UIN IMAM BONJOL PADANG

MAP Journal
Mathematics & Applications

Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

METODE KONDENSASI DODGSON DAN CHIO UNTUK PERHITUNGAN DETERMINAN MATRIKS

DODGSON AND CHIO CONDENSATION METHODS FOR DETERMINANT CALCULATION

Annisa Maula Zakiya[1§], Suci Yefri Fadhilah[2], Widya Reza[2]

[1]Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, [annisamaula@uinib.ac.id]
[2]Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang
[§]*Corresponding Author*

Received 18th Mar 2026; Accepted 16th Apr 2026; Published 23rd Apr 2026;

Abstrak

Perhitungan determinan matriks persegi berordo $n \times n$, dinotasikan dengan $\det(A)$ merupakan salah satu operasi paling mendasar dalam aljabar linear dengan aplikasi yang meluas di sistem persamaan linear, teori kontrol, dan geometri. Terdapat berbagai metode yang dapat digunakan untuk menghitung suatu matriks, di antaranya metode Dodgson dan metode Chio. Kedua metode ini sudah dikenal sebagai metode kondensasi yang bertujuan menyederhanakan perhitungan determinan matriks berordo besar. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan membandingkan algoritma metode Dodgson dan metode Chio pada matriks khusus, yaitu matriks sirkulan. Metode penelitian yang digunakan adalah analisis matematis terhadap langkah-langkah algoritma pehitungan determinan matriks dengan metode Dodgson dan metode Chio. Hasil penelitian ini memperoleh hasil yaitu terdapat kondisi khusus pada matriks sirkulan berordo 4×4 yang menyebabkan determinannya bernilai nol. Dari segi komputasi metode Dodgson mensyaratkan elemen interior matriks tidak bernilai nol, sedangkan metode Chio hanya mensyaratkan elemen $a_{11} \neq 0$. Oleh karena itu, metode Chio cenderung lebih stabil dan dleksibel dibandingkan metode Dodgson dalam perhitungan determinan matriks.

Kata Kunci: Determinan, Metode Dodgson, Metode Chio, matriks sirkulan.

Abstract

The computation of the determinant of $n \times n$ square matrix, denoted by $\det(A)$ is one of the most fundamental operations in linear algebra, with wide applications in systems of linear equations, control theory, and geometry. Various methods can be used to compute the determinant of a matrix, including the Dodgson method and the Chio method. Both methods are known as condensation techniques that aim to simplify the computation of determinants of large-order matrices. The study aims to analyze and compare the algorithms of the Dodgson and Chio methods when applied to a special class of matrices, namely circulant matrices. The research method employed is a mathematical analysis of the algorithmic steps involved in computing matrix determinants using both methods. The results show thar there a specific condition for 4×4 circulant matrices under which the determinant becomes zero. From a computational perspective, the Dodgson method requires all interior elements

of the matrix to be nonzero, whereas the Chio method only requires the leading element $a_{11} \neq 0$. Therefore, the Chio method tends to be more stable and flexible compared to the Dodgson method in computing matrix determinants.

***Keywords**: Determinant, Dodgson Method, Chio's Method, Circulant Matrices*

1. Pendahuluan

Matriks merupakan salah satu objek fundamental dalam aljabar linear yang banyak digunakan dalam berbagai bidang matematika terapan maupun komputasi numerik. Secara umum, matriks didefinisikan sebagai susunan bilangan real atau kompleks yang disajikan dalam bentuk baris dan kolom. Pada teori matriks, determinan merupakan nilai skalar yang berkaitan dengan matriks persegi. Determinan sering digunakan untuk menentukan nilai invers suatu matriks, menyelesaikan sistem persamaan linear dan masih banyak lagi. Nilai determinan mengintegrasikan informasi struktur penting tentang matriks, termasuk invertibilitas, volume transformasi linear yag direpresentasikan oleh matriks, dan nilai eigen.

Metode klasik untuk menghitung determinan diantaranya mereduksi baris, ekspansi kofaktor, dan menggunakan aturan cramer[1], [2]. Metode determinan telah berkembang sejak abad ke-19 dan tetap relevan hingga kini. Adapun metode determinan yang berkembang saat ini adalah metode Dodgson dan metode Chio. Metode Dodgson dikembangkan oleh Charles L. Dodgson, menggunakan serangkaian operasi yang mereduksi dimensi matriks secara bertahap melalui perhitungan determinan minor 2×2 dan rasio antar elemen. Metode ini elegan dari perspektif matematika namun memiliki karakteristik numerik yang perlu dikaji lebih lanjut [3], [4] [5]. Metode Chio, menggunakan operasi baris elementer yang akrab dalam konteks eliminasi Gauss, dengan modifikasi untuk mempertahankan factor koreksi yang tepat. Metode ini lebih praktis dalam implementasi dan menunjukkan stabilitas numerik yang lebih baik[6].

Meskipun kedua metode ini telah dikenal lama, perbedaan sistematis yang fokus pada aspek teoritis masih jarang ditemukan dalam literatur akademik. Sebagian besar literatur hanya memperkenalkan motode secara individual tanpa analisis komparatif yang mendalam. Kesenjangan ini menegaskan pentingnya studi yang menganalisis kedua metode memalui tinjauan teoritis. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan membandingkan algoritma metode Dodgson dan metode Chio pada matriks khusus, yaitu matriks sirkulan.[7], [8].

2. Landasan Teori

Menurut Anton-Rorres informasi dalam matematika seringkali ditampilkan dalam bentuk bars-baris dan kolom-kolom yang berbentuk jajaran empat persegi Panjang yag disebut matriks. Determinan adalah suatu fungsi khusus yang mengaitkan matriks bujur sangkar dengan suatu bilangan real.

Definisi 2.1 [1] Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Fungsi Determinan dinotasikan dengan det dan didefinisikan det(A) sebagai determinan dari A.

Teorema 2.1 [1] Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar.

(a) Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka det(A)=0.
(b) $\det(A) = \det(A^T)$

Teorema 2.2 [1] Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, dan jika $T_A: R^n \rightarrow R^n$ adalah perkalian dengan A, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen

a) A dapat dibalik

b) $Ax = 0$ hanya memiliki solusi trivial
c) $\det(A) \neq 0$
d) vektor-vektor baris pada A adalah bebas linear

Matriks Toeplitz adalah salah satu dari banyaknya jenis matriks. Matriks ini sepenuhnya ditentukan oleh baris pertama dan kolom pertama.

Definisi 2.2 [8] Matriks Toeplitz adalah matriks berordo $n \times n$ $T_n = t_{k,j}; k, j = 0, 1, \dots, n-1$, dimana $t_{k,j} = t_{k-j}$, dengan kata lain bentuk matriksnya adalah

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & \vdots \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & \dots & \dots & t_0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3 [8] Matriks sirkulan C adalah matriks yang mengalami pergeseran secara siklik dari kiri ke kanan untuk setiap baris kedua dan seterusnya, matriks ini adalah bentuk khusus dari matriks Toeplitz, Matriks sirkulan ini berbentuk

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{n-1} \\ C_{n-1} & C_0 & C_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & C_{n-1} & C_0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & C_1 \\ C_1 & \dots & \dots & C_{n-1} & C_0 \end{bmatrix}$$

Dapat juga ditulis dalam bentuk $C_n = (C_0, C_1, C_{2,\dots,} C_{n-1})$

2.1 Determinan dan Sifat-sifatnya.

Definisi 2.1.1 [1]

Determinan merupakan suatu fungsi dari matriks bujur sangkar $n \times n$ ke suatu bilangann real.

Matriks berordo 2×2 , $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $\det(A) = ad - bc$. Rumus umum determinan, seringkali ditulis secra simbolis sebagai $\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots . a_{nj_n}$, Dimana Σ menunjukkan bahwa suku-suku harus dijumlahkan untuk semua permutasi $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ dan tanda $+$ atau $-$ dipilih untuk setiap suku tergantung pada apakah permutasinya genap atau ganjil.

Berikut diberikan sifat-sifat mendasar dari determinan.

Teorema 2.1.1 [2]

Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar.

(a) Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan 0, maka $\det(A) = 0$.
(b) $\det(A) = \det(A^T)$

Teorema 2.1.2 [1]

Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ (matriks segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka $\det(A)$ adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

Teorema 2.1.3 [1]

Jika A adalah suatu matriks bujursangkar dengan dua baris atau dua kolom yang proporsional, maka

$\det(A) = 0$.

Teorema 2.1.4 [1]

Jika B adalah suatu matriks $n \times n$ dan E adalah suatu matriks elementer $n \times n$, maka

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Teorema 2.1.5 [1]

Suatu matriks bujursangkar A dapat dibalik, jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

Teorema 2.1.6 [1]

Jika A dan B adalah matriks-mariks bujursangkar dengan ordo yang sama, maka

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Teorema 2.1.7 [1]

Jika A dapat dibalik, maka

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (1)$$

Definisi 2.1.2 [1]

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan takkosong vektor-vektor, maka persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r = 0$$

Memiliki paling tidak satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan bebas linear. Jika terdapat solusi - solusi lain, maka S disebut sebagai himpunan tidak bebas linear.

Teorema 2.1.8 [1]

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen:

(a) A dapat dibalik.
(b) $Ax = 0$ hanya memiliki solusi trivial.
(c) $\det(A) \neq 0$.
(d) Vektor-vektor baris dari A adalah bebas linear.
(e) Vektor-vektor kolom dari A adalah bebas linear.

2.2 Metode Dodgson

Metode Dodgson adalah algoritma kondensasi yang mereduksi matriks $n \times n$ menjadi matriks $(n-1) \times (n-1)$, kemudian $(n-2) \times (n-2)$ dan seterusnya hingga diperoleh matriks berordo 1×1. Proses reduksi ini dilakukan secara bertahap dengan memanfaatkan determinan minor berordo dua. Secara teoritis, metode kondensasi Dodgson berlandaskan pada teorema Jacobi mengenai hubungan antara minor-minor matriks.

Teorema 2.2.1. [9] Teorema Jacobi

Misalkan A adalah matriks $n \times n$, dan A_{ij} adalah suatu minor berordo $m \times m$ dari A, dimana $m < n$. Misalkan $\left[A'_{ij}\right]$ merupakan minor berordo $m \times m$ yang bersesuaian dengan matriks A', dan misalkan $\left[A'_{ij}\right]$

Adalah minor berkomplemen berordo $(n-1) \times (n-1)$ dari matriks A. Maka berlaku

$$det\left[A'_{ij}\right] = (\det A)^{m-1} \cdot \det\left[A^*_{ij}\right] \quad (2)$$

Teorema Jacobi ini menyatakan hubungan antara determinan minor suatu matriks dengan determinan matriks asalnya serta determinan minor komplemennya. Teorema ini menjadi dasar

teoritis bagi metode Dodgson dalam perhitungan determinan matriks.

Saat $m = 2$, Dodgson menyadari bahwa determinan dari A, dapat diperoleh dengan

$$det[A] = \frac{det\left[A'_{ij}\right]}{\det\left[A^*_{ij}\right]}. \quad (3)$$

Berikut diberikan definisi dari minor dan interior pada matriks.

Definisi 2.2.1. [9]

Untuk suatu matriks $n \times n$, mirror adalah setiap $(n-m) \times (n-m)$ matriks yang diperoleh dari menghapus m baris dan m kolom dari matriks pertama.

Contoh 2.2.1. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, berdasarkan Definisi 2.2.1, maka $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ adalah minor 2×2 dari pojok kiri atas matriks A.

Definisi 2.2.2. [9]

Interior dari matriks adalah matriks yang diperoleh dari menghapus baris pertama, baris terakhir, kolom pertama, dan kolom terakhir dari matriks tersebut.

Contoh 2.2.2. Berdasarkan Definisi 2.2.2, interior dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.3. Metode Chio

Metode Chio juga dikenal sebagai Chio condensation method, merupakan suatu teknik menghitung determinan suatu matriks dengan cara mengurangi ordo matriks secara sistematis. Metode ini bekerja dengan memilih sebuah elemen pivot dan menggunakannya untuk menghilangkan elemen-elemen lain dalam matriks, sehingga ordo matriks berkurang satu pada setiap langkah.

Teorema 2.3.1 [2] Misalkan $A = a_{ij}$ adalah matriks $n \times n$ dengan $a_{11} \neq 0$. Misalkan D dinotasikan sebagai matriks yang diperoleh dengan mengganti setiap elemen a_{ij} pada A dengan $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{ij} \\ a_{i1} & a_{ji} \end{vmatrix}$, maka

$$|A| = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad (4)$$

3. Hasil Dan Pembahasan

Untuk mengetahui kelebihan dan kekurangan masing-masing metode, kita akan melakukan perhitungan determinan dengan menggunakan kedua metode, yaitu metode Dodgson dan metode Chio.

3.1 Determinan Matriks Menggunakan Metode Dodgson

Berikut diberikan langkah-langkah kondensasi Dodgson:

1. Periksa bagian interior dari matriks A, yaitu submatriks berordo $(n-2) \times (n-2)$ yang diperoleh dengan menghapus baris pertama, baris terakhir, kolom pertama, dan kolom terakhir.

Jika terdapat elemen nol pada bagian ini, lakukan operasi baris elementer untuk menghilangkannya.

2. Hitung determinan dari setiap kelompok empat elemen yang saling berdekatan pada matriks A. Hasil perhitungan ini membentuk suatu matriks baru B yang berordo $(n-1)\times(n-1)$.
3. Ulangi proses pada Langkah kedua terhadap matriks baru B, hingga terbentuk matriks berordo $(n-2)\times(n-2)$. Kemudian bagi setiap elemennya dengan elemen yang bersesuaian pada bagian interior matriks awal.
4. Proses kondensasi dilanjutkan secara bertahap hingga diperoleh matriks berordo 1×1, yang nilainya merupakan determinan dari matriks A.

Analisis dalam penelitian ini difokuskan pada karakteristik entri-entri matriks sirkulan berordo 4×4. Pembahasan diklasifikasikan ke dalam dua kasus spesifik berdasarkan syarat pada entri-entri matriks sirkulan. Kasus pertama, matriks sirkulan dengan batasan seluruh entri pada matriks sirkulan merupakan elemen yang berbeda. Kasus kedua, matriks sirkulan dengan struktur khusus, dimana $a_0 = a_2, a_3 = a_0 + a_2$.

Contoh kasus 1 Determinan matriks sirkulan 4×4, dimana $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq a_3$ menggunakan metode Dodgson.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,

Langkah pertama, tentukan interior matriks A, yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Langkah kedua, Kondensasi matriks A, yaitu

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 13 & -7 & 1 \\ 1 & 13 & -7 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks A_2 adalah hasil kondensasi matriks A.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 13 & -7 & 1 \\ 1 & 13 & -7 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga, tentukan interior dari matriks A_2, yaitu -7.b

Langkah keempat, kondensasi matriks A_2, yaitu

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 13 & -7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 13 & -7 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 8 \\ 176 & 36 \end{bmatrix}$$

Langkah kelima, kondensasi matriks A_2 dibagi dengan interior matriks A, yaitu

$$\begin{bmatrix} \frac{36}{1} & \frac{8}{2} \\ \frac{176}{4} & \frac{36}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 4 \\ 44 & 36 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks A_3 adalah hasil kondensasi matriks A_2.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 36 & 4 \\ 44 & 36 \end{bmatrix}$$

Langkah keenam, karena sudah berbentuk matriks 2×2, maka cukup cari determinannya, yaitu

$$\begin{vmatrix} 36 & 4 \\ 44 & 36 \end{vmatrix} = 1296 - 178 = 1120$$

Langkah ketujuh, hasil determinan matriks 2×2 dibagi dengan interior matriks A_2, yaitu

$$\frac{1120}{-7} = -160$$

Sehingga, diperolehlah $\det(A) = -160$.

Contoh Kasus 2 Determinan matriks sirkulan 4×4, dimana $a_0 = a_2$, $a_3 = a_0 + a_2$ menggunakan metode Dodgson.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

Langkah pertama, tentukan interior matriks A, yaitu

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Langkah kedua, kondensasi matriks A.

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks A_2 adalah hasil kondensasi matriks A.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga, tentukan interior matriks A_2, yaitu 1.

Langkah keempat, kondensasi matriks A_2, yaitu

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$$

Langkah kelima, hasil kondensasi matriks A_2 dibagi dengan interior matriks A_1, yaitu

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{2} & \frac{8}{1} \\ \frac{24}{3} & \frac{16}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Langkah keenam, karena sudah berbentuk matriks 2×2, cukup cari determinannya, yaitu

$$\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 64 = 0$$

Karena hasil determinannya 0, tidak bisa dibagi dengan interior matriks A_2. Hal ini menyebabkan $\det(A) = 0$

Berdasarkan hasil komputasi pada kasus yang dikaji, ditemukan bahwa penetapan metode kondensasi Dodgson pada matriks sirkulan berordo $n \times n$ menghasilkan struktur diagonal yang memiliki nilai konstan. Fenomena ini mengkonformasi karakteristik matriks Toeplitz, dimana setiap elemen pada diagonal utamanya bersifat identik.

Corolarry 1. Hasil kondensasi Dodgson pertama dari matriks sirkulan, merupakan matriks Teoplitz.

3.2 Determinan Matriks Menggunakan Metode Chio

Pada tahun 1853 Felice Chio menemukan metode determinan matriks dengan penyederhanaan matriks, yaitu dengan mengubah matriks menjadi bentuk yang lebih sederhana dengan ordo 2 x 2.

Berikut diberikan langkah dasar dalam menghitung determinan matriks dengan metode Chio:

1. Atur matriks menjadi sub bagian matriks berordo 2×2. Pengaturan ini dilakukan agar mempermudah perhitungan determinan matriks per sub-bagiannya.
2. Hitung determinan setiap sub-bagian matriks, dan hasilnya akan menjadi elemen dari sub-bagian matriks yang bersesuaian. Kemudian kalikan dengan $\frac{1}{a_{11}^{n-2}}$.
3. Setelah diperoleh matriks kedua, atur Kembali matriks menjadi sub-bagian matriks berordo 2×2.
4. Lakukan determinan pada setiap sub-bagian matriks

Contoh kasus 3. Determinan matriks sirkulan 4×4, dimana $a_0 \neq a_2 \neq a_2 \neq a_3$ menggunakan metode Chio.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Dengan menggunakan rumus pada Teorema 2.3.1, maka perhitungannya adalah

$$\det(A) = \frac{1}{1^{4-2}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} -7 & -10 & -13 \\ -2 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -10 & -13 \\ -2 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Misalkan hasil determinan pertama diberi label A_1. Selanjutnya hitung determinan dari A_1.

$$\det(A_1) = \frac{1}{-7^{3-2}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & -13 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -7 & -10 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & -13 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} 36 & 44 \\ 4 & 36 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-7} (1296 - 176)$$

$$= \frac{1120}{-7}$$

$$= -160$$

Diperoleh hasil akhirnya adalah $\det(A) = -160$.

Contoh Kasus 4. Determinan matriks sirkulan 4×4, dimana $a_0 = a_2$, $a_3 = a_0 + a_2$ menggunakan metode Chio.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Dengan menggunakan rumus pada Teorema 2.3.1, maka perhitungannya adalah

$$\det(A) = \frac{1}{2^{4-2}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 & \frac{-5}{4} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Misalkan hasil determinan pertama diberi label A_1. Selanjutnya hitung determinan dari A_1.

$$\det(A_2) = \frac{1}{\frac{1}{4}^{3-2}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1 + 1))$$

$$= 0$$

Diperoleh hasil akhirnya adalah $\det(A) = 0$.

Setelah melakukan analisis terhadap variasi entri pada matriks sirkulan, yaitu pada kondisi $a_0 \neq a_2 \neq a_2 \neq a_3$ dan pada kondisi $a_0 = a_2,\ \ a_3 = a_0 + a_2$, maka dirumuskan Lema sebagai berikut.

Lema 3.2.1 Misalkan matriks A adalah matriks sirkulan berordo 4×4 dengan baris pertama adalah $(a_0 a_1 a_2 a_3)$ yang memenuhi syarat $a_0 = a_2$ dan $a_3 = a_0 + a_2$, maka determinan dari matriks A adalah nol $(\det(A) = 0)$.

Bukti. Karena A adalah matriks sirkulan, maka bentuk umum matriksnya adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{bmatrix}$$

Diketahui bahwa $a_0 = a_2$ dan $a_3 = a_0 + a_2 = 2a_0$. Dengan subtitusi ini, matriks A menjadi

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_0 & 2a_0 \\ 2a_0 & a_0 & a_1 & a_0 \\ a_0 & 2a_0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 2a_0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Misalkan baris-baris pada matriks dinotasikan sebagai:

$$R_1 = [\, a_0, a_1, a_0, 2a_0]$$

$$R_2 = [\,2a_0, a_0, a_1, a_0]$$
$$R_3 = [\,a_0, 2a_0, a_0, a_1]$$
$$R_4 = [\,a_1, a_0, 2a_0, a_0]$$

Selanjutnya, tinjau kombinasi linear antar baris:

$R_1 - R_3 = (a_0 - a_0, a_1 - 2a_0, a_0 - a_0, 2a_0 - a_1) = (0, a_1 - 2a_0, 0, 2a_0 - a_1)$,

$R_2 - R_4 = (2a_0 - a_1, a_0 - a_0, a_1 - 2a_0, a_0 - a_0) = (2a_0 - a_1, 0,\ a_1 - 2a_0, 0,)$.

Perhatikan bahwa:

$$R_2 - R_4 = -(R_1 - R_3)$$

Dengan pergeseran komponen yang menunjukkan adanya hubungan linear antar baris.

Lebih lanjut, gunakan ketergantungan linear secara eksplisit. Misalkan terdapat skalar λ sehingga:

$$(R_1 - R_3) + (R_2 - R_4) = 0$$

Dengan menjumlahkan:

$$(0, a_1 - 2a_0, 0, 2a_0 - a_1) + (2a_0 - a_1, 0, \quad a_1 - 2a_0, 0,)$$
$$= (2a_0 - a_1,\ a_1 - 2a_0,\ a_1 - 2a_0,\ 2a_0 - a_1)$$

yang menunjukkan bahwa kombinasi baris-baris menghasilkan vektor yang tidak bebas. Secara lebih kuat, dapat diamati bahwa:

$$R_1 + R_3 = R_2 + R_4$$

Karena:

$$R_1 + R_3 = (2a_0, a_1 + 2a_0, 2a_0, 2a_0 + a_1)$$
$$R_2 + R_4 = (2a_0 + a_1, a_0 + a_0, a_1 + 2a_0, a_0 + a_0)$$

dan setelah disesuaikan dengan syarat $a_0 = a_2$, keduanya bergantung linear. Dengan demikian, terdapat kombinasi linear tak trivial dari baris-baris matriks yang menghasilkan vektor nol. Artinya, baris-baris matriks A tidak bebas linear. Berdasarkan Teorema 2.1.8 diperoleh $\det(A) = 0$ ■

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang diperoleh, maka didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil dari kondensasi Dodgson matriks A_2 diagonalnya selalu bernilai sama. Ini merupakan definisi dari matriks Toeplitz. Setiap matriks sirkulan merupakan matriks Toeplitz, sedangkan setiap matriks Toeplitz belum tentu merupakan matriks sirkulan.
2. Misalkan matriks A adalah matriks sirkulan berordo 4×4 dengan baris pertama adalah $(a_0 a_1 a_2 a_3)$ yang memenuhi syarat $a_0 = a_2$ dan $a_3 = a_0 + a_2$, maka determinan dari matriks A adalah nol $(\det(A) = 0)$.
3. Metode Dodgson memerlukan kondisi khusus yaitu pembagi nya tidak boleh sama dengan nol. Sementara metode Chio, kondisi khususnya adalah $a_{11} \neq 0$, artinya diagonal pada matriks tidak boleh nol.
4. Berdasarkan analisis terhadap langkah-langkah algoritma, metode Chio dan metode Dodgson sama-sama menggunakan prinsip kondensasi untuk menyederhanakan perhitungan determinan matriks berordo besar menjadi matriks berordo lebih kecil. Namun demikian, terdapat perbedaan mendasar dalam aspek komputasi numerik. Metode Dodgson melibatkan operasi pembagian terhadap elemen interior matriks pada tahap tertentu, sehingga metode ini mensyaratkan bahwa seluruh elemen interior tidak boleh bernilai nol. Kondisi ini menyebabkan metode Dodgson menjadi kurang stabil secara numerik, karena keberadaan elemen nol pada interior matriks dapat mengakibatkan proses perhitungan tidak dapat dilanjutkan. Sebaliknya, metode Chio tidak memiliki ketergantungan yang sama terhadap elemen interior matriks, sehingga lebih fleksibel dalam penerapannya. Oleh karena itu, dalam beberapa kasus, metode Chio cenderung lebih efisien dan lebih robust dibandingkan metode Dodgson, khususnya pada matriks yang memiliki kemungkinan elemen nol pada bagian interior.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada dosen Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang atas dukungan, kerja sama, dan kontribusi yang telah diberikan sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] H. Anton, *Elementary linear algebra*, 10th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2010.

[2] H. W. Eves, *Elementary matrix theory*. Courier Corporation, 1980.

[3] M. R. Fahlevi, "Determinan Matriks Sirkulan Dengan Metode Kondensasi Dodgson," *J. Ilm. Mat. DAN Terap.*, vol. 18, no. 2, pp. 211–220, Dec. 2021, doi: 10.22487/2540766X.2021.v18.i2.15497.

[4] J. V. Protacio, "Computation of Matrix Determinants by Cross-Multiplication: A Rethinking of Dodgson's Condensation and Reduction by Elementary Row Operations Methods," Jun. 27, 2023, *Computer Science and Mathematics*. doi: 10.20944/preprints202306.1804.v1.

[5] F. Abeles, "Determinants and Linear Systems: Charles L. Dodgson's View," *Br. J. Hist. Sci.*, vol. 19, no. 3, pp. 331–335, Nov. 1986, doi: 10.1017/S0007087400023311.

[6] A. Muanalifah, Y. Sagita, N. Nurwan, A. Fitriyah, and R. A. Jr, "A Generalization of Chio's Condensation Method," *Pattimura Int. J. Math. PIJMath*, vol. 3, no. 1, pp. 15–22, May 2024, doi: 10.30598/pijmathvol3iss1pp15-22.

[7] P. J. Davis, *Circulant matrices*, Repr. on demand. New York: Wiley, 1986.

[8] R. M. Gray, "Toeplitz and Circulant Matrices: A Review," *Found. Trends® Commun. Inf. Theory*, vol. 2, no. 3, pp. 155–239, 2005, doi: 10.1561/0100000006.

[9] M. Main, M. Donor, and R. C. Harwood, "An Elementary Proof of Dodgson's Condensation Method for Calculating Determinants," 2016, *arXiv*. doi: 10.48550/ARXIV.1607.05352.