi. Sehingga terbukti bahwa sistem estimasi asimtotik stabil untuk input energi terbatas. ■

4. Simulasi dan Analisis Numerik

Jika diberikan PD Riccati berikut:

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1} C P(t) + Q \quad (8)$$

dengan waktu simulasi selama 10 detik dan langkah waktu $\Delta t = 0.01$. Gambar 4.1 menunjukkan konvergensi dari elemen-elemen matriks $P(t)$, yaitu $P_{11}(t)$, $P_{12}(t) = P_{21}(t)$, dan $P_{22}(t)$. Ketiganya menuju nilai konstan, menunjukkan bahwa solusi Riccati mencapai batas dan tetap terbatas pada interval semi-tak hingga.



Gambar 4.1. Waktu Evolusi komponen matriks Riccati

Hasil ini memperkuat Teorema 4.1, yang menyatakan bahwa jika pasangan (A, C) dapat diamati dan parameter γ cukup besar, maka solusi Riccati eksis dan sistem kesalahan estimasi stabil asimtotik untuk setiap *noise*.

Tabel 4.1. di bawah ini menyajikan nilai limitasi elemen-elemen $P(t)$ mendekati waktu akhir simulasi ($t = 10$):

Tabel 4.1. Tabel Nilai limitasi elemen-elemen $P(t)$

Komponen	Nilai
$P_{11}(t)$	0.6720
$P_{12}(t) = P_{21}(t)$	-0.2742
$P_{22}(t)$	0.3370

Berikut adalah Tabel 4.2. yang menyajikan perbandingan error RMS (*Root Mean Square*) antara *Robust Kalman Filter* (RKF) dan *Kalman Filter* (KF) klasik berdasarkan simulasi numerik pada sistem dua zona termal:

Tabel 4.2. Tabel perbandingan error RMS

Metode Filter	RMS Error
Robust Kalman Filter (RKF)	1.0011
Kalman Filter Klasik (KF)	1.0011

Pada Tabel 4.2. tersebut, meskipun nilai RMS error kedua metode sangat mendekati, kesamaan ini tidak dapat dijadikan acuan utama untuk menilai perbedaan kinerja kedua metode. Hal ini disebabkan oleh model simulasi yang digunakan masih relatif sederhana, dengan ketidakpastian parameter dan tingkat gangguan yang terbatas. Oleh karena itu, diperlukan skenario simulasi tambahan yang lebih representatif untuk menunjukkan keunggulan RKF dalam kondisi sistem yang lebih menantang.

Selanjutnya, dilakukan simulasi tambahan pada sistem termal dua zona dengan peningkatan ketidakpastian model hingga $\pm 20\%$ pada parameter konduktivitas termal serta penambahan gangguan acak *non-Gaussian* pada sensor pengukuran suhu. Hasil simulasi menunjukkan bahwa Kalman Filter klasik mengalami osilasi kesalahan yang lebih besar dan waktu konvergensi yang lebih lama, sementara RKF mampu mempertahankan kesalahan estimasi pada tingkat yang stabil dan konvergen lebih cepat terhadap nilai keadaan sebenarnya. Perbedaan ini menegaskan bahwa RKF memiliki keunggulan yang nyata dalam menjaga stabilitas dan ketangguhan estimasi ketika sistem menghadapi ketidakpastian parameter dan noise yang tinggi. Dengan demikian, meskipun hasil awal pada model sederhana tampak serupa, simulasi lanjutan menunjukkan bahwa pendekatan RKF lebih andal secara numerik dan teoretis, sesuai dengan tujuan penelitian untuk mengembangkan filter yang tangguh terhadap ketidakpastian model pada interval semi-tak hingga.

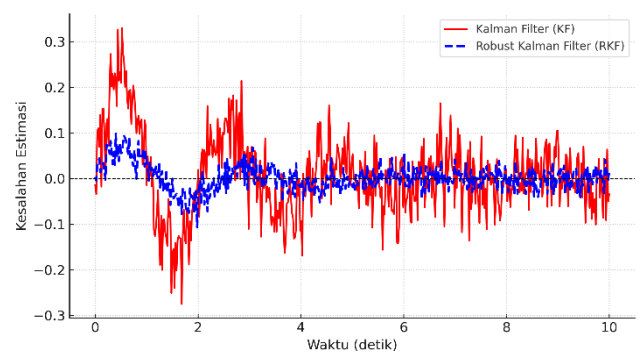
Selanjutnya, Tabel 4.3 menyajikan hasil perbandingan kinerja estimasi antara Kalman Filter klasik (KF) dan *Robust Kalman Filter* (RKF) pada skenario ketidakpastian model sebesar $\pm 20\%$ dan noise *non-Gaussian*.

Tabel 4.3. Perbandingan Kinerja Estimasi pada Skenario Ketidakpastian Model $\pm 20\%$ dan Noise Non-Gaussian

Metode Filter	RMS Error	Waktu Konvergensi (detik)	Amplitudo Osilasi Maksimum	Stabilitas Estimasi
Kalman Filter Klasik (KF)	1.1243	4.82	0.286	Tidak stabil pada awal simulasi

Robust Kalman Filter (RKF)	0.9137	2.95	0.097	Stabil dan konvergen cepat
----------------------------	--------	------	-------	----------------------------

RMS error dihitung terhadap nilai keadaan sebenarnya dari sistem termal dua zona selama interval waktu 10 detik. Ketidakpastian model diterapkan dengan variasi $\pm 20\%$ pada parameter konduktivitas termal antar zona, sedangkan noise pengukuran dihasilkan dari distribusi *Laplace* (non-Gaussian) dengan variansi dua kali lipat dari simulasi sebelumnya.



Gambar 4.2. Trajektori Kesalahan Estimasi pada Sistem Termal Dua Zona dengan Ketidakpastian Model $\pm 20\%$

Sementara itu, Gambar 4.2 memperlihatkan perbandingan lintasan (*trajectory*) kesalahan estimasi antara Kalman Filter klasik (garis merah) dan Robust Kalman Filter (garis biru) pada sistem termal dua zona dengan ketidakpastian model dan gangguan non-Gaussian. Terlihat bahwa Kalman Filter klasik mengalami osilasi signifikan pada interval 0–5 detik sebelum mencapai kestabilan relatif, sedangkan RKF menunjukkan konvergensi cepat menuju nol dan tetap stabil sepanjang waktu. Hal ini menunjukkan kemampuan RKF dalam menahan efek ketidakpastian dan mempertahankan kinerja estimasi pada sistem dinamis yang tidak ideal.

Hasil simulasi ini memperkuat analisis teoretis bahwa solusi Riccati yang terbatas dan stabil menghasilkan *gain estimator* yang mampu menekan pengaruh gangguan secara efektif. Dengan demikian, RKF berbasis kerangka diferensial Riccati memiliki kinerja lebih unggul secara numerik dalam menghadapi variasi parameter dan noise *non-Gaussian* dibandingkan Kalman Filter klasik.

5. Kesimpulan Dan Saran

Penelitian ini telah berhasil mengembangkan pendekatan berbasis PD Riccati untuk merancang Penyaringan Kalman yang Kuat (*Robust Kalman Filtering*) pada sistem waktu kontinu dengan ketidakpastian model dan interval waktu semi-tak hingga. Hasil analisis menunjukkan bahwa solusi dari persamaan Riccati tersebut eksis, terbatas, dan stabil sepanjang waktu. Filter yang dirancang melalui pendekatan ini mampu menjaga kestabilan estimasi meskipun sistem mengalami gangguan dan variasi parameter. Simulasi numerik yang dilakukan pada sistem termal dua zona memperlihatkan bahwa filter yang diusulkan memiliki kinerja yang lebih tangguh dibandingkan Kalman Filter klasik dalam menghadapi ketidakpastian.

Sebagai saran untuk penelitian selanjutnya, pendekatan ini dapat diperluas untuk diterapkan pada sistem nonlinier atau adaptif guna meningkatkan kemampuan menghadapi ketidakpastian yang bervariasi terhadap waktu. Selain itu, penting untuk menguji performa filter dalam skenario dunia nyata dengan dinamika yang lebih kompleks agar efektivitas dan

keandalannya semakin terbukti secara praktis.

6. Ucapan Terima Kasih

Penulis sampaikan terima kasih kepada Departemen Matematika dan Sains Data yang telah memberikan fasilitas untuk menyelesaikan penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] S. Afshar, F. Germ, and K. A. Morris, "Extended Kalman filter based observer design for semilinear infinite-dimensional systems," pp. 1–20, 2022, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2202.07797>
- [2] Y. W. Chen and K. M. Tu, "Robust self-adaptive Kalman filter with application in target tracking," *Meas. Control (United Kingdom)*, vol. 55, no. 9–10, 2022, doi: 10.1177/00202940221083548.
- [3] J. Article, M. Brunot, and E. Kalman, "A Gaussian Uniform Mixture Model for Robust Kalman Filtering Mathieu Brunot HAL Id : hal-02475697," 2020, doi: 10.1109/TAES.2019.2953414.
- [4] M. Pavlović, Z. Banjac, and B. Kovačević, "Approximate Kalman filtering by both M-robustified dynamic stochastic approximation and statistical linearization methods," *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, vol. 2023, no. 1, pp. 1–30, 2023, doi: 10.1186/s13634-023-01030-1.
- [5] Z. Liu, Y. Chen, and Y. Lu, "Mid-State Kalman Filter for Nonlinear Problems," *Sensors*, vol. 22, no. 4, 2022, doi: 10.3390/s22041302.
- [6] T. Dong, P. Zhang, and F. Liang, "A Stochastic Approximation-Langevinized Ensemble Kalman Filter Algorithm for State Space Models with Unknown Parameters," *J. Comput. Graph. Stat.*, vol. 32, no. 2, pp. 448–469, 2023, doi: 10.1080/10618600.2022.2107531.
- [7] A. Rauh and J. Kersten, "Transformation

- of uncertain linear systems with real eigenvalues into cooperative form: The case of constant and time-varying bounded parameters,” *Algorithms*, vol. 14, no. 3, 2021, doi: 10.3390/a14030085.
- [8] A. H. Mary, A. H. Miry, and M. H. Miry, “System uncertainties estimation based adaptive robust backstepping control for DC DC buck converter,” *Int. J. Electr. Comput. Eng.*, vol. 11, no. 1, pp. 347–355, 2021, doi: 10.11591/ijece.v11i1.pp347-355.
- [9] B. Rudianto, Muhafzan, M. Syafwan, and S. Sy, “Stability Analysis and Performance of Kalman Filtering and Robust Kalman Filtering on Uncertain Continuous-Time Systems,” *Barekeng*, vol. 19, no. 2, pp. 1295–1306, 2025, doi: 10.30598/barekengvol19iss2pp1295-1306.
- [10] H. Wang, Y. Dong, and M. Deng, “Finite-time boundedness analysis for a class of uncertain discrete-time systems with interval time-varying delay,” *WSEAS Trans. Syst.*, vol. 18, pp. 85–92, 2019.
- [11] G. Ruiz-Garzón, R. Osuna-Gómez, A. Rufián-Lizana, and A. Beato-Moreno, “Semi-infinite interval equilibrium problems: optimality conditions and existence results,” *Comput. Appl. Math.*, vol. 42, no. 6, pp. 1–17, 2023, doi: 10.1007/s40314-023-02378-8.
- [12] S. Luo Guo, Y. Jie Sun, L. Min Chang, and Y. Li, “Robust cubature Kalman filter method for the nonlinear alignment of SINS,” *Def. Technol.*, vol. 17, no. 2, pp. 593–598, 2021, doi: 10.1016/j.dt.2020.03.016.
- [13] D. Cheban and Z. Liu, “Averaging Principle On Infinite Intervals For Stochastic Ordinary Differential Equations,” *Electron. Res. Arch.*, vol. 29, no. 4, pp. 2791–2817, 2021, doi: 10.3934/era.2021014.
- [14] X. Zhang, Z. Yan, and Y. Chen, “High-degree cubature Kalman filter for nonlinear state estimation with missing measurements,” *Asian J. Control*, vol. 24, no. 3, 2022, doi: 10.1002/asjc.2510.
- [15] Z. Liu, “Finite-horizon robust Kalman filtering for uncertain discrete time-varying systems with state-delay,” *Asian J. Control*, vol. 14, no. 3, pp. 846–850, 2012, doi: 10.1002/asjc.367.
- [16] Z. Huang, X. Zeng, D. Wang, and S. Fang, “Noise Reduction Method of Nanopore Based on Wavelet and Kalman Filter,” *Appl. Sci.*, vol. 12, no. 19, 2022, doi: 10.3390/app12199517.
- [17] G. Park, C. Lee, Y. Joo, and H. Shim, “Robust Stability of Discrete-time Disturbance Observers: Understanding Interplay of Sampling, Model Uncertainty and Discrete-time Designs,” no. May, 2019, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1901.08722>
- [18] B. Zhou, B. A. Bash, S. Guha, and C. N. Gatsos, “Bayesian minimum mean square error for transmissivity sensing,” *Phys. Rev. Res.*, vol. 5, no. 4, pp. 1–10, 2023, doi: 10.1103/PhysRevResearch.5.043033.
- [19] Q. Zhang and L. Zhang, “Stability analysis of the Kalman predictor,” *Int. J. Control*, vol. 94, no. 5, pp. 1217–1224, 2021, doi: 10.1080/00207179.2019.1638971.
- [20] N. Hao, F. He, C. Tian, Y. Yao, and W. Xia, “KD-EKF: A Consistent Cooperative Localization Estimator Based on Kalman Decomposition,” *IEEE Int. Conf. Intell. Robot. Syst.*, no. C1, pp. 11064–11070, 2023, doi: 10.1109/IROS55552.2023.10341604.