

PEMODELAN SVEIR DAN STRATEGI VAKSINASI UNTUK KONTROL PENYEBARAN MUMPS (GONDONGAN)

Dewi Suhika^{1§}

¹Institut Teknologi Sumatera [Email: dewi.suhika@ma.itera.ac.id]

[§]Corresponding Author

Received 09th Aug 2025; Accepted 30th Nov 2025; Published 9th Dec 2025;

Abstrak

Mumps atau gondongan adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus paramyxovirus yang menyerang kelenjar ludah. Meskipun dapat dicegah melalui vaksinasi MMR (*Measles, Mumps, Rubella*), kasus gondongan masih ditemukan di Indonesia, khususnya di DKI Jakarta. Penelitian ini memodelkan dinamika penyebaran gondongan menggunakan model SVEIR (*Susceptible, Vaccinated, Exposed, Infectious, Recovered*) serta menganalisis efektivitas strategi kontrol vaksinasi berbasis prinsip minimum Pontryagin. Model ini mencakup interaksi antar kompartemen populasi rentan, terpapar, terinfeksi, sembuh, dan divaksinasi. Simulasi dilakukan dengan menggunakan data populasi aktual DKI Jakarta yang diasumsikan sebesar 11 juta jiwa berdasarkan publikasi BPS tahun 2024, untuk merepresentasikan kondisi riil wilayah perkotaan padat penduduk. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penerapan kontrol vaksinasi optimal menurunkan jumlah kumulatif individu terinfeksi hingga 90,9%, dari 207.407 individu tanpa kontrol menjadi 18.870 dengan kontrol. Jumlah populasi rentan juga berkurang sebesar 88,7%, mencerminkan efektivitas vaksinasi dalam memutus rantai penularan. Penelitian ini menyimpulkan bahwa strategi kontrol vaksinasi berbasis model matematika efektif mengurangi dampak epidemi gondongan di DKI Jakarta dan dapat digunakan sebagai rekomendasi untuk peningkatan cakupan vaksinasi serta kebijakan pengendalian penyakit menular.

Kata Kunci: Gondongan, SVEIR, kontrol vaksinasi, Pontryagin

Abstract

Mumps is a contagious disease caused by the paramyxovirus that primarily affects the salivary glands. Although it can be prevented through the MMR (*Measles, Mumps, Rubella*) vaccination, mumps cases are still reported in Indonesia, particularly in DKI Jakarta. This study models the transmission dynamics of mumps using an SVEIR (*Susceptible, Vaccinated, Exposed, Infectious, Recovered*) framework and analyzes the effectiveness of a vaccination control strategy based on Pontryagin's Minimum Principle. The model incorporates interactions among the susceptible, vaccinated, exposed, infectious, and recovered population compartments. Simulations were conducted using the actual population data of DKI Jakarta, assumed to be 11 million people based on the 2024 BPS (Statistics Indonesia) publication, representing the real conditions of a densely populated urban area. The results show that implementing the optimal vaccination control reduces the cumulative number of infected individuals by 90.9%, from 207,407 individuals without control to 18,870 with control. The susceptible population also decreases by 88.7%, reflecting the effectiveness of vaccination in breaking the transmission chain. This study concludes that a vaccination control strategy based on mathematical modeling is effective in mitigating the mumps epidemic in DKI

Jakarta and can serve as a recommendation to enhance vaccination coverage and inform public health policies for infectious disease control.

Keywords: *mumps, SVEIR, vaccination control, Pontryagin*

1. Pendahuluan

Gondongan, atau *mumps*, adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus paramyxovirus, yang biasanya menyerang kelenjar ludah [1], [2]. Penyakit ini umum ditemukan pada anak-anak dan dapat dicegah melalui vaksinasi MMR (*Measles, Mumps, Rubella*) [3], [4]. Meski sering dianggap ringan, gondongan dapat menyebabkan komplikasi serius seperti radang otak (*ensefalitis*) [5], meningitis [6], pembengkakan testis (*orkitis*) atau ovarium (*ooforitis*), yang dapat berujung pada kemandulan [7]. Bahkan, gondongan juga dapat menyebabkan ketulian permanen [8]. Di Indonesia, gondongan masih menjadi masalah kesehatan masyarakat, terutama di daerah dengan cakupan vaksinasi yang rendah [9]. Sebagai contoh, kasus di Gunungkidul meningkat tujuh kali lipat dari 155 pada tahun 2023 menjadi 1.050 pada tahun 2024 [10]. Selain itu, Dinas Kesehatan Provinsi DKI Jakarta melaporkan 1.234 kasus selama periode Januari-Juni 2024, meningkat dari 876 kasus pada periode yang sama tahun sebelumnya [11]. Tantangan dalam mengatasi gondongan tidak hanya terkait cakupan vaksinasi tetapi juga dipengaruhi oleh kondisi sosial-ekonomi [12]. Kemiskinan yang masih menjadi salah satu permasalahan utama di Indonesia turut memperburuk akses masyarakat terhadap layanan kesehatan, termasuk imunisasi dasar lengkap, seperti yang dijelaskan oleh Hendayanti dan Nurhidayati (2021), yang

menyatakan bahwa tingkat kemiskinan dapat berkontribusi pada ketidakmerataan akses kesehatan di Indonesia [13].

Meskipun angka kematian akibat gondongan relatif rendah, dengan tingkat fatalitas kasus sekitar 1,6 hingga 3,8 per 10.000 orang, dampaknya pada produktivitas masyarakat dan sistem kesehatan tidak dapat diabaikan [14]. Anak-anak sering absen dari sekolah selama masa infeksi, yang dapat berlangsung hingga dua minggu, sedangkan wabah lokal membebani layanan kesehatan, terutama di daerah dengan fasilitas medis terbatas. Tantangan lain adalah rendahnya cakupan vaksinasi yang tidak merata di Indonesia [15], [16]. Data Kementerian Kesehatan menunjukkan bahwa cakupan imunisasi dasar lengkap pada tahun 2021 hanya mencapai 58,4%, meskipun meningkat menjadi 94,9% pada tahun 2022 [17]. Ketimpangan ini meningkatkan risiko penyebaran gondongan, terutama di wilayah dengan cakupan vaksinasi yang rendah seperti DKI Jakarta [8], [11].

Dalam konteks pengendalian penyakit menular, pemodelan matematika epidemiologi berperan penting dalam memahami dinamika penyebaran dan mengevaluasi efektivitas intervensi kesehatan masyarakat. Salah satu model yang banyak digunakan adalah model SVEIR (*Susceptible, Vaccinated, Exposed, Infectious, Recovered*), yang menggambarkan proses

penularan penyakit yang dapat dicegah melalui vaksinasi [18]. Model ini dibangun dengan asumsi bahwa populasi total terbagi menjadi lima kompartemen diskret, yaitu individu rentan (S), divaksinasi (V), terpapar (E), terinfeksi (I), dan sembuh (R). Setiap individu dapat berpindah dari satu kompartemen ke kompartemen lain mengikuti transisi biologis yang logis, misalnya dari rentan menjadi terpapar, kemudian terinfeksi, dan akhirnya sembuh. Selain itu, laju kontak dan transmisi dianggap homogen di seluruh populasi, sehingga peluang penularan antara individu diasumsikan seragam. Efek vaksinasi direpresentasikan sebagai pengurangan probabilitas infeksi atau peningkatan laju transisi menuju keadaan terlindungi. Dengan asumsi tersebut, model SVEIR memungkinkan analisis kuantitatif terhadap dinamika penyebaran penyakit dan dampak strategi vaksinasi melalui parameter-parameter epidemiologi utama seperti laju infeksi, periode inkubasi, dan tingkat imunitas populasi.

Beberapa penelitian sebelumnya telah menerapkan menganalisis efektivitas vaksinasi terhadap penyakit menular lain seperti campak dan rubella. Misalnya, Pietrantoni dkk. (2021) melaporkan bahwa efektivitas vaksinasi MMR mencapai 85% dalam mencegah infeksi gondongan berdasarkan meta-analisis sistematis, sedangkan Edward dkk. (2025) menerapkan prinsip maksimum Pontryagin untuk menentukan strategi vaksinasi optimal pada model SEIR penyakit campak [19], [20]. Lebih spesifik pada penyakit gondongan, Duru dan Anyanwu (2023) mengembangkan model matematika SEIR dengan

kontrol optimal berbasis isolasi dan pengobatan, serta menunjukkan bahwa penerapan kontrol tersebut secara signifikan menurunkan jumlah individu terinfeksi dan menghasilkan kestabilan global sistem [21]. Namun, hingga kini belum banyak penelitian yang menerapkan model serupa pada penyakit gondongan di Indonesia, khususnya dengan kontrol vaksinasi optimal berbasis prinsip minimum Pontryagin.

Oleh karena itu, penelitian ini memiliki dua tujuan utama. Pertama, mengembangkan model matematika SVEIR yang menggambarkan dinamika penyebaran gondongan di DKI Jakarta, termasuk interaksi antar kompartemen populasi (rentan, terpapar, terinfeksi, sembuh, dan divaksinasi). Kedua, merancang strategi kontrol vaksinasi optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin (PMP) untuk meminimalkan jumlah individu terinfeksi dengan mempertimbangkan keterbatasan sumber daya vaksinasi. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi baru berupa penerapan pendekatan kontrol optimal pada penyakit gondongan, yang belum banyak dikaji di Indonesia, sekaligus memberikan rekomendasi berbasis data bagi peningkatan cakupan vaksinasi dan kebijakan kesehatan masyarakat di DKI Jakarta.

2. Landasan Teori

2.1 Model Matematika

Model matematika dalam epidemiologi berfungsi untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit menular dengan menggunakan sistem persamaan diferensial yang memodelkan perubahan jumlah individu pada

setiap kategori populasi terhadap waktu. Salah satu pendekatan yang paling umum digunakan adalah model kompartemen, yang membagi populasi total menjadi beberapa kelompok berdasarkan status penyakit, seperti individu rentan (*susceptible*), terpapar (*exposed*), terinfeksi (*infectious*), dan sembuh (*recovered*).

Model SEIR (Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered) merupakan pengembangan dari model SIR yang dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick (1927). Dalam model ini, individu rentan (S) yang terpapar agen infeksi tidak langsung menjadi infeksius, melainkan memasuki fase laten (E) sebelum menjadi infeksius (I) dan akhirnya sembuh (R). Dengan demikian, model SEIR dianggap lebih realistis untuk penyakit yang memiliki masa inkubasi, termasuk campak, influenza, dan gondongan (mumps).

Menurut Martcheva (2015), model SEIR dapat digambarkan secara umum dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa (ODE) sebagai [22]:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\sigma + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\gamma + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R,\end{aligned}$$

Setiap individu dapat berpindah dari satu kompartemen ke kompartemen lain sesuai proses biologis penyakit, seperti transisi dari rentan menjadi terpapar akibat kontak dengan individu infeksius, kemudian menjadi terinfeksi setelah masa inkubasi, dan akhirnya sembuh setelah

mendapatkan kekebalan. Secara matematis, model ini dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial yang melibatkan parameter-parameter penting, antara lain laju kelahiran (Λ), laju kematian alami (μ), laju transmisi infeksi (β), laju progresi dari fase laten ke fase infeksius (σ), serta laju pemulihan (γ). Model SEIR menjadi dasar bagi pengembangan model-model lanjutan seperti SVEIR, di mana ditambahkan kompartemen vaksinasi (V) untuk merepresentasikan pengaruh imunisasi terhadap penurunan populasi rentan. Pendekatan berbasis kompartemen ini memungkinkan analisis kuantitatif terhadap dinamika penyakit dan evaluasi efektivitas intervensi kesehatan masyarakat, sebagaimana dijelaskan oleh Martcheva (2015) dalam teori epidemiologi matematika [22].

2.2 Prinsip Kontrol Optimal

Dalam konteks epidemiologi matematika, teori kontrol optimal digunakan untuk menentukan strategi intervensi terbaik (seperti vaksinasi, isolasi, atau pengobatan) yang dapat meminimalkan penyebaran penyakit sekaligus mempertimbangkan keterbatasan sumber daya. Prinsip ini mencari fungsi kontrol $u(t)$ yang meminimalkan fungsi biaya tertentu dengan tetap memenuhi dinamika sistem yang ditetapkan.

Menurut Pontryagin dkk. (1962) dan dijelaskan lebih lanjut oleh Lenhart dan Workman (2007), pendekatan kontrol optimal didasarkan pada Prinsip Minimum Pontryagin (PMP), yang menyatakan bahwa terdapat fungsi Hamiltonian H yang menggabungkan fungsi biaya $L(x, u, t)$ dan dinamika sistem $f(x, u, t)$, yaitu [23]:

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t),$$

dengan $\lambda(t)$ adalah vektor *adjoint* yang merepresentasikan sensitivitas fungsi objektif terhadap perubahan keadaan sistem. Jika fungsi objektif ditulis sebagai:

$$J(u) = \int_0^T [AI(t)^2 + Bu(t)^2] dt,$$

maka $A > 0$ merepresentasikan bobot terhadap jumlah individu terinfeksi dan $B > 0$ merepresentasikan bobot terhadap biaya intervensi (misalnya vaksinasi). Kondisi optimal dicapai ketika turunan Hamiltonian terhadap kontrol bernilai nol, yaitu:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Sistem kontrol optimal kemudian terdiri atas dua himpunan persamaan diferensial:

1. Persamaan *state*: menggambarkan dinamika sistem epidemi (misalnya model SEIR/SVEIR),
2. Persamaan *adjoint*: menggambarkan dinamika sensitivitas atau harga bayangan terhadap perubahan tiap *state*.

Kedua sistem tersebut diselesaikan secara simultan menggunakan metode numerik iteratif untuk memperoleh fungsi kontrol optimal $u^*(t)$. Penerapan prinsip ini telah banyak digunakan dalam penelitian epidemiologi, misalnya oleh Duru dan Anyanwu (2023) serta Edward dkk. (2025), yang menunjukkan efektivitas pendekatan kontrol optimal dalam mengendalikan penyakit menular melalui vaksinasi dan isolasi.

2.3 Metode Numerik Runge-Kutta

Persamaan diferensial nonlinier yang muncul dalam model epidemiologi dan sistem kontrol optimal umumnya tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga diperlukan metode numerik untuk menghitung solusi hampiran. Salah satu metode yang paling populer dan stabil adalah metode Runge-Kutta orde 4 (RK4) yang memberikan keseimbangan antara akurasi tinggi dan efisiensi komputasi. Untuk sistem umum

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

dengan kondisi awal $y(t_0) = y_0$, pendekatan RK4 diberikan oleh [23]:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

dengan h adalah ukuran langkah waktu (*time step*). Metode ini memiliki orde kesalahan global $O(h^4)$ dan digunakan luas untuk mensimulasikan model epidemi karena stabilitas dan presisi yang baik terhadap sistem nonlinier.

Dalam konteks kontrol optimal, RK4 biasanya digunakan bersama dengan metode iterasi maju-mundur (*forward-backward sweep method*), yaitu [18]:

1. Menyelesaikan sistem *state* secara maju menggunakan RK4,
2. Menyelesaikan sistem *adjoint* secara mundur dengan RK4,
3. Memperbarui fungsi kontrol $u(t)$ hingga mencapai konvergensi terhadap nilai optimal.

Pendekatan ini menghasilkan lintasan kontrol yang stabil dan mendekati solusi optimal secara numerik, sehingga banyak digunakan dalam simulasi sistem kontrol epidemiologi [18], [24].

3. Hasil Dan Pembahasan

Hasil dan pembahasan menyajikan analisis dari simulasi model SVEIR yang dilengkapi dengan kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin (PMP). Fokus utama adalah mengevaluasi dinamika penyebaran gondongan dan efektivitas strategi vaksinasi dalam berbagai skenario cakupan. Hasil akan dibandingkan antara skenario dengan dan tanpa kontrol, serta dianalisis dampaknya terhadap penurunan jumlah populasi terinfeksi. Pembahasan juga akan menginterpretasikan implikasi hasil terhadap kebijakan kesehatan masyarakat, dengan tujuan memberikan rekomendasi yang relevan untuk pengendalian gondongan di Provinsi DKI Jakarta.

3.1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Gondongan

Model SVEIR yang digunakan dalam penelitian ini diadaptasi dari struktur dasar model SEIR sebagaimana dijelaskan oleh Martcheva (2015) dan dikembangkan lebih lanjut dengan memasukkan kompartemen vaksinasi (V) sesuai pendekatan Duru dan Anyanwu (2023) [6], [16], [21], [25]. Dalam model dasar tanpa kontrol, laju vaksinasi dianggap tidak aktif ($u(t) = 0$), sehingga tidak terjadi perpindahan individu dari populasi rentan ke populasi divaksin. Namun, dinamika sistem tetap melibatkan seluruh kompartemen S, V, E, I , dan R , karena individu

dalam kompartemen vaksinasi dapat kehilangan kekebalan (melalui laju κ) atau kembali rentan terhadap infeksi. Setelah kontrol diperkenalkan melalui fungsi vaksinasi $u(t)$, populasi rentan berkurang dan sebagian berpindah ke kompartemen vaksinasi. Individu dalam kompartemen vaksinasi $V(t)$ diasumsikan masih dapat terpapar atau terinfeksi kembali walaupun vaksin MMR memberikan tingkat perlindungan yang tinggi terhadap infeksi gondongan. Menurut meta-analisis oleh Pietrantonj dkk. (2021), efektivitas vaksin MMR dalam mencegah infeksi gondongan primer mencapai sekitar 85–88%, sementara WHO (2023) dan Kementerian Kesehatan RI (2022) menegaskan bahwa vaksinasi dua dosis mampu memberikan kekebalan jangka panjang terhadap virus gondongan [6], [7], [16]. Dengan demikian, asumsi bahwa individu dalam kompartemen V terinfeksi kembali digunakan untuk menyederhanakan model dan menekankan pengaruh cakupan vaksinasi terhadap dinamika penyebaran penyakit, sebagaimana juga diterapkan oleh Duru dan Anyanwu (2023) dalam model kontrol optimal penyakit mumps di Nigeria [25], [26], [27]. Perbandingan antara sistem sebelum dan sesudah kontrol kemudian digunakan untuk mengevaluasi dampak intervensi vaksinasi terhadap penyebaran penyakit gondongan di DKI Jakarta [16], [26].

Berdasarkan data Dinas Kesehatan Provinsi DKI Jakarta, selama periode Januari–Juni 2024 tercatat sebanyak 1.234 kasus gondongan yang tersebar di seluruh wilayah administrasi Jakarta, meningkat dibandingkan 876 kasus pada periode yang sama tahun 2023 [26], [27]. Populasi total

DKI Jakarta tahun 2024 mencapai 10.679.951 jiwa [28]. Tingkat cakupan imunisasi dasar lengkap di provinsi Jakarta pada tahun 2022 mencapai 94,9 %, sesuai laporan Kementerian Kesehatan melalui portal Yankes Kemkes [16], [17].

Pada model matematika SVEIR ini populasi dibagi menjadi lima kompartemeni yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Definisi Subpopulasi Model Matematika Penyakit Gondongan

Kompartemen	Definisi
$S(t)$	populasi rentan (<i>susceptible</i>)
$V(t)$	Populasi yang divaksinasi
$E(t)$	Populasi terpapar (<i>exposed</i>)
$I(t)$	Populasi terinfeksi gondongan (<i>Infected</i>)
$R(t)$	Populasi sembuh (<i>recovered</i>)

Model SVEIR yang digunakan dalam penelitian ini didasarkan pada sejumlah asumsi yang dirancang untuk menyederhanakan dinamika penyebaran gondongan dan mempermudah analisis matematis. Berikut diberikan asumsi-asumsi sebagai batasan pada model.

- Total populasi (N) diasumsikan konstan selama waktu simulasi. Tidak ada migrasi masuk atau keluar wilayah.

$$N = S + V + E + I + R$$

- Tidak ada perbedaan tingkat keparahan penyakit, durasi infeksi, atau respon terhadap vaksinasi antar individu.
- Semua individu dalam populasi memiliki laju kontak menular (β) yang sama.
- Penularan infeksi hanya terjadi melalui kontak antara S dan I .

- Individu dalam kompartemen V diasumsikan dapat terpapar atau terinfeksi .
- Vaksinasi diasumsikan langsung memindahkan individu dari populasi S ke populasi V , dengan efektivitas vaksin 100%.
- Tidak ada reinfeksi setelah sembuh (R).
- Tidak ada kematian langsung akibat infeksi gondongan dalam model.

Selanjutnya, model SVEIR dengan kontrol vaksinasi $u(t)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= \mu N - \mu S - \beta \frac{SI}{N} - u(t)S + \kappa V, \\
 \dot{V} &= u(t)S - \mu V - (1 - \eta) \beta \frac{VI}{N} - \kappa V, \\
 \dot{E} &= \beta \frac{SI}{N} + (1 - \eta) \beta \frac{VI}{N} - (\sigma + \mu)E, \\
 \dot{I} &= \sigma E - (\gamma + \mu)I, \\
 \dot{R} &= \gamma I - \mu R.
 \end{aligned} \quad (1)$$

Penjelasan parameter pada persamaan (1) dapat dilihat melalui Tabel 2 berikut:

Tabel 2. Pendefinisian Parameter dan Nilai Parameter

Parameter	Definisi	Nilai	Sumber / Keterangan
β	Laju kontak menular antara individu rentan dan terinfeksi	0.25	[29]
μ	Laju kematian alami populasi	0.949	Berdasarkan cakupan imunisasi Tahun 2022 [16],
σ	Laju perkembangan individu terpapar menjadi terinfeksi	$1/18 \text{ hari}^{-1}$	Masa inkubasi gondongan sekitar 16–18 hari [4]
γ	Laju kesembuhan individu terinfeksi gondongan	$1/10 \text{ hari}^{-1}$	Durasi infeksi gondongan sekitar 10 hari [9]
η	Efektivitas vaksin dalam mencegah infeksi (<i>vaccine efficacy</i>)	0.85	Cochrane Database Review [20]

κ	Laju penurunan imunitas vaksin (<i>waning immunity</i>)	$1/(20 \times 365)$ hari ⁻¹ $\approx 1.37 \times 10^{-4}$	Asumsi kekebalan vaksin bertahan ± 20 tahun
$u(t)$	Variabel kontrol vaksinasi dalam interval $[0,1]$	$[0, 1]$	Intensitas vaksinasi dijelaskan pada (*)
N	Jumlah total populasi (DKI Jakarta)	1.1×10^7	BPS Provinsi DKI Jakarta (2024) [28]

(*) Definisi kontrol $u(t)$ yang terbatas pada interval $[0,1]$ mengacu pada intensitas vaksinasi yang dapat diterapkan pada waktu tertentu t , dengan $u(t)$ sebagai variabel kontrol vaksinasi. Dalam konteks penelitian ini, batasan $[0,1]$ mencerminkan realitas dan keterbatasan praktik vaksinasi. Nilai $u(t) = 0$ artinya menunjukkan bahwa tidak ada vaksinasi yang dilakukan pada waktu t . Biasanya merepresentasikan situasi tanpa intervensi vaksinasi. Nilai $u(t) = 1$, menunjukkan bahwa tingkat vaksinasi mencapai kapasitas maksimum (cakupan penuh), artinya semua individu rentan yang tersedia untuk vaksinasi pada waktu tersebut telah divaksinasi. Hal ini merepresentasikan intensitas vaksinasi tertinggi yang dapat dicapai dalam skenario ideal.

3.2 Kontrol Optimal Pontryagin Model Matematika Penyebaran Gondongan

Tujuan umumnya adalah meminimalkan jumlah infeksi sambil meminimalkan biaya intervensi. Fungsi tujuan dapat dirumuskan sebagai berikut

$$Z = \int_0^T \left[AI(t) + \frac{B}{2} u^2(t) \right] dt \quad (2)$$

dengan $A > 0$ merupakan bobot dampak populasi terinfeksi, $B > 0$ merupakan biaya vaksinasi, untuk menghindari kontrol yang terlalu besar, dan T merupakan horizon waktu pengamatan.

Berikut ini merupakan langkah-langkah dalam rancangan kontrol optimal untuk model matematika pada persamaan (1):

1. Fungsi Hamiltonian didefinisikan untuk sistem (1) yang dirumuskan sebagai berikut:

$$H = AI + \frac{B}{2} u^2 + \lambda_1 (\mu N - \mu S - \beta \frac{SI}{N} - uS + \kappa V) + \lambda_2 \left(uS - \mu V - (1 - \eta) \beta \frac{VI}{N} - \kappa V \right) + \lambda_3 \left(\beta \frac{SI}{N} + (1 - \eta) \beta \frac{VI}{N} - (\sigma + \mu) E \right) + \lambda_4 (\sigma E - (\gamma + \mu) I) + \lambda_5 (\gamma I - \mu R), \quad (3)$$

dengan $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ merupakan *multipliers adjoint* yang menunjukkan sensitivitas fungsi tujuan terhadap perubahan pada setiap kompartemen.

2. Menentukan persamaan *adjoint* diperoleh dari diferensial parsial Hamiltonian terhadap variabel keadaan, yaitu

$$\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_1 (\beta I/N + u - \mu) - \lambda_2 u - \lambda_3 \beta I/N$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_2 (\mu + \kappa + (1 - \eta) \beta \frac{I}{N}) - \lambda_1 \kappa - \lambda_3 (1 - \eta) \beta \frac{I}{N}$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = \lambda_3 (\sigma + \mu) - \lambda_4 \sigma \quad (4)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = -A + \lambda_1 \beta \frac{S}{N} + \lambda_2 (1 - \eta) \beta \frac{V}{N} - \lambda_3 \left(\beta \frac{S}{N} + (1 - \eta) \beta \frac{V}{N} \right) + \lambda_4 (\gamma + \mu) - \lambda_5 \gamma$$

$$\dot{\lambda}_5(t) = \lambda_5 \mu - \lambda_1 \kappa + \lambda_2 \kappa.$$

3. Kondisi optimal $u(t)$ diperoleh dari kondisi optimal berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

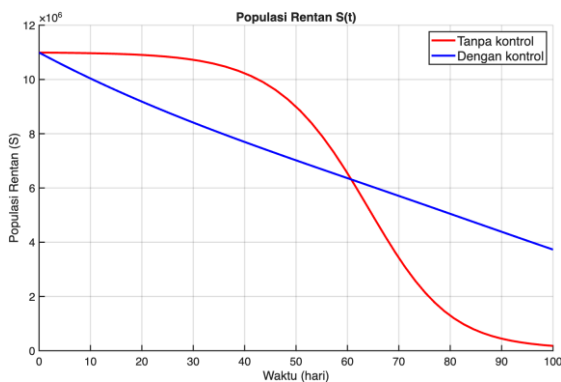
sehingga $u(t) = \frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{B}$. Dengan batasan

$0 \leq u(t) \leq u_{max}$, kontrol optimal diberikan sebagai berikut:

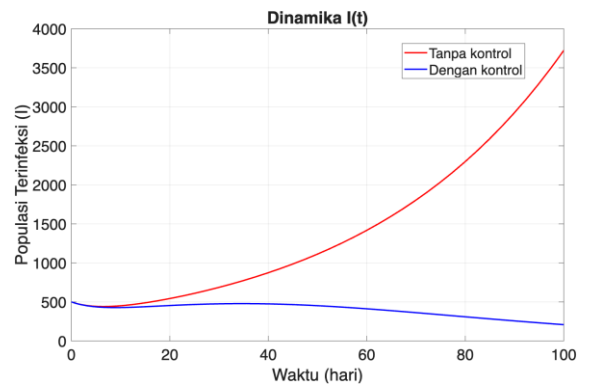
$$u(t) = \min \left(\max \left(\frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{B}, 0 \right), u_{max} \right) \quad (4)$$

3.3 Hasil Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan untuk mengevaluasi dampak vaksinasi terhadap penurunan jumlah individu terinfeksi (I) dan populasi rentan (S), serta untuk menghitung total biaya vaksinasi dan cakupan vaksinasi yang diperlukan dengan jumlah populasi wilayah Provinsi DKI Jakarta. Pendekatan numerik dipilih karena kompleksitas sistem diferensial yang tidak memungkinkan penyelesaian analitik secara langsung. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde 4 diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, sementara integrasi numerik digunakan untuk menghitung indikator kunci seperti jumlah individu terinfeksi kumulatif dan total biaya vaksinasi.



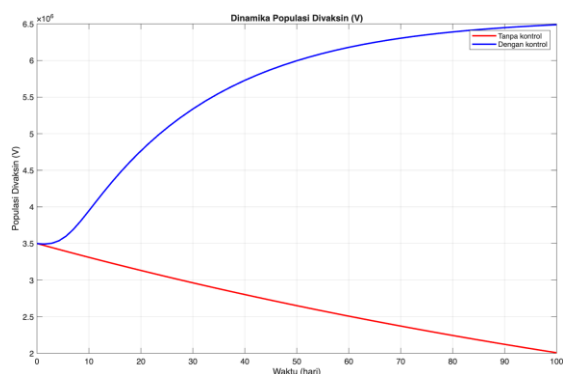
Gambar 1. Dinamika Populasi Individu Rentan (S)



Gambar 2. Dinamika Populasi Individu Terinfeksi (I)

Gambar 1 menunjukkan dinamika populasi rentan $S(t)$ selama periode 100 hari untuk dua skenario, yaitu tanpa kontrol dan dengan kontrol. Pada skenario tanpa kontrol (garis merah), populasi rentan hanya mengalami penurunan kecil pada awal simulasi, namun mulai turun secara drastis setelah hari ke-40 hingga mendekati nol pada sekitar hari ke-100. Penurunan yang sangat cepat ini menunjukkan bahwa infeksi menyebar luas tanpa adanya intervensi, sehingga sebagian besar individu rentan berpindah menuju kompartemen terinfeksi atau kelompok lain yang tidak rentan. Sebaliknya, pada skenario dengan kontrol (garis biru), populasi rentan menurun secara lebih lambat dan stabil sepanjang waktu. Penurunan yang lebih landai ini mencerminkan bahwa intervensi berupa vaksinasi dan pembatasan kontak mampu menjaga proporsi individu rentan tetap lebih tinggi dibandingkan skenario tanpa kontrol, karena sebagian besar populasi terlindungi oleh vaksin, sehingga tidak langsung terpapar infeksi. Secara keseluruhan, grafik ini menunjukkan bahwa strategi kontrol efektif dalam menahan laju penurunan $S(t)$ dan memperlambat penyebaran infeksi di populasi.

Gambar 2 menggambarkan dinamika populasi terinfeksi $I(t)$ selama 100 hari pada dua skenario, yaitu tanpa kontrol dan dengan kontrol. Pada skenario tanpa kontrol (garis merah), jumlah individu terinfeksi terus meningkat secara signifikan seiring waktu. Setelah sedikit penurunan pada awal simulasi, populasi terinfeksi mengalami pertumbuhan eksponensial, mencapai angka yang sangat tinggi menjelang hari ke-100. Kenaikan tajam ini menunjukkan bahwa tanpa adanya intervensi, penyebaran infeksi berlangsung secara agresif dan tidak terkendali. Sebaliknya, pada skenario dengan kontrol (garis biru), jumlah kasus terinfeksi tetap jauh lebih rendah dan stabil. Populasi terinfeksi hanya mengalami sedikit peningkatan di awal, kemudian bergerak turun perlahan setelah pertengahan periode simulasi. Hal ini menunjukkan bahwa strategi intervensi berupa vaksinasi dan pengurangan kontak efektif dalam menekan angka penularan sehingga jumlah kasus terinfeksi dapat dikendalikan dengan lebih baik. Secara keseluruhan, grafik ini mengonfirmasi bahwa penerapan kontrol dapat secara signifikan mengurangi dan menstabilkan jumlah populasi terinfeksi dibandingkan keadaan tanpa kontrol.



Gambar 3. Dinamika Populasi Individu yang Divaksin (V)

Gambar 3 menunjukkan perubahan populasi yang divaksin $V(t)$ selama 100 hari pada dua skenario, yaitu tanpa kontrol dan dengan kontrol. Pada skenario tanpa kontrol (garis merah), populasi divaksin justru menurun dari waktu ke waktu. Hal ini terjadi karena tidak ada program vaksinasi yang diterapkan, sehingga tidak ada individu baru yang masuk ke kelompok divaksin, sementara sebagian kecil dapat berpindah ke kompartemen lain akibat infeksi atau dinamika populasi. Sebaliknya, pada skenario dengan kontrol (garis biru), populasi divaksin meningkat tajam sejak hari pertama. Program vaksinasi yang diaktifkan secara bertahap mampu menambah jumlah individu yang terlindungi, sehingga kurva $V(t)$ meningkat secara signifikan dan mencapai titik mendekati kapasitas maksimum sekitar hari ke-80 hingga 100. Pola kenaikan ini menunjukkan efektivitas kebijakan vaksinasi dalam meningkatkan cakupan imunisasi di populasi. Secara keseluruhan, grafik ini menegaskan bahwa intervensi vaksinasi berperan besar dalam meningkatkan jumlah individu yang terlindungi, sekaligus mendukung pengendalian penyebaran infeksi.

Tabel 3. Perbandingan total jumlah individu sebelum dan setelah kontrol selama 100 hari

Strategi	Individu Terinfeksi (I)
Tanpa kontrol	207.407
Dengan kontrol	18.870

Total individu terinfeksi kumulatif mencapai 207.407. Angka tersebut mencerminkan jumlah total individu yang terpapar infeksi selama waktu simulasi tanpa adanya intervensi vaksinasi.

Tingginya angka ini disebabkan oleh tidak adanya upaya untuk mengurangi populasi rentan (S) yang terpapar langsung terhadap virus. Total individu terinfeksi kumulatif menurun drastis menjadi 18.870, menunjukkan bahwa penerapan strategi kontrol vaksinasi berhasil secara signifikan mengurangi penyebaran infeksi. Hal ini terjadi karena vaksinasi mengurangi jumlah individu rentan (S), sehingga memperlambat penyebaran infeksi. Strategi kontrol vaksinasi menurunkan total jumlah individu terinfeksi sekitar 90.9% dibandingkan dengan skenario tanpa kontrol.

Tabel 4. Perbandingan nilai efektivitas biaya atau fungsi tujuan biaya

Strategi	Fungsi tujuan biaya (Z)
Tanpa kontrol	3.136.200.000
Dengan kontrol	3.325.700.000

Berdasarkan hasil simulasi dengan asumsi $A = 15.000$ rupiah per orang dan $B = 10$ pada persamaan (2), nilai efektivitas biaya dari fungsi tujuan Z tanpa intervensi kontrol vaksinasi mencapai Rp 3.136.200.000, sedangkan dengan penerapan kontrol vaksinasi optimal, nilai Z menurun drastis menjadi sekitar Rp 3.325.700.000. Penurunan ini menunjukkan bahwa strategi kontrol vaksinasi tidak hanya efektif dalam mengurangi jumlah individu yang terinfeksi, tetapi juga efisien secara biaya menurut formulasi fungsi tujuan. Hal ini menegaskan pentingnya penerapan intervensi vaksinasi yang terencana dalam pengendalian penyebaran penyakit mumps (gondongan), khususnya di wilayah DKI Jakarta.

3.4 Analisis Efisiensi Intervensi (*Cost-effective analysis*)

Untuk mengevaluasi efisiensi strategi vaksinasi yang diterapkan, dilakukan analisis *cost-effectiveness* dengan menghitung jumlah individu terinfeksi yang berhasil dihindari serta biaya rata-rata per infeksi yang dicegah. Jumlah individu terinfeksi tanpa kontrol tercatat sebesar 207.407 orang, sedangkan dengan intervensi kontrol vaksinasi menurun drastis menjadi 18.870 orang. Sehingga, jumlah infeksi yang berhasil dihindari dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Delta I &= I_{\text{tanpa kontrol}} - I_{\text{dengan kontrol}} \\ &= 207.407 - 18.870 \\ &= 188.537\end{aligned}$$

Rasio biaya-efektifitas rata-rata (ACER) adalah

$$\begin{aligned}ACER &= \frac{Z_{\text{kontrol}} - Z_{\text{tanpa kontrol}}}{\Delta I} \\ &\approx \text{Rp } 1.005,65 \text{ per infeksi yang dicegah.}\end{aligned}$$

Hasil analisis menunjukkan bahwa strategi vaksinasi tidak bersifat *cost-saving* karena total biaya fungsi tujuan meningkat dibandingkan skenario tanpa kontrol. Namun demikian, intervensi ini berpotensi *cost-effective* apabila biaya rata-rata sebesar Rp 1.005,65 per kasus mumps yang dicegah lebih rendah dibandingkan estimasi beban ekonomi rata-rata per kasus (meliputi biaya medis, kehilangan produktivitas, dan risiko komplikasi). Apabila estimasi biaya per kasus tersedia, maka perbandingan langsung dapat dilakukan untuk menentukan kelayakan *cost-effectiveness* secara formal.

4. Kesimpulan Dan Saran

Penelitian ini berhasil memberikan kontribusi dalam pengendalian penyakit gondongan di Indonesia, khususnya di Provinsi DKI Jakarta, melalui pendekatan berbasis model matematika SVEIR dan strategi kontrol optimal. Model SVEIR yang dikembangkan mampu mencerminkan dinamika penyebaran gondongan, termasuk interaksi antar kompartemen populasi rentan, terpapar, terinfeksi, sembuh, serta dampak dari vaksinasi. Hasil simulasi menunjukkan bahwa strategi kontrol vaksinasi berbasis Prinsip Minimum Pontryagin dapat secara signifikan menurunkan jumlah kumulatif kasus infeksi hingga 90,9% dibandingkan dengan skenario tanpa kontrol, meskipun terdapat keterbatasan sumber daya vaksinasi.

Analisis dari skenario kontrol menunjukkan bahwa cakupan vaksinasi yang tinggi secara konsisten (lihat Gambar 3) memberikan dampak positif dalam mengurangi jumlah individu rentan dan menekan penyebaran infeksi. Strategi kontrol vaksin juga membuktikan efektivitasnya dalam memutus rantai penyebaran penyakit dengan biaya vaksinasi yang dapat dioptimalkan. Penelitian ini berhasil memberikan rekomendasi berbasis data yang dapat digunakan untuk meningkatkan cakupan vaksinasi, khususnya di wilayah dengan populasi tinggi seperti Provinsi DKI Jakarta, guna mengurangi dampak kesehatan, sosial, dan ekonomi yang ditimbulkan oleh penyakit gondongan. Penelitian ini menegaskan bahwa pendekatan kontrol vaksinasi berbasis model matematika merupakan alat yang efektif untuk mendukung perencanaan kebijakan kesehatan

masyarakat dalam menghadapi penyakit menular seperti gondongan di Indonesia.

Daftar Pustaka

- [1] C. Ferrari *dkk.*, “Questionable Immunity to Mumps among Healthcare Workers in Italy—A Cross-Sectional Serological Study,” *Vaccines (Basel)*, vol. 12, no. 5, Mei 2024, doi: 10.3390/vaccines12050522.
- [2] J. Tappe, J. Leung, A. D. Mathis, S. E. Oliver, dan N. B. Masters, “Characteristics of reported mumps cases in the United States: 2018–2023,” *Vaccine*, vol. 42, no. 25, Nov 2024, doi: 10.1016/j.vaccine.2024.07.044.
- [3] P. A. Achdiat, Yunitasari, H. A. Usman, dan R. H. Maharani, “A Case of Genital and Extragenital Warts Unresponsive to Immunotherapy Using Measles, Mumps, Rubella Vaccine,” *Int Med Case Rep J*, vol. 16, hlm. 739–746, 2023, doi: 10.2147/IMCRJ.S426665.
- [4] S. Sato, S. Ono, Y. Sasabuchi, K. Uemura, dan H. Yasunaga, “Changes in the mumps vaccine coverage and incidence of mumps before and after the public subsidization program: A descriptive study using a population-based database in Japan,” *Am J Infect Control*, Jan 2024, doi: 10.1016/j.ajic.2024.09.011.
- [5] Y. C. Chee dan B. H. Ong, “Mumps encephalitis with bilateral hippocampal lesions preceding parotitis,” *Neurol Clin Pract*, vol. 9, no. 6, hlm. 475–477, Des 2019, doi: 10.1212/CPJ.0000000000000665.
- [6] K. Rhie *dkk.*, “Factors associated with mumps meningitis and the possible impact of vaccination,” *Korean J Pediatr*, vol. 59, no. 1, hlm. 24–29, Jan 2016, doi: 10.3345/kjp.2016.59.1.24.
- [7] M. Masarani, H. Wazait, dan M. Dinneen, “Mumps orchitis,” 2006. [Daring]. Tersedia pada: www.hpa.org.uk/infections/topics_az/mumps/data_reg_age.htm
- [8] A. Al-Balasi dan D. Omer, “Catastrophic Bilateral Sudden Sensorineural Hearing Loss Due to Mumps: Report of Two Cases,” *Turkish Journal of Ear Nose and*

- Throat*, vol. 33, no. 4, hlm. 128–130, 2023, doi: 10.26650/Tr-ENT.2023.1327190.
- [9] R. Widayat, N. Nadzifah, V. F. Fiqiyah, dan N. Rizkiyani, “Stability Analysis for the Spread of Mumps Based on SIQR Model,” *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, vol. 20, no. 1, hlm. 24–40, Sep 2023, doi: 10.20956/j.v20i1.27060.
- [10] BPS, “Statistik Potensi Desa Kabupaten Gunungkidul 2024,” <https://gunungkidulkab.bps.go.id/id/publication/2024/12/16/e1559373115a9f74a1b8dc69/statistik-potensi-desa-kabupaten-gunungkidul-2024.html>.
- [11] Y. A. Adi dan Suparman, “An investigation of Susceptible–Exposed–Infectious–Recovered (SEIR) tuberculosis model dynamics with pseudo-recovery and psychological effect,” *Healthcare Analytics*, vol. 6, Des 2024, doi: 10.1016/j.health.2024.100361.
- [12] N. Principi dan S. Esposito, “Mumps outbreaks: A problem in need of solutions,” 1 Juni 2018, *W.B. Saunders Ltd*. doi: 10.1016/j.jinf.2018.03.002.
- [13] N. P. N. Hendayanti dan M. Nurhidayati, “Klasifikasi Tingkat Keparahan Kemiskinan Provinsi di Indonesia dengan Analisis Diskriminan,” *Math Educa Journal*, vol. 5(1), 2021, Diakses: 19 Januari 2025. [Daring]. Tersedia pada: <https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/matheduca/article/view/2510>
- [14] S. Rubin, M. Eckhaus, L. J. Rennick, C. G. Bamford, dan W. P. Duprex, “Molecular biology, pathogenesis and pathology of mumps virus,” *Journal of Pathology*, vol. 235, no. 2, hlm. 242–252, Jan 2015, doi: 10.1002/path.4445.
- [15] I. Siramaneerat dan F. Agushyana, “Inequalities in immunization coverage in Indonesia: a multilevel analysis,” *Rural Remote Health*, vol. 21, no. 3, hlm. 6348, Agu 2021, doi: 10.22605/RRH6348.
- [16] S. Widada *dkk.*, “Annual Report Immunization 2022,” 2022.
- [17] Kemenkes RI, “Komunikasi Nasional Strategi Imunisasi,” 2022. Diakses: 19 Januari 2025. [Daring]. Tersedia pada: <https://ayosehat.kemkes.go.id/buku-strategi-komunikasi-nasional-imunisasi-2022-2025>
- [18] D. Suhika, R. Saragih, D. Handayani, dan M. Apri, “Optimal control strategies based on extended Kalman filter in mathematical models of COVID-19,” *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 14, no. 6, hlm. 6300–6312, Des 2024, doi: 10.11591/ijece.v14i6.pp6300-6312.
- [19] S. Edward dan A. K. Mathias, “Mathematical insights into mumps transmission control with optimal strategies,” *Infect Dis Model*, vol. 10, no. 4, hlm. 1208–1228, Des 2025, doi: 10.1016/j.idm.2025.06.007.
- [20] C. Di Pietrantonj, A. Rivetti, P. Marchione, M. G. Debalini, dan V. Demicheli, “Vaccines for measles, mumps, rubella, and varicella in children,” 22 November 2021, *John Wiley and Sons Ltd*. doi: 10.1002/14651858.CD004407.pub5.
- [21] E. C. Duru dan M. C. Anyanwu, “Mathematical model for the transmission of mumps and its optimal control,” *Biometrical Letters*, vol. 60, no. 1, hlm. 77–95, Jun 2023, doi: 10.2478/bile-2023-0006.
- [22] M. Martcheva, *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, vol. 61. dalam *Texts in Applied Mathematics*, vol. 61. Boston, MA: Springer US, 2015. doi: 10.1007/978-1-4899-7612-3.
- [23] Suzanne Lenhart dan John T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*. London: CRC Press, 2007.
- [24] D. Suhika, R. Saragih, dan D. Handayani, “Application of optimal control on mathematical model for spreading of Covid-19,” *AIP Publishing.*, vol. 3083, Jul 2024, doi: 10.1063/5.0225256.
- [25] K. M. Edwards, “Maternal antibodies and infant immune responses to vaccines,” *Vaccine*, vol. 33, no. 47, hlm. 6469–6472, Nov 2015, doi: 10.1016/j.vaccine.2015.07.085.
- [26] Direktorat Jenderal Pelayanan Kesehatan, “Gondongan, Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 08 Sept. 2022. [Online]. Available: https://yankes.kemkes.go.id/view_artikel/1467/gondongan . Accessed: 04 Nov. 2025.”
- [27] Direktorat Jenderal Pelayanan Kesehatan, “Fakta Mengejutkan di Balik

- Meningkatnya Gondongan di Jakarta, Rumah Sakit Pusat Pertamina, 05 Mar. 2024. [Online]. Available: <https://rspp.co.id/berita-detail-332-Fakta-Mengejutkan-di-Balik-Meningkatnya-Gondongan-di-Jakarta!.html> .”
- [28] Badan Pusat Statistik Provinsi DKI Jakarta, “Provinsi DKI Jakarta Dalam Angka 2024, Nomor Katalog: 1102001.31, Nomor Publikasi: 31000.24005, ISSN/ISBN: 0215-2150. Jakarta, Indonesia: BPS Provinsi DKI Jakarta, 28 Feb. 2024. [Online]. Available: <https://jakarta.bps.go.id/id/publication/2024/02/28/baae7b80d16101c7bef30cc0/provinsi-dki-jakarta-dalam-angka-2024.html>.”
- [29] Y. Peng *dkk.*, “Estimating the Transmissibility of Mumps: A Modelling Study in Wuhan City, China,” *Front Med (Lausanne)*, vol. 8, Agu 2021, doi: 10.3389/fmed.2021.683720.