

## ANALISIS MODEL EPIDEMI DENGAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN TEOREMA TITIK TETAP

### *EPIDEMIC MODEL ANALYSIS WITH FIXED POINT THEOREM APPROACH*

**Ilham Dangu Rianjaya<sup>1§</sup>, Muhammad Zikri<sup>2</sup>, Annisa Maula Zakiya<sup>2</sup>, Suci Yefri Fadhilla<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, [[ilham.rianjaya@uinib.ac.id](mailto:ilham.rianjaya@uinib.ac.id)]

<sup>2</sup>Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang

*§Corresponding Author*

Received 24<sup>th</sup> Nov 2025; Accepted 02<sup>nd</sup> Dec 2025; Published 17<sup>th</sup> Dec 2025;

#### **Abstrak**

Penelitian ini mengkaji tentang penggunaan teorema titik tetap dalam model epidemi khususnya pada model COVID-19. Pada penelitian ini, ditawarkan sebuah model penyebaran penyakit COVID-19 dengan menggunakan turunan Atangana-Baleanu secara Caputo. Selain itu, digunakan teorema titik tetap digunakan untuk menunjukkan eksistensi dan ketunggalan solusi dari model ini. Hasil yang diperoleh adalah model yang ditawarkan memiliki solusi yang tunggal tak negatif dengan menggunakan teorema titik tetap, sehingga dapat digunakan untuk mempelajari perilaku penyebaran penyakit.

**Kata Kunci:** Epidemi, teorema titik tetap, turunan ABC

#### **Abstract**

*This study investigated the application of the fixed point theorem in epidemic models, especially in the COVID-19 model. In this study, a model of the spread of the COVID-19 disease is offered by using the Atangana-Baleanu derivative with Caputo sense. Further, we used fixed-point theorem to show the existence and uniqueness of solution of the model. The result obtained is that the model offered has a unique non-negative solution using the fixed point theorem, so it can be used to study the behavior of the spread of the disease.*

**Keywords:** ABC derivative, epidemic, fixed-point theorem

## 1. Pendahuluan

Pandemi COVID-19 yang dimulai sejak akhir tahun 2019 masih menjadi perhatian bagi dunia. Penyebaran virus ini sangat cepat dan masif sehingga memberikan dampak yang besar terhadap berbagai sektor, seperti kesehatan,

ekonomi, sosial, dan lain sebagainya. Oleh karena itu, perlu adanya upaya-upaya yang efektif dan efisien untuk mengendalikan dan mengatasi pandemi ini. Salah satu upaya yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan

pendekatan matematika untuk memodelkan dan menganalisis dinamika penyebaran COVID-19.

Dengan matematika, manusia dapat memahami dan memprediksi perilaku penyebaran penyakit, seperti demam berdarah [1], HIV [2] dan [3], atau bahkan COVID-19, (lihat [4], [5], [6], [7]). Dengan model matematika, dapat digambarkan berbagai faktor yang mempengaruhi penyebaran penyakit, seperti jumlah populasi, laju infeksi, laju kesembuhan, laju kematian, tingkat kematian, dan efek dari intervensi seperti vaksinasi dan karantina. Dengan demikian dapat dilakukan simulasi dan optimasi untuk dapat menentukan strategi-strategi pencegahan yang optimal untuk meminimalisir penyebaran penyakit dan dampaknya.

Model matematika yang umum digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit (disebut model epidemi) adalah model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Model ini digunakan untuk menggambarkan perubahan jumlah individu yang rentan (*susceptible*), terinfeksi (*infected*) dan sembuh (*recovered*) dari suatu penyakit [8]. Model ini biasanya menggunakan persamaan diferensial biasa (PDB) untuk menganalisis dan melihat perubahan yang terjadi. Kelebihan dari model SIR dengan PDB ini antara lain mudah dipahami, mudah diimplementasikan, dan mudah dianalisis. Namun model ini tidak dapat memperlihatkan efek memori atau riwayat infeksi, sehingga kurang sesuai dengan kondisi nyata di lapangan [9].

Untuk mengatasi kelemahan ini, beberapa peneliti seperti [7], [10], [11] mengembangkan model epidemiologi tersebut menggunakan Persamaan Diferensial Fraksional (PDF). Adapun

model epidemi yang digunakan berbeda-beda, seperti pada penelitian [11], model epidemi yang digunakan adalah perluasan dari model SIR. Sedangkan [10] menggunakan model SEIR untuk melakukan analisis dinamis penyebaran penyakit COVID-19. Selain itu, perluasan model SEIR yang ditambahkan kompartemen (*Hospitalized*), dikaji oleh [7]. Ketiga penelitian tersebut menggunakan PDF untuk mempelajari perilaku penyebaran penyakit dari model yang dikaji. Akan tetapi, PDF ini memiliki struktur yang lebih rumit dan sulit dari pada PDB dalam menyelesaikannya. Salah satu cara untuk menyelesaikan PDF ini adalah dengan menggunakan teorema titik tetap (TTT), yakni digunakan untuk menjamin adanya solusi dari model dengan PDF. TTT adalah teorema yang menyatakan bahwa suatu fungsi  $f: X \rightarrow X$  memiliki paling tidak satu titik tetap, yaitu titik yang dipetakan ke dirinya sendiri [12]. TTT dapat digunakan untuk membuktikan eksistensi dan ketunggalan solusi dari suatu PDF. Hal ini dapat dilihat dari penelitian [7] dan [11] yang mana teorema titik tetap Banach digunakan oleh [7] untuk menunjukkan eksistensi, ketunggalan dan ketak-negatifan dari solusi model yang ditawarkan. Sedangkan, pada [11] digunakan teorema titik tetap Schauders kedua dan teorema titik tetap Weissingers.

Berbeda dengan penelitian sebelumnya, pada penelitian ini, peneliti akan menunjukkan eksistensi solusi dari model penyebaran COVID-19 dalam PDF dengan menggunakan pendekatan TTT.

## 2. Landasan Teori

Pada bagian ini berisi teori-teori yang

mendukung pemecahan masalah, definisi, aksioma, dan lain-lain.

Menurut [13], *Coronavirus Disease* (COVID-19) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh SARS-CoV-2 coronavirus. Penyakit ini dapat menular dari partikel kecil cairan mulut dan hidung orang yang terinfeksi ketika batuk, bersin, berbicara, bernyanyi atau bahkan bernafas. Sebagian orang yang terinfeksi penyakit ini kemudian akan mengalami masalah pernafasan ringan hingga sedang dan sembuh tanpa memerlukan perawatan khusus. Namun, beberapa akan menjadi sakit parah dan membutuhkan perhatian medis yang serius hingga dapat mengakibatkan meninggal dunia.

**Definisi 1** [14] Misal  $p \in [1, \infty)$  dan  $\Omega$  merupakan subhimpunan buka dari  $\mathbb{R}$ , ruang Sobolev  $H^p(\Omega)$  didefinisikan sebagai

$$H^p(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\beta f \in L^2(\Omega), \text{ untuk setiap } \beta \leq p\}$$

**Definisi 2** [15] Suatu fungsi khusus

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}, \alpha \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}^{ABC}_b D_t^\alpha (f(t)) \}(p) &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \mathcal{L}\left\{ \int_b^t f'(x) E_\alpha \left[ -\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx \right\} \\ &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \left[ \frac{p^\alpha \mathcal{L}(f(t))(p) - p^{\alpha-1} f(0)}{p^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Definisi 5** [6] Misal  $f \in H^1(a, b)$ ,  $b > a$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Integral yang bersesuaian dengan turunan ABC didefinisikan sebagai

$$\Re(\alpha) > 0, z \in \mathbb{C}$$

dan bentuk umumnya

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \beta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \alpha, \beta \\ &\in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) \\ &> 0, z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

dengan  $\mathbb{C}$  adalah himpunan bilangan kompleks disebut **Fungsi Mittag-Leffler**.

**Definisi 3** [6] Misal  $f \in H^1(a, b)$ ,  $b > a$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Turunan fraksional Atangana-Baleanu secara Caputo (disingkat turunan ABC) didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} {}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t) &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t f'(x) E_\alpha \left[ -\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx, \end{aligned} \quad (2.2)$$

di mana  $B(\alpha)$  merupakan normalisasi fungsi yang didefinisikan sebagai  $B(\alpha) = \frac{\alpha}{2-\alpha}$  untuk setiap  $0 \leq \alpha < 1$ . Selain itu,  $E_\alpha$  adalah fungsi Mittag-Leffler yang merupakan perumuman dari fungsi eksponensial.

**Definisi 4** [6] Transformasi Laplace dari Persamaan (2.2) didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t) &= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) \\ &+ \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_b^t f(y)(t-y)^{\alpha-1} dy \end{aligned}$$

dengan  $\Gamma$  adalah fungsi gamma.

**Lema 6** [7] Solusi dari permasalahan

$${}^{ABC}D_0^\alpha f(t) = \sigma(t), \quad t \in [0, T], \quad f(0) = f_0$$

Untuk  $0 \leq \alpha < 1$  dengan sebarang fungsi  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  adalah  $f_0$  adalah suatu konstan tetap, adalah

$$f(t) = f_0 + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha-1} dy$$

Secara umum, teorema titik tetap digunakan untuk menjamin ada solusi dari suatu persamaan. pada bagian ini akan dibahas beberapa teorema titik tetap yang banyak digunakan di Persamaan Diferensial Fraksional.

**Definisi 7** [16] Misal  $T: X \rightarrow X$  untuk suatu himpunan tak kosong  $X$ . Titik tetap dari pemetaan  $T$  adalah suatu  $x \in X$  yang memenuhi  $Tx = x$

Selanjutnya, berikut ini teorema titik Banach yang dapat digunakan untuk menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap dari suatu operator.

**Teorema 8 (Teorema Titik Tetap Banach)** [17] Misal  $(U, d)$  merupakan ruang metrik lengkap yang tak kosong, misal  $0 \leq C < 1$ , dan misal  $T: U \rightarrow U$  merupakan suatu pemetaan sedemikian sehingga untuk  $u, v \in V$  berlaku

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v), \quad 0 \leq C \leq 1$$

Maka operator  $T$  memiliki titik tetap tunggal  $u^* \in U$ .

Lebih jauh, jika  $T^k$  (dengan  $k \in \mathbb{N}$ ) merupakan barisan operator yang didefinisikan sebagai  $T^1 = T$  dan  $T^k = TT^{k-1}$  untuk  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , maka untuk setiap  $u_0 \in U$ , barisan  $(T^k u_0)$

konvergen ke titik tetap  $u^*$ .

**Teorema 9 (Perumumam Teorema Titik Tetap Banach)** [17] Misal  $(U, d)$  merupakan ruang metrik lengkap takkosong, dan  $\omega_k \geq 0$  untuk sebarang  $k \in \mathbb{N}_0$  sedemikian sehingga deret  $\sum_{k=1}^\infty \omega_k$ . Lebih jauh, misal  $T: U \rightarrow U$  merupakan pemetaan sedemikian sehingga untuk setiap  $k \in \mathbb{N}$  dan untuk setiap  $u, v \in U$ , berlaku

$$d(T^k u, T^k v) \leq \omega_k d(u, v), \quad (k \in \mathbb{N})$$

Maka operator  $T$  memiliki titik tetap  $u^* \in U$  yang tunggal. Lebih jauh lagi, untuk sebarang  $u_0 \in U$ , barisan  $(T^k u_0)$  konvergen ke titik tetap  $u^*$ .

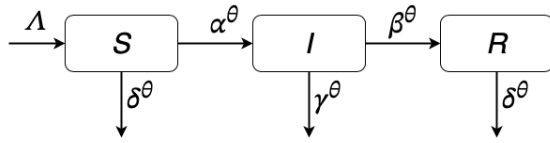
### 3. Hasil Dan Pembahasan

#### 3.1. Model penyakit COVID-19 dengan turunan ABC

Pada kasus COVID-19, populasi dapat dibagi menjadi tiga (3) kompartemen, yaitu populasi sehat namun rentan terinfeksi COVID-19 yang disebut variabel *susceptible* ( $S$ ), populasi orang yang telah menunjukkan gejala terinfeksi COVID-19 yang disebut variabel *infected* ( $I$ ), dan populasi orang yang telah sembuh dari COVID-19 yang disebut variabel *recovered* ( $R$ ). Jelas bahwa dalam hal ini, satuan jumlah masing-masing kompartemen ini adalah manusia.

Masing-masing individu di setiap kompartemen dapat berubah statusnya seiring dengan berjalannya waktu. Perubahan ini terjadi bergantung dari interaksi antar kompartemen lainnya dalam sistem. Hal ini menimbulkan adanya dinamika yang selalu terjadi dan berubah pada sistem interaksi tersebut. Pada pemodelan ini, digunakan persamaan diferensial dengan turunan

fraksional ABC. Berikut ini diagram perubahan status individual dari setiap kompartemen ke kompartemen lainnya.



**Gambar 1.** Diagram Transmisi COVID-19

Dengan model sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 {}^{ABC}D_0^\alpha S(t) &= \Lambda - \alpha^\theta S(t) \frac{I(t)}{N} \\
 &\quad - \delta^\theta \frac{S(t)}{N} \\
 {}^{ABC}D_0^\alpha I(t) &= \alpha^\theta S(t) \frac{I(t)}{N} \\
 &\quad - \beta^\theta I(t) \frac{R(t)}{N} \\
 &\quad - \gamma^\theta \frac{I(t)}{N} \\
 {}^{ABC}D_0^\alpha R(t) &= \beta^\theta I(t) \frac{R(t)}{N} \\
 &\quad - \delta^\theta \frac{R(t)}{N}
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Keterangan

$S(t)$  : Populasi rentan pada saat  $t$

$I(t)$  : Populasi individu yang telah terinfeksi pada saat  $t$

$R(t)$  : Populasi individu yang telah sembuh pada saat  $t$

$N$  : Total populasi ( $N = S(t) + I(t) + R(t)$ )

$\alpha^\theta, \beta^\theta$  : Laju individu terpapar penyakit dan sembuh dari COVID-19 berturut-turut

$\delta^\theta, \gamma^\theta$  : Laju kematian normal dari individu rentan, individu

terinfeksi dan individu sembuh

$\Lambda$  :  $\Lambda = \kappa N$  dengan  $\kappa$  laju kelahiran

dengan syarat awal

$$\begin{aligned}
 S(0) &= S_0 \\
 I(0) &= I_0 \\
 R(0) &= R_0
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Beberapa asumsi penting yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Laju kematian normal dan kelahiran sama
2. Kematian dengan penyebab yang normal ditunjukkan pada kompartemen  $S$  dan  $R$
3. Laju individu yang meninggal sebagai akibat dari terinfeksi penyakit dinyatakan sebagai  $\gamma^\theta \frac{I(t)}{N}$
4. Jumlah individu yang meninggal dari masing-masing kompartemen dinyatakan dalam  $\nu N = \delta^\theta \frac{S(t)}{N} + \gamma^\theta \frac{I(t)}{N} + \delta^\theta \frac{R(t)}{N}$
5. Kematian karena bencana lainnya memiliki efek minimal pada populasi, sehingga diabaikan pada penelitian ini.

Selanjutnya, misalkan  $f: C[0, T]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , diperoleh

$$f(t) = \begin{pmatrix} \frac{S(t)}{N} \\ \frac{I(t)}{N} \\ \frac{R(t)}{N} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$${}^{ABC}D_0^\alpha f(t) = \begin{pmatrix} {}^{ABC}D_0^\alpha S(t) \\ {}^{ABC}D_0^\alpha I(t) \\ {}^{ABC}D_0^\alpha R(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix}$$

$$f_0 = f(0) = \begin{pmatrix} \frac{S(0)}{N} \\ \frac{I(0)}{N} \\ \frac{R(0)}{N} \end{pmatrix}$$

dan misalkan  $G: [0, T] \times R(f) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , didefinisikan

$$G(t, f(t)) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix}.$$

Maka, menurut Lema 6 solusi dari (3.3) adalah

$$f(t) := f_0 + \frac{1-\theta}{B(\theta)} G(t, f(t)) + \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} G(s, f(s)) ds \quad (3.4)$$

Asumsikan pada Persamaan (3.4) bahwa

(A1) Terdapat konstanta  $a_1, a_2 > 0$  sedemikian sehingga

$$|G(t, f(t))| \leq a_1 \|f\| + a_2 \quad (3.5)$$

untuk setiap  $t \in [0, T]$

(A2) Terdapat  $a_3 > 0$  sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} |G(t, f(t)) - G(t, \bar{f}(t))| & \leq a_3 |f(t) - \bar{f}(t)| \end{aligned} \quad (3.6)$$

untuk setiap  $f, \bar{f} \in \mathbb{F}$  dan  $t \in [0, T]$ .

### 3.2. Eksistensi dan Ketunggalan Solusi

Misalkan Didefinisikan  $\mathbb{F} := C[0, T] \times C[0, T] \times C[0, T]$  untuk  $0 < T < \infty$  dengan norm pada  $\mathbb{F}$  adalah norm *taxicab* dan  $\mathcal{T}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  dengan

$$\begin{aligned} \mathcal{T}f &:= f_0 + \frac{1-\theta}{B(\theta)} G(t, f(t)) + \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} G(s, f(s)) ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Lema 10** Operator  $\mathcal{T}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  sebagaimana

Persamaan (3.7) adalah *completely* kontinu.

Bukti: Perhatikan bahwa untuk setiap  $f \in \mathbb{F}$  maka  $\mathcal{T}f \in \mathbb{F}$ . Kemudian, untuk setiap  $f \in D_Z := \{f \in \mathbb{F} : \|f\| \leq Z\}$  untuk suatu  $Z \in \mathbb{R}^+$ , diperoleh

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}f)(t)| &\leq \|f_0\| + \frac{1-\theta}{B(\theta)} \max_{t \in [0,1]} |G(t, f(t))| + \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} \max_{t \in [0,1]} |G(s, f(s))| ds \\ &\leq \|f_0\| + \left( \frac{1-\theta}{B(\theta)} + \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} ds \right) (a_1 \|f\| + a_2) \\ &\leq \|f_0\| + \left( \frac{1-\theta}{B(\theta)} + \frac{T^\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \right) (a_1 \|f\| + a_2) < +\infty \end{aligned}$$

Hal ini mengakibatkan  $\|\mathcal{T}f\| \leq +\infty$ . Akibatnya,  $\mathcal{T}$  terbatas seragam pada  $D_Z$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $\mathcal{T}$  ekuikontinu. Misal  $f \in D_Z$  dan  $t_1, t_2 \in [0, T]$  sedemikian sehingga  $t_1 < t_2$ . Maka

$$|\mathcal{T}f(t_2) - \mathcal{T}f(t_1)| \leq \frac{(a_1 Z + a_2)}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \left( 2(t_2 - t_1)^\theta + (t_2^\theta - t_1^\theta) \right)$$

Pada saat  $t_1 \rightarrow t_2$ , sisi kanan akan menuju ke 0. Akibatnya, menurut teorema Arzelá-Ascoli,  $\mathcal{T}$  kompak dan karenanya *completely continuous*. ■

**Teorema 11** Asumsikan bahwa  $G: [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu dan (A1) terpenuhi. Maka Persamaan (3.4) yang mana ekuivalen dengan model (3.1)-(3.2) memiliki paling tidak satu solusi.

Bukti: Pandang  $\mathcal{F} := \{f \in \mathbb{F} : f = \delta(\mathcal{T}f)(t), 0 < \delta < 1\}$ . Menurut Lema 10, jelas bahwa  $\mathcal{T}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  yang didefinisikan sebagaimana di Persamaan (3.7) *completely continuous*. Dari (A1), untuk setiap  $f \in \mathcal{F}$ , diperoleh

$$\begin{aligned}
|f(t)| &= |\delta(\mathcal{T}f)(t)| \\
&\leq \|f_0\| + \frac{1-\theta}{B(\theta)} |G(t, f(t))| + \\
&\quad \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} |G(s, f(s))| ds \\
&\leq \|f_0\| + \frac{1-\theta}{B(\theta)} (a_1 \|f\| + a_2) + \\
&\quad \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} (a_1 \|f\| + a_2) ds \\
&\leq \|f_0\| + C(a_1 \|f\| + a_2) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

di mana  $C := \left( \frac{1-\theta}{B(\theta)} + \frac{T^\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \right)$ . Hal ini mengakibatkan  $\|f\| \leq +\infty$ . Akibatnya,  $\mathcal{F}$  terbatas. Jadi operator ini memiliki paling tidak satu titik tetap, yang merupakan solusi dari model (3.1)-(3.2). ■

**Teorema 12** Misal  $f \in \mathbb{F}$  dan  $f$  memetakan subhimpunan terbatas dari  $[0, T]$  ke subhimpunan kompak relatif dari  $\mathbb{R}^3$ . Maka Persamaan (3.4) memiliki solusi tunggal bersama dengan  $\tilde{C}_1, Ca_3 < 1$  di mana

$$C := \left( \frac{1-\theta}{B(\theta)} + \frac{T^\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \right), \quad (3.8)$$

dan

$$\tilde{C}_1 := \left( \frac{1-\theta}{B(\theta)} + \frac{T^\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \right) a_1, \quad (3.9)$$

Bukti : Misal operator  $\mathcal{T}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  didefinisikan untuk setiap  $f \in \mathbb{F}$  sebagai

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}f)(t) &:= f_0 + \frac{1-\theta}{B(\theta)} G(t, f(t)) \\
&\quad + \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} G(s, f(s)) ds
\end{aligned}$$

untuk setiap  $t \in [0, T]$ . Terlihat bahwa operator  $\mathcal{T}$  terdefinisi dengan baik dan solusinya tunggal yakni titik tetap dari  $\mathcal{T}$ . Pandang

$D_Z = \{f \in \mathbb{F} : \|f\| \leq Z\}$  sebagai himpunan tutup dan konveks dengan  $Z \geq \frac{\tilde{C}_2}{1-\tilde{C}_1}$  dengan

$$\tilde{C}_2 := \|f_0\| \left( \frac{1-\theta}{B(\theta)} + \frac{T^\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \right) a_2, \quad (3.10)$$

Jadi, terlihat bahwa  $\mathcal{T}D_Z \subset D_Z$ . Yaitu, untuk setiap  $f \in D_Z$ , berlaku

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{T}f)(t)| &\leq \|f_0\| + \frac{1-\theta}{B(\theta)} |G(t, f(t))| + \\
&\quad \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} |G(s, f(s))| ds \\
&\leq \|f_0\| + \frac{1-\theta}{B(\theta)} (a_1 \|f\| + a_2) + \\
&\quad \frac{\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \int_0^t (t-s)^{\theta-1} (a_1 \|f\| + a_2) ds \\
&\leq \|f_0\| + \left( \frac{1-\theta}{B(\theta)} + \frac{T^\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \right) a_2 + \\
&\quad \left( \frac{1-\theta}{B(\theta)} + \frac{T^\theta}{B(\theta)\Gamma(\theta)} \right) a_1 Z \\
&= \tilde{C}_2 + \tilde{C}_1 Z \\
&\leq Z
\end{aligned}$$

Kemudian, ambil sebarang  $f_1, f_2 \in \mathbb{F}$  dan  $t \in [0, T]$ . Maka, diperoleh

$$\|\mathcal{T}f_1 - \mathcal{T}f_2\| \leq Ca_3 \|f_1 - f_2\|.$$

Oleh karena  $Ca_3 < 1$ , maka  $\mathcal{T}$  adalah pemetaan kontraktif Banach. Akibatnya Persamaan 3.4 memiliki solusi tunggal. Lebih jauh, model (3.1) dengan kondisi awal (3.2) memiliki solusi tunggal. ■

### 3.3. Sifat Model

Pada bagian ini, akan dikaji keterbatasan dan kepositifan solusi untuk  $t \geq 0$ .

**Teorema 13** Solusi pada sistem (3.1) terbatas.

Bukti: Untuk memperoleh turunan fraksional dari total populasi, dijumlahkan semua relasi di sistem (3.1), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
{}^{ABC}D_0^\alpha N(t) &= {}^{ABC}D_0^\alpha S(t) + {}^{ABC}D_0^\alpha I(t) + {}^{ABC}D_0^\alpha R(t) \\
&= \Lambda - \delta^\theta \frac{S(t)}{N} - \gamma^\theta \frac{I(t)}{N} - \delta^\theta \frac{R(t)}{N} \\
{}^{ABC}D_0^\alpha N(t) &= \Lambda - \nu N(t). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Dengan melakukan transformasi Laplace pada persamaan ini, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left({}^{ABC}D_0^\alpha N(t)\right)(p) &= \mathcal{L}(\Lambda - \nu N(t))(p) \\
&= \frac{\Lambda}{p} - \nu \mathcal{L}(N(t))(p)
\end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left({}^{ABC}D_0^\alpha N(t)\right)(p) &= \frac{B(\theta)}{1-\theta} \left( \frac{p^\theta \mathcal{L}(N(t))(p) - p^{\theta-1} N(0)}{p^\theta + \frac{\theta}{1-\theta}} \right) \\
&= \frac{B(\theta)p^\theta \mathcal{L}(N(t))(p)}{(1-\theta)p^\theta + \theta} - \frac{B(\theta)p^{\theta-1} N(0)}{(1-\theta)p^\theta + \theta}
\end{aligned}$$

dengan  $N(0)$  adalah nilai awal dari total populasi dan  $B$  adalah fungsi normalisasi. Akibatnya

$$\begin{aligned}
&\frac{B(\theta)p^\theta \mathcal{L}(N(t))(p)}{(1-\theta)p^\theta + \theta} + \nu \mathcal{L}(N(t))(p) \\
&= \Lambda p^{\theta-(\theta+1)} + \frac{B(\theta)p^{\theta-1} N(0)}{(1-\theta)p^\theta + \theta}
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(N(t))(p) \\
&= \frac{\Lambda \left( (1-\theta)p^\theta + \theta \right) p^{\theta-(\theta+1)} + B(\theta)p^{\theta-1} N(0)}{B(\theta)p^\theta + \nu(1-\theta)p^\theta + \nu\theta}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan invers transformasi Laplace, diperoleh

$$N(t) = \frac{\Lambda \theta t^\theta}{(1-\theta)\nu + B(\theta)} E_{\theta, \theta+1}(-qt^\theta)$$

$$+ \left( \frac{\Lambda(1-\theta)}{(1-\theta)\nu + B(\theta)} + \frac{B(\theta)N(0)}{B(\theta) + (1-\theta)\nu} E_{\theta, 1}(-qt^\theta) \right)$$

di mana  $q = \frac{\theta}{B(\theta) + (1-\theta)\nu}$  dan  $E_{a,b}$  adalah fungsi Mittag-Leffler dengan dua parameter  $a, b > 0$  yang didefinisikan sebagai

$$E_{a,b}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(an+b)},$$

dengan transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\left(t^{b-1} E_{a,b}(\pm q t^a)\right)(p) = \frac{p^{a-b}}{p^a \mp q}$$

Menyebabkan  $p > |q|^{1/a}$ . Untuk  $a, b > 0$ , fungsi Mittag-Leffler memenuhi

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{z} \left( E_{a,b-a}(z) - \frac{1}{\Gamma(b-a)} \right)$$

dan untuk kasus  $a = \theta, b = \theta + 1$  dan  $z = -qt^\theta$ , diperoleh

$$E_{\theta, \theta+1}(-qt^\theta) = \frac{1}{p t^\theta} (1 - E_{\theta, 1}(-qt^\theta))$$

Menurut [6], diperoleh bahwa fungsi Mittag-Leffler tersebut terbatas untuk setiap  $t > 0$  dan memiliki perilaku asimtotik. Oleh karena itu, menurut (3.11) dan (3.12) berlaku  $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\nu}$  saat  $t \rightarrow \infty$ . Jadi,  $N(t)$  dan semua variabel lainnya terbatas di daerah

$$\begin{aligned}
B &= \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq N \right. \\
&\quad \left. \leq \frac{\Lambda}{\nu}; S, I, R \geq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Pada saat  $x_0 = 0$ , diperoleh solusi  $x = 0$  untuk semua  $t > 0$ . Lebih jauh, untuk setiap himpunan nilai awal tak negatif di  $B$ , setiap solusi model (3.1) di  $\mathbb{R}_+^3 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}$  dengan  $y(t) = (S, I, R)^T$  mendekati secara asimtotik dalam waktu yang berhingga, memasuki dan terus



berada di  $B$ . Jadi, himpunan tutup  $B$  adalah invarian positif untuk sistem (3.1) ■

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap  $t \geq 0$ , variabel  $S, I, R$  bernilai positif.

**Teorema 14** Ruang solusi  $(S, I, R)$  dari sistem (3.1) selalu bernilai positif untuk sebarang nilai awal tak negatif.

Bukti : Pada persamaan pertama dalam model (3.1) dapat diperoleh

$${}^{ABC}D_0^\alpha S(t) \geq -\left(\frac{1}{N} (\alpha^\theta I(t) + \delta^\theta) S(t)\right).$$

Oleh karena semua solusinya terbatas, misal  $\frac{I(t)}{N}$  terbatas oleh  $\rho_I$ . Maka

$${}^{ABC}D_0^\alpha S(t) \geq -(\alpha^\theta \rho_I + \delta^\theta) S(t)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan transformasi Laplace, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{B(\theta)p^\theta \mathcal{L}(S(t))(p)}{(1-\theta)p^\theta + \theta} - \frac{B(\theta)p^{\theta-1}S(0)}{(1-\theta)p^\theta + \theta} \\ \geq -(\alpha^\theta \rho_I + \delta^\theta) \mathcal{L}(S(t))(p) \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S(t))(p) \geq \frac{B(\theta)p^{\theta-1}S(0)}{B(\theta) + (\alpha^\theta \rho_I + \delta^\theta)(1-\theta)} \\ \cdot \frac{p^{\theta-1}}{s^\theta + \frac{(\alpha^\theta \rho_I + \delta^\theta)\theta}{B(\theta) + (\alpha^\theta + \delta^\theta)(1-\theta)}}. \end{aligned}$$

Kemudian, dengan menggunakan invers transformasi Laplace diperoleh

$$\begin{aligned} S(t) > \frac{B(\theta)s^{\theta-1}S(0)}{B(\theta) + (\alpha^\theta \rho_I + \delta^\theta)(1-\theta)} \cdot \\ \left(E_{\theta,1} \left(-t^\theta \frac{(\alpha^\theta \rho_I + \delta^\theta)\theta}{B(\theta) + (\alpha^\theta + \delta^\theta)(1-\theta)}\right)\right). \end{aligned}$$

Oleh karena nilai sisi kanan bernilai positif,

maka  $S(t)$  bernilai positif untuk setiap  $t > 0$ . Dengan cara yang sama, untuk setiap  $t \geq 0$  dengan sebarang nilai awal tak negatif, dan dapat dinyatakan bahwa  $I > 0$  dan  $R > 0$ . Akibatnya, solusi di  $\mathbb{R}_+^3$  selalu bernilai positif. ■

Dari teorema ini, telah terbukti bahwa model yang digunakan memiliki solusi yang tunggal dan bernilai positif, sehingga dapat digunakan untuk mencari titik kesetimbangan guna mempelajari perilaku penyebaran penyakit.

#### 4. Kesimpulan

Penelitian ini memberikan hasil bahwa model penyebaran penyakit sebagaimana yang termuat pada (3.1) dengan kondisi awal (3.2) memiliki solusi dengan menggunakan teorema titik tetap Banach. Selain itu, juga ditunjukkan bahwa solusi yang diperoleh selalu bernilai tak negatif untuk setiap  $t > 0$ . Hal ini berarti model tersebut dapat digunakan untuk melihat perilaku penyebaran penyakit menggunakan turunan fraksional ABC. Maka diharapkan adanya penelitian lanjutan yang dapat menggunakan model yang penulis telah ajukan, untuk menganalisis kestabilan dan simulasi numerik pada perilaku penyebaran model penyakit tersebut.

Penelitian ini memberikan hasil bahwa model penyebaran penyakit sebagaimana yang termuat pada (3.1) dengan kondisi awal (3.2) memiliki solusi dengan menggunakan teorema titik tetap Banach. Selain itu, juga ditunjukkan bahwa solusi yang diperoleh selalu bernilai tak negatif untuk setiap  $t > 0$ . Hal ini berarti model tersebut dapat digunakan untuk melihat perilaku penyebaran penyakit menggunakan turunan fraksional ABC. Maka diharapkan adanya penelitian lanjutan yang dapat menggunakan model yang penulis telah ajukan, untuk menganalisis kestabilan dan simulasi numerik pada perilaku penyebaran model penyakit tersebut.

### Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) UIN Imam Bonjol Padang atas hibah yang diberikan dan kepada Program studi Matematik UIN Imam Bonjol Padang, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini.

### Daftar Pustaka

- [1] M. A. Baihaqi, P. B. Al-Kubro, R. A. Andayani, Y. Setyawati, U. B. Rahayu, dan M. Fitriyya, "Pola penyebaran penyakit demam berdarah dengan model SIR di Madiun tahun 2020-2022," *J. Keilmuan Dan Keislaman*, hlm. 1–9, 2024.
- [2] M. S. Arif, K. Abodayeh, dan Y. Nawaz, "Construction of a Computational Scheme for the Fuzzy HIV/AIDS Epidemic Model with a Nonlinear Saturated Incidence Rate.," *CMES-Comput. Model. Eng. Sci.*, vol. 138, no. 2, 2024.
- [3] M. Syafii, L. O. Sabran, dan I. D. Rianjaya, "Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS dengan Edukasi Dan Art Treatment," *MES J. Math. Educ. Sci.*, vol. 9, no. 1, hlm. 31–44, 2023.
- [4] F. Ainiyah, M. D. Pratamadirdja, D. Fitri, Ferdania, dan M. Fakhruddin, "Mathematical modeling of COVID-19 dynamics with considering ABO blood type," dipresentasikan pada YOUNG SCHOLAR SYMPOSIUM ON SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION, AND ENVIRONMENT, AIP Publishing LLC, 2023, hlm. 070002.
- [5] F. Adi-Kusumo, N. Susyanto, I. Endrayanto, dan A. Meliala, "Model berbasis SIR dalam prediksi awal penyebaran covid-19 di daerah istimewa Yogyakarta (DIY)," *J. Mat. Thales*, vol. 2, no. 1, 2020.
- [6] A. Atangana dan D. Baleanu, "New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model," *ArXiv Prepr. ArXiv160203408*, 2016.
- [7] W. Sintunavarat dan A. Turab, "Mathematical analysis of an extended SEIR model of COVID-19 using the ABC-fractional operator," *Math. Comput. Simul.*, vol. 198, hlm. 65–84, 2022.
- [8] A. S. Mata dan S. M. Dourado, "Mathematical modeling applied to epidemics: an overview," *São Paulo J. Math. Sci.*, vol. 15, no. 2, hlm. 1025–1044, 2021.
- [9] A. Abdullahi dan M. H. Mohd, "Dynamics of Caputo fractional-order SIRV model: The effects of imperfect vaccination on disease transmission," *Int. J. Biomath.*, vol. 17, no. 04, hlm. 2350041, 2024.
- [10] K. Nisa, H. Rahman, dan A. Kusumastuti, "Model Epidemi Suspected Exposed Infected Recovered (SEIR) Pada Penyebaran COVID-19 Orde-Fraksional," *J. Ris. Mhs. Mat.*, vol. 1, no. 3, hlm. 156–164, Feb 2022, doi: 10.18860/jrmm.v1i3.14440.
- [11] V. S. Erturk dan P. Kumar, "Solution of a COVID-19 model via new generalized Caputo-type fractional derivatives," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 139, hlm. 110280, 2020.
- [12] J. Yong, *Mathematical Analysis: A Concise Introduction*. World Scientific, 2020.
- [13] WHO, "Coronavirus disease (COVID-19)." Diakses: 20 Oktober 2024. [Daring]. Tersedia pada: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/coronavirus-disease->

(covid-19)

- [14] M. Syam dan M. Al-Refai, "Fractional differential equations with Atangana–Baleanu fractional derivative: analysis and applications," *Chaos Solitons Fractals X*, vol. 2, hlm. 100013, 2019.
- [15] H. J. Haubold, A. M. Mathai, dan R. K. Saxena, "Mittag-Leffler functions and their applications," *J. Appl. Math.*, vol. 2011, no. 1, hlm. 298628, 2011.
- [16] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, vol. 17. John Wiley & Sons, 1991.
- [17] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, dan J. J. Trujillo, Ed., "Chapter 1 Preliminaries," dalam *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204, dalam North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. , North-Holland, 2006, hlm. 1–68. doi: 10.1016/S0304-0208(06)80002-2.