

REGRESI POISSON DENGAN PENDETEKSI DISPERSI *GENERALIZED POISSON REGRESSION* PADA KASUS ANGKA KEMATIAN IBU DI SUMATERA BARAT

POISSON REGRESSION WITH DISPERSION DETECTION GENERALIZED POISSON REGRESSION IN THE CASE OF MATERNAL MORTALITY IN WEST SUMATRA

Haya Fatiha Sulisda¹, Lilis Harianti Hasibuan^{2§}, Darvi Mailisa Putri³

^{1,2,3} Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang

[§]Correspondence: lilisharianti@uinib.ac.id

Received 03rd Apr 2026; Accepted 23rd Apr 2026; Published 28th Apr 2026;

Abstrak

Angka kematian ibu merupakan indikator kesehatan yang menunjukkan jumlah kematian ibu akibat kehamilan, persalinan, atau hingga 42 hari setelah kehamilan berakhir, yang disebabkan oleh faktor yang berkaitan dengan kehamilan dan penanganannya, bukan karena kecelakaan atau sebab lain di luar kehamilan. Metode analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah model regresi Poisson, dengan tujuan memodelkan jumlah angka kematian ibu yang berupa data diskrit. Variabel bebas yang digunakan dalam penelitian ini adalah jumlah tenaga kesehatan, jumlah fasilitas kesehatan dan pendapatan per kapita. Syarat penting yang harus dipenuhi dalam model regresi Poisson adalah terpenuhinya asumsi Equidispersi, dimana nilai rata-rata sama dengan nilai variansi. Karena ditemukan indikasi pelanggaran asumsi tersebut, dilakukan pemodelan lanjutan menggunakan model *generalized Poisson regression*, dengan tujuan mengevaluasi tingkat dispersi yang terjadi pada data. Berdasarkan perbandingan nilai AIC dari setiap model yang dianalisis, model regresi Poisson dipilih sebagai model terbaik untuk memodelkan jumlah angka kematian ibu. Hasil penelitian menunjukkan bahwa jumlah tenaga kesehatan dan pendapatan per kapita berpengaruh terhadap jumlah angka kematian ibu di Sumatera Barat.

Kata Kunci: AIC, angka kematian ibu, Equidispersi, *generalized Poisson regresion*, regresi Poisson

Abstract

The maternal mortality rate is a health indicator that shows the number of maternal deaths due to pregnancy, childbirth, or up to 42 days after the end of pregnancy, caused by factors related to pregnancy and its management, not due to accidents or other causes outside of pregnancy. The data analysis method used in this study is the Poisson regression model, with the aim of modeling the number of maternal deaths in the form of discrete data. The independent variables used in this study were the number of health workers, the number of health facilities, and per capita income. An important requirement that must be met in the Poisson regression model is the assumption of equidispersion, where the mean value is equal to the variance value. Because there were indications

of a violation of this assumption, further modeling was carried out using a generalized Poisson regression model, with the aim of evaluating the level of dispersion that occurred in the data. Based on a comparison of AIC values of each model analyzed, the Poisson regression model was selected as the best model for modeling the number of maternal deaths. The results of the study show that the number of health workers and per capita income have an effect on the maternal mortality rate in West Sumatra.

Keywords: *AIC, Maternal mortality rate, Equidispersion, generalized Poisson regression, Poisson regression*

1. Pendahuluan

Kematian ibu merupakan salah satu masalah sosial sekaligus masalah kesehatan yang sedang dihadapi oleh seluruh negara dunia, ini merupakan indikator yang kerap digunakan sebagai tolak ukur keberhasilan pemerintah dibidang kesehatan (Samatova, 2025). Kematian ibu merujuk kepada kematian wanita dalam masa kehamilan, persalinan, dan dalam masa 42 hari setelah berakhirnya masa kehamilan tanpa memandang usia kehamilan maupun tempat melekatnya janin, oleh sebab apa pun yang berkaitan dengan atau diperberat oleh kehamilan bukan akibat kecelakaan (Ramadhani dkk., 2018). Menurut (World Health Organization, 2023) Angka Kematian Ibu (AKI) adalah jumlah kematian seorang perempuan yang terjadi selama kehamilan, persalinan, atau dalam waktu 42 hari setelah berakhirnya kehamilan, tanpa memandang lama dan lokasi kehamilan, yang disebabkan oleh kondisi yang berhubungan dengan atau diperberat oleh kehamilan atau penanganannya, tetapi bukan karena kecelakaan atau penyebab insidental.

AKI berada di posisi yang cukup tinggi, sekitar 260.000 perempuan meninggal selama dan setelah kehamilan serta persalian pada tahun 2023. Berdasarkan data dari *World Health Organization* (WHO), sekitar 92% dari kematian ibu terjadi di negara-negara berpenghasilan rendah dan menengah ke bawah pada tahun 2023. Pada tahun 2023, AKI di Indonesia mengalami kenaikan bila dibandingkan dengan tahun sebelumnya, yakni mencapai 4.482 kasus sementara pada tahun sebelumnya tercatat sebanyak 3.572 kasus. Angka ini menunjukkan Indonesia berada di posisi kedua tertinggi di ASEAN, dengan *maternal mortality rate* di angka 140 per 100.000 kelahiran hidup (Kementrian Kesehatan, 2024). Penurunan AKI tersebut masih jauh dari target tujuan pembangunan berkelanjutan (SDGs) yaitu 70 per 100.000 kelahiran hidup pada tahun 2030 (Rahim dkk., 2025). Selaras dengan hal tersebut, data dari PPID BPS Sumatera Barat menyatakan bahwa jumlah AKI pada Tahun 2023 tercatat sejumlah 110 kasus (BPS Provinsi Sumatera Barat, 2024). Untuk Tingkat provinsi, Sumatera Barat juga sedang menghadapi tantangan yang berat dalam upaya menurunkan AKI, karena sampai sekarang belum ditemukan hasil yang signifikan.

Untuk menganalisis korelasi antara variabel dependen dengan beberapa variabel independen, pemodelan awal yang sering diterapkan adalah regresi linear (Khan, 2023). Metode estimasi parameter yang digunakan dalam pemodelan regresi linear adalah Ordinary Least Squares (OLS) . Cara kerja OLS adalah meminimumkan jumlah kuadrat residual sehingga menghasilkan estimasi yang akurat, dengan syarat asumsi-asumsi klasik seperti normalitas, homoskedastisitas, multikolinearitas dan autokorelasi dapat terpenuhi. Namun pelanggaran asumsi-asumsi klasik ini sering terjadi sehingga regresi linear tidak mampu untuk menghasilkan estimasi parameter yang efisien (Sabrina dkk., 2023).

Permasalahan ini semakin nyata apabila variabel terikat yang dianalisis merupakan data diskrit. Namun perkembangan metodologi statistik terus berlanjut. Pendekatan *Generalized Linear Models* (GLM) dikembangkan untuk mengatasi keterbatasan regresi linear tersebut. Salah satu model yang paling umum adalah regresi Poisson, yang dikembangkan khusus untuk memodelkan data yang tidak

memenuhi asumsi normalitas (Nosheen dkk., 2025). Sama halnya pada penelitian yang dilakukan oleh (Chaniago dkk., 2018), penelitian ini menunjukkan bahwa regresi Poisson efektif dalam mengatasi data non-negatif yang tidak berdistribusi normal seperti pada kasus AKI. Meskipun demikian, hasil penelitian ini mengindikasikan adanya potensi pelanggaran asumsi equidispersi, sehingga regresi Poisson perlu untuk dievaluasi sebelum dijadikan model akhir.

Dalam model regresi Poisson terdapat asumsi bahwa rata-rata sama dengan variansi yang disebut equidispersi, namun dalam kenyataannya pelanggaran asumsi equidispersi sering terjadi (Claudia dan Ananda, 2025). Hal ini akan menyebabkan estimasi parameter yang bias ataupun tidak akurat. Sejalan dengan hal tersebut, beberapa penelitian telah mengembangkan regresi Poisson ke model yang lebih fleksibel, seperti *Generalized Poisson Regression* (GPR). Model GPR mampu menangani data diskrit yang melanggar asumsi equidispersi serta memberikan estimasi parameter yang lebih akurat.

Penelitian ini mengkaji pemodelan kasus AKI di Provinsi Sumatera Barat dengan memanfaatkan pendekatan regresi Poisson yang dilengkapi pendeteksi dispersi GPR. Secara khusus, kajian ini bertujuan untuk mengidentifikasi dan menganalisis berbagai faktor risiko yang memiliki pengaruh signifikan terhadap tingginya AKI di Provinsi Sumatera Barat.

2. Landasan Teori

A. Model Regresi Poisson

Model untuk regresi Poisson pada hakikatnya digunakan untuk menyatakan rata-rata dari distribusi diskrit sebagai fungsi dari variabel diskrit. Distribusi Poisson menyediakan model yang tepat untuk menggambarkan berbagai kejadian acak, di mana nilai dari peubah acak Poisson berupa bilangan bulat non-negatif. Model regresi Poisson merupakan aplikasi dari GLM yang digunakan ketika variabel terikat mengikuti distribusi Poisson. Dalam model ini, terdapat fungsi linear g yang menghubungkan rata-rata variabel terikat dengan variabel bebas (Tendriyawati, 2023):

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}. \quad (2.1)$$

Pada persamaan (2.1), $g(\mu_i)$ merupakan fungsi penghubung dari nilai rata-rata pengamatan ke- i , η_i adalah prediktor linier, β_0 menyatakan intersep atau konstanta, sedangkan $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ merupakan koefisien regresi untuk masing-masing variabel prediktor. Selanjutnya, $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$ adalah nilai variabel bebas pada pengamatan ke- i , dengan k menyatakan banyaknya variabel prediktor yang digunakan dalam model. Parameter dalam regresi Poisson diestimasi menggunakan metode Maximum Likelihood Estimator (MLE), yaitu dengan cara mencari turunan parsial dari fungsi ln-likelihood terhadap parameter yang akan diestimasi (Aulele, 2021).

Bentuk umum fungsi likelihood adalah:

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \prod_{i=1}^n f(y_i, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\mu_i} \mu_i^{y_i}}{y_i!} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-e^{x_i^T \beta}} (e^{x_i^T \beta})^{y_i}}{y_i!} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Selanjutnya, fungsi likelihood pada Persamaan (2.2) ditransformasi ke dalam bentuk logaritma, yang dikenal sebagai log-likelihood, dengan bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ln L(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ln (\exp (-e^{x_i^T \beta})) + \ln ((e^{x_i^T \beta})^{y_i}) - \ln (y_i!) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i (x_i^T \beta) - e^{x_i^T \beta} - \ln (y_i!)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Kemudian memaksimumkan fungsi log-likelihood dengan cara melakukan derivatif parsial fungsi

log-likelihood terhadap β yang dinotasikan oleh β kemudian disamakan dengan 0, diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i x_i - x_i e^{x_i \beta}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \mu_i) &= 0 \\ X^T (y - \mu) &= 0.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Estimasi parameter model regresi Poisson pada Persamaan (2.4) berbentuk fungsi implisit. Situasi ini menyatakan bahwa pendekatan turunan biasa tidak dapat memberikan solusi secara langsung, maka dari itu diperlukan pendekatan numerik lainnya yaitu metode iterasi Newton-Raphson (Fathurahman, 2022).

Selanjutnya melakukan Uji distribusi Poisson yang dilakukan pada variabel terikat Y menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Uji Kolmogorov-Smirnov merupakan salah satu uji kebaikan model (goodness of fit) yang digunakan untuk mengukur tingkat kesesuaian antara distribusi data sampel dengan distribusi teoritis tertentu yang ditetapkan.

Adanya korelasi antara variabel prediktor (X) dalam model regresi, yang dikenal sebagai multikolinearitas, dapat mengakibatkan kesalahan yang signifikan dalam estimasi parameter regresi. Keberadaan multikolinearitas dalam model akan menyebabkan varians membesar, yang berdampak pada meningkatnya standar error untuk setiap parameter. Untuk mendeteksi keberadaan multikolinearitas, dapat dilihat dari nilai toleransi dan Variance Inflation Factor (VIF). Multikolinearitas tidak terjadi apabila nilai toleransi lebih dari 0,1 dan nilai VIF kurang dari 10 (Sari dkk., 2023) :

Terjadinya *equidispersion* pada variabel terikat adalah salah satu asumsi penting yang mesti terpenuhi dalam analisis regresi Poisson. *Equidispersi* adalah kondisi yang mensyaratkan rata-rata dari variabel terikat sama dengan variansi. Namun pada dasarnya pelanggaran asumsi ini sering kali terjadi, kondisi ini disebut *overdispersion* ataupun *underdispersion*. *Overdispersion* terjadi saat nilai variansi melebihi nilai rata-rata, sedangkan *underdispersion* terjadi saat nilai variansi kurang dari rata-rata. Dalam analisis regresi Poisson diharuskan untuk memenuhi asumsi *equidispersion* agar standar *error* tidak mengalami *underestimate* yang menyebabkan beberapa variabel bebas tidak signifikan.

B. Analisis Generalized Poisson Regression (GPR)

Untuk mengatasi pelanggaran asumsi *equidispersion* dalam regresi Poisson, dapat dilakukan pengembangan model menggunakan GPR, baik dalam kondisi *overdispersion* maupun *underdispersion*. Model GPR merupakan model regresi yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel terikat berupa data cacah dengan satu atau lebih variabel bebas, dengan parameter α berfungsi sebagai parameter dispersi. Model GPR mirip dengan model regresi Poisson namun komponen acaknya didistribusikan ke umum Poisson, dengan kata lain digunakan untuk data cacah yang mengikuti distribusi Poisson tanpa adanya asumsi *equidispersi* (Ruliana dkk., 2016). Fungsi kepekatan peluang GPR adalah sebagai berikut (Esra dkk., 2023):

$$f(y_i; \mu_i; \alpha) = \left(\frac{\mu_i}{1 + \alpha \mu_i} \right)^{y_i} \frac{(1 + \alpha \mu_i)^{y_i - 1}}{y_i!} \exp \left(\frac{-\mu_i (1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha \mu_i} \right); y_i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

dengan $E(y_i) = \mu_i$ dan $var(y_i) = \mu_i + (1 + \alpha \mu_i)^2$. Sehingga model GPR adalah:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \exp(x_i^T \beta^*) + \varepsilon_i \\ \mu_i &= \exp(\beta_0^* + \beta_1^* x_{1i} + \beta_2^* x_{2i} + \dots + \beta_p^* x_{pi}) + \varepsilon_i.\end{aligned}\quad (2.6)$$

C. Pemilihan Model Terbaik

Akaike Information Criterion (AIC) merupakan metode yang kerap digunakan dalam pemilihan model terbaik. AIC merupakan sebuah kriteria yang menyeimbangkan *goodness of fit* model. AIC digunakan berdasarkan perbandingan dua atau lebih model yang terbentuk. Model dengan nilai AIC terkecil adalah terbaik (Mori dkk., 2024). AIC ditemukan oleh Akaike dan Schwarz yang didasarkan pada metode MLE, dapat dinyatakan sebagai berikut (Esra dkk., 2023):

$$AIC = -2\ell(\beta^*) + 2K \quad (2.7)$$

3. Metode Penelitian

Penelitian ini menerapkan metode kuantitatif dengan memanfaatkan model regresi Poisson. Model tersebut digunakan untuk menganalisis faktor-faktor risiko signifikan yang berdampak terhadap jumlah kasus AKI di Sumatera Barat. Tahapan yang dilakukan dalam pemodelan jumlah AKI di Sumatera Barat adalah sebagai berikut :

1. Menghimpun data untuk penelitian dan memastikan bahwa variabel dependen merupakan data diskrit.
2. Melakukan analisis statistika deskriptif terhadap data yang sudah dihimpun.
3. Memastikan bahwa variabel dependen mengikuti distribusi Poisson, melalui uji Kolmogrov-Smirnov.
4. Melakukan pendeteksian gejala multikolinearitas antar variabel tak bebas pada data.
5. Melakukan pemeriksaan asumsi equidispersi pada data.
6. Melakukan pemodelan pada kasus AKI di Sumatera Barat menggunakan analisis regresi Poisson.
7. Melakukan uji signifikansi parameter model regresi Poisson.
8. Melakukan pendeteksian dispersi terhadap pemodelan kasus angka kematian ibu di Sumatera Barat menggunakan analisis GPR.
9. Melakukan pemodelan lanjutan menggunakan analisis GPR untuk mengestimasi parameter tambahan (α) yang merepresentasikan tingkat disperse, karena ditemukan adanya indikasi dispersi pada model poisson.
10. Melakukan pemilihan model terbaik berdasarkan nilai AIC terkecil.
11. Menginterpretasikan model regresi yang sudah terpilih.

4. Hasil Dan Pembahasan

A. Statistika Deskriptif Data

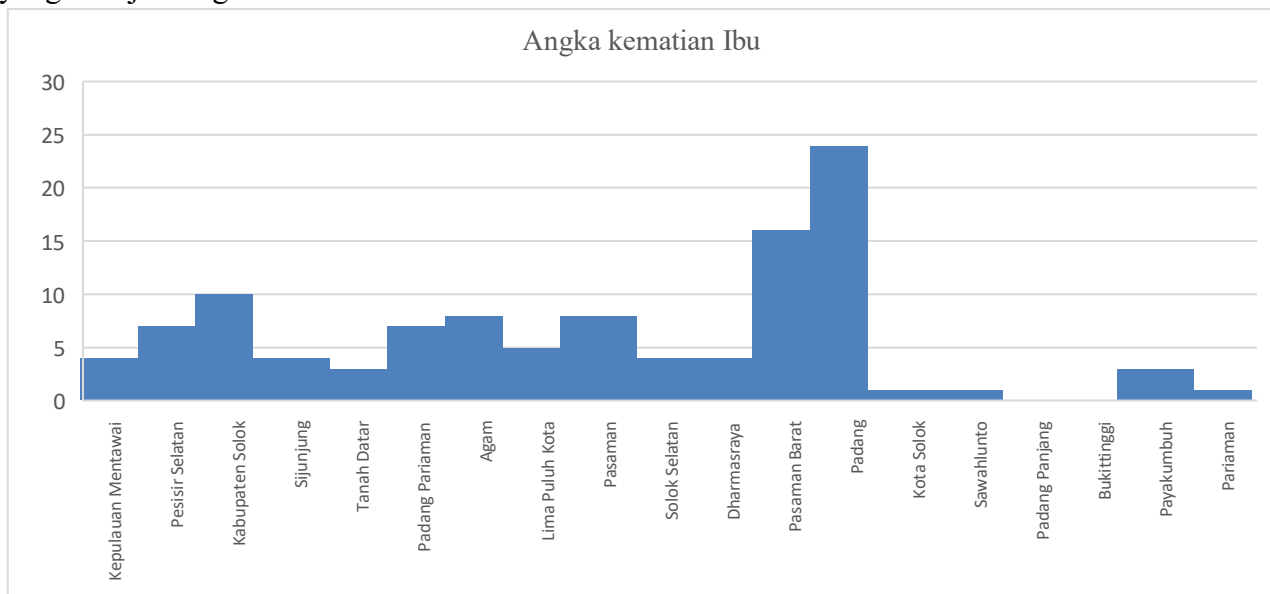
Penelitian ini menggunakan data yang tersebar diseluruh kabupaten dan kota di Sumatera Barat pada tahun 2023 sebanyak 19 kabupaten dan kota. Berikut adalah tabel yang menyajikan hasil ukuran pemusatan data dan ukuran peyebaran data:

Tabel 4.1 Ukuran pemusatan dan penyebaran data penelitian

Variabel	Minimum	Maksimum	Rata-rata	<i>Std. deviation</i>	Variansi
Y	0	24	5,789474	5,921514	35,06433
X_1	205	2677	690,5789	565,4437	319726,6
X_2	12	175	36,73684	35,09328	1231,538
X_3	6891	15089	11261,21	1936,809	3751227

Nilai rata-rata sebesar 5,789474 menunjukkan bahwa rata-rata jumlah kasus angka kematian ibu di Sumatera Barat pada tahun 2023 sekitar 6 kasus dengan nilai variansi sebesar 35,06433. Hal ini mengindikasikan bahwa adanya dugaan terjadinya overdispersi pada data yang ditandai dengan variansi lebih dari rata-rata seperti yang terlihat pada Tabel 4.1.

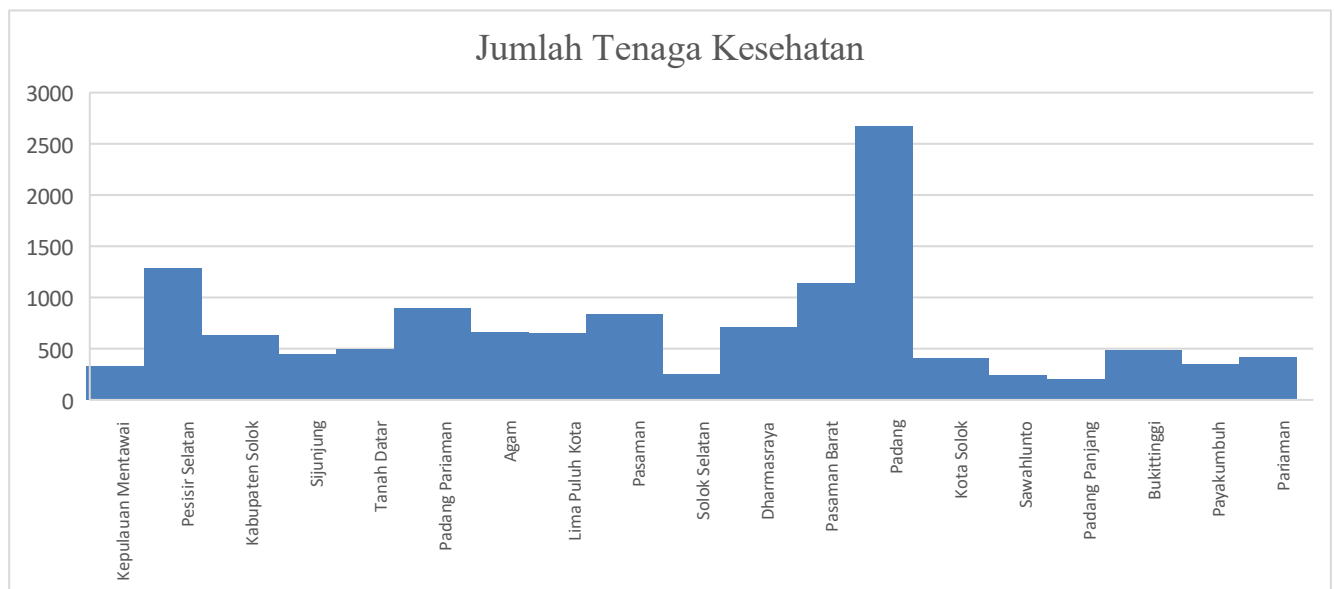
Data jumlah angka kematian ibu di Sumatera Barat pada tahun 2023 dapat dilihat pada histogram yang tersaji sebagai berikut:



Gambar 4.1. Histogram AKI

Visualisasi histogram menunjukkan bahwa jumlah AKI yang disajikan pada Gambar 4.1 bervariasi antar wilayah kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Barat. Kota Padang merupakan wilayah dengan jumlah kasus AKI terbanyak dibandingkan wilayah lainnya, tercatat sebanyak 24 kasus. Kemudian disusul oleh Kabupaten Pasaman Barat sebanyak 16 kasus. Selanjutnya untuk daerah dengan kasus AKI paling sedikit adalah Kota Bukittinggi dan Kota Padang Panjang, masing-masing wilayah tercatat 0 kasus.

Selanjutnya data jumlah tenaga kesehatan Provinsi Sumatera Barat dapat diamati pada histogram berikut:

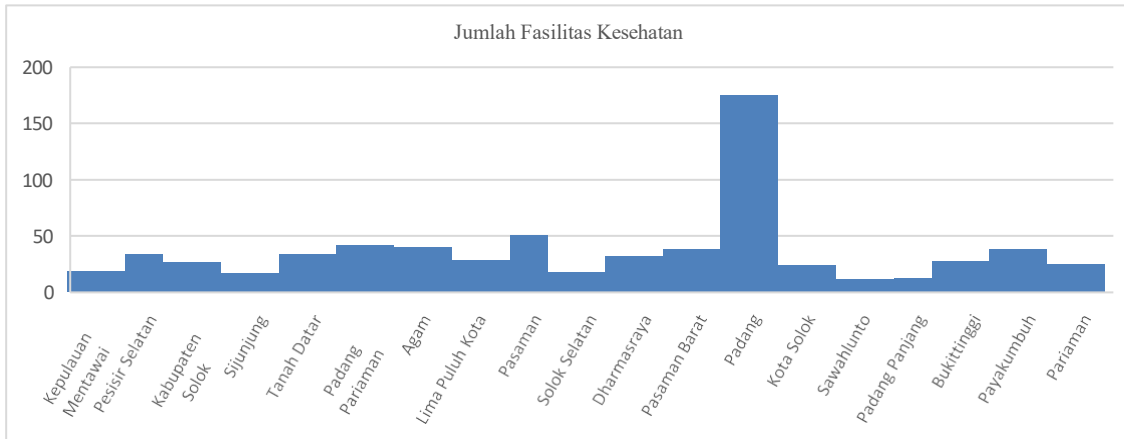


Gambar 4.2. Histogram jumlah tenaga kesehatan

Visualisasi histogram menunjukkan bahwa jumlah tenaga kesehatan yang dipaparkan pada Gambar 4.2 bervariasi antar wilayah kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Barat. Kota Padang merupakan wilayah dengan jumlah tenaga kesehatan terbanyak dibandingkan wilayah lainnya, tercatat sebanyak 2677 orang. Kemudian disusul oleh Kabupaten Pesisir Selatan dan Pasaman Barat, masing-masing daerah tercatat sebanyak 1285 orang dan 1142 orang. Selanjutnya untuk daerah

dengan jumlah tenaga kesehatan paling sedikit adalah Kota Padang Panjang, tercatat sebanyak 205 orang.

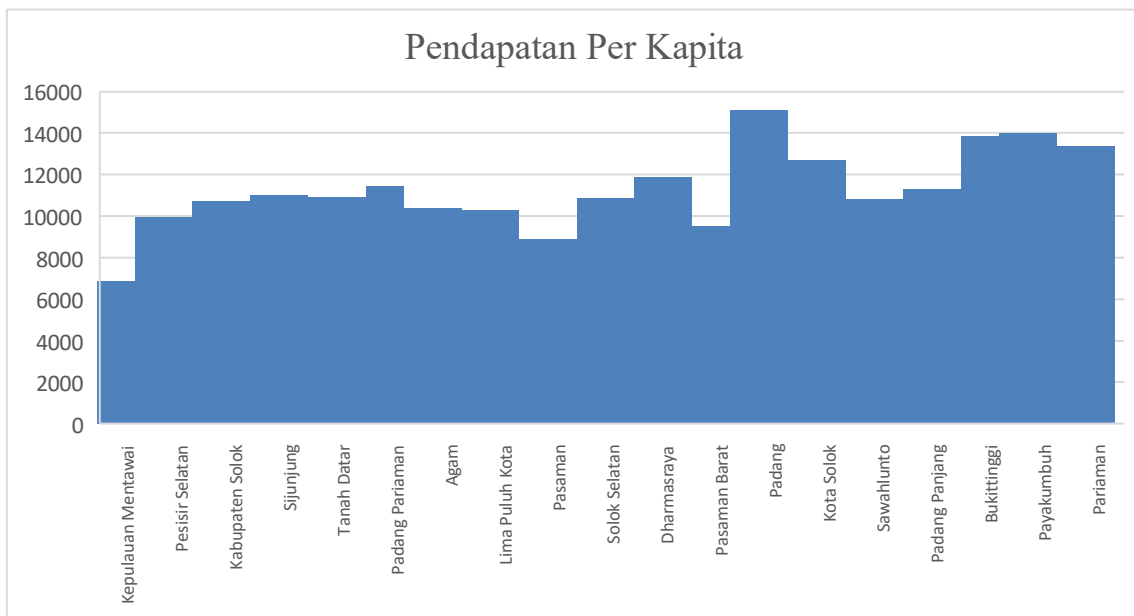
Selanjutnya data jumlah fasilitas kesehatan Provinsi Sumatera Barat dapat diamati pada histogram di bawah ini:



Gambar 4.3. Histogram jumlah fasilitas kesehatan

Visualisasi histogram menunjukkan bahwa jumlah tenaga kesehatan menurut kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Barat yang disajikan pada Gambar 4.3 bervariasi antar wilayah. Kota Padang merupakan wilayah dengan jumlah fasilitas kesehatan terbanyak dibandingkan wilayah lainnya, tercatat sebanyak 175 unit. Kemudian disusul oleh Kabupaten Pasaman Barat, tercatat sebanyak 51 unit. Selanjutnya untuk daerah dengan jumlah fasilitas kesehatan paling sedikit adalah Kota Sawahlunto, tercatat sebanyak 12 unit.

Selanjutnya data pendapatan per kapita Provinsi Sumatera Barat dapat dilihat pada histogram berikut:



Gambar 4.4. Histogram pendapatan per kapita

Berdasarkan histogram pendapatan per kapita yang tersaji pada Gambar 4.4, dapat dilihat perbedaan tingkat pendapatan per kapita masyarakat antar wilayah kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Barat. Kabupaten Kepulauan Mentawai menduduki posisi dengan pendapatan per kapita terendah, sebaliknya Kota Padang menduduki posisi dengan pendapatan per kapita tertinggi. Secara keseluruhan, histogram ini menunjukkan adanya ketimpangan pendapatan per kapita antar Kabupaten/kota di Provinsi Sumatera Barat. Hal ini disebabkan oleh perbedaan jumlah penduduk,

kondisi geografis, dan kondisi ekonomi tiap-tiap wilayah. Kondisi ini dapat mempengaruhi kemampuan masyarakat untuk mengakses layanan kesehatan, khususnya pelayanan kesehatan ibu.

B. Analisis Regresi Poisson

Untuk menguji apakah data variabel terikat (Y) berdistribusi poisson atau tidak, dilakukan uji distribusi data menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Menggunakan taraf signifikansi $\alpha = 5\%$ dan daerah kritis H_0 ditolak saat nilai $p - value < \alpha$. Keputusannya disajikan pada Tabel 4.2:

Tabel 4.2. Uji distribusi pada data

Kolmogorov-Smirnov Test	
N	19
$p - value$	0,139

nilai $p - value$ yang diperoleh sebesar 0,139 lebih dari α . Kondisi ini mengindikasikan terima H_0 , dengan keputusan data AKI sebagai variabel terikat mengikuti distribusi Poisson seperti yang terlihat pada Table 4.2.

Selanjutnya dilakukan uji multikoneritas pada variabel bebas, disajikan hasilnya pada Tabel 4.3 sebagai berikut:

Tabel 4.3. Uji multikolinearitas pada variabel bebas

Variabel bebas	Nilai VIF	Keputusan
X_1	7,579	Tidak mengandung multikolinearitas
X_2	8,719	Tidak mengandung multikolinearitas
X_3	1,450	Tidak mengandung multikolinearitas

Hasil uji multikolinearitas menunjukkan bahwa masing-masing variabel bebas memiliki nilai $VIF < 10$, kondisi ini mengindikasikan terima H_0 . Keputusannya adalah tidak ditemukan adanya korelasi antar variabel-variabel bebas pada penelitian seperti yang terlihat pada Tabel 4.3.

Setelah melakukan uji multikolinearitas, dilakukan estimasi parameter regresi Poisson menggunakan metode MLE dan dilanjutkan dengan metode iterasi Newton-Raphson. Berikut adalah langkah-langkahnya:

Diketahui:

- vektor gradien $g(\beta) = \frac{\partial \ln(\beta)}{\partial \beta} = X^T(y - \mu)$
dengan vektor respon $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{19}]^T$
vektor mean $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_{19}]^T$
- Matriks Hessian $H(\beta) = \frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^T} = -X^T W X$

$$\text{Dengan } W = \text{diag}[\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{19} \end{bmatrix}$$

Kemudian estimasi parameter akan dicari dengan proses berikut:

- 1) Menentukan nilai taksiran awal parameter $\beta^{(m)}$, dimulai dari $m = 0$

$$\beta^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } \mu^{(0)} = \exp(x_i^T \beta^{(0)}) = \begin{bmatrix} \exp(0) \\ \exp(0) \\ \vdots \\ \exp(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{19 \times 1}$$

Dengan matriks desain

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1,19} & x_{2,19} & x_{3,19} \end{bmatrix}$$

2) Membentuk vektor gradien

$$\begin{aligned} g(\beta) &= X^T(y - \mu) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,19} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,19} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3,19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - \mu_1 \\ y_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ y_{19} - \mu_{19} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{19} (y_i - \mu_i) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{1i}(y_i - \mu_i) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{2i}(y_i - \mu_i) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{3i}(y_i - \mu_i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{19} (y_i - 1) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{1i}(y_i - 1) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{2i}(y_i - 1) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{3i}(y_i - 1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3) Membentuk matriks Hessian

$$H(\beta) = -X^T W X$$

$$\begin{aligned} &= - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,19} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,19} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3,19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1,19} & x_{2,19} & x_{3,19} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{19} \mu_i & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{1i} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{2i} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{2i} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{3i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{3i} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{3i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} \mu_i x_{3i}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= - \begin{bmatrix} 19 & \sum_{i=1}^{19} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{19} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{19} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} x_{1i} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{19} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} x_{2i} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^{19} x_{2i} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{19} x_{3i} & \sum_{i=1}^{19} x_{3i} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} x_{3i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} x_{3i}^2 \end{bmatrix}.$$

4) Menghitung iterasi

$$\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} - (-X^T X)^{-1} X^T (y - \mu)$$

$$\beta^{(1)} = \beta^{(0)} + (X^T X)^{-1} X^T (y - \mu)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{19} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{19} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} x_{1i} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{19} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} x_{2i} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^{19} x_{2i} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{19} x_{3i} & \sum_{i=1}^{19} x_{3i} x_{1i} & \sum_{i=1}^{19} x_{3i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{19} x_{3i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{19} (y_i - 1) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{1i} (y_i - 1) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{2i} (y_i - 1) \\ \sum_{i=1}^{19} x_{3i} (y_i - 1) \end{bmatrix}$$

$$\beta^{(1)} = \begin{bmatrix} \beta_0^{(1)} \\ \beta_1^{(1)} \\ \beta_2^{(1)} \\ \beta_3^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Iterasi akan terus berlanjut hingga diperoleh $\beta^{(m)}$ yang menyatakan kondisi telah konvergen. Ditandai dengan norma selisih vektor parameter pada dua iterasi berturut-turut memenuhi $\|\beta^{(m+1)} - \beta^{(m)}\| \leq \varepsilon$, dimana ε adalah suatu bilangan yang sangat kecil hingga mendekati nol. Pada penelitian ini kriteria konvergensi sudah terpenuhi saat iterasi ke-5.

Berikut disajikan tabel estimasi parameter model regresi Poisson yang telah diperoleh dengan bantuan *software*:

Tabel 4.4. Estimasi parameter model regresi Poisson

Parameter	Nilai estimasi parameter	Std. error
β_0	3,050	$6,805 \times 10^{-1}$
β_1	$1,226 \times 10^{-3}$	$3,999 \times 10^{-4}$
β_2	$1,132 \times 10^{-3}$	$6,546 \times 10^{-3}$
β_3	-2.195×10^{-4}	6.804×10^{-5}

Berikut adalah model regresi Poisson seperti yang terlihat pada Tabel 4.4:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i}) \\ &= \exp(3,050 + (1,226 \times 10^{-3})x_{1i} + (1,132 \times 10^{-3})x_{2i} + (-2.195 \times 10^{-4})x_{3i}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Selanjutnya dilakukan uji signifikansi parameter yang terdiri dari uji parsial dan uji simultan.

Berikut disajikan hasil uji tersebut:

Tabel 4.5. Uji simultan model regresi Poisson

<i>Likelihood Ratio Chi-Square</i>	$X^2_{(\alpha=0,05,3)}$	<i>p – value</i>	Keputusan	Keterangan
69,716	7,814728	0,000	Tolak H_0	Signifikan

Tabel 4.6. Uji parsial model regresi Poisson

Parameter	Uji-Wald	$X^2_{(\alpha=0,05,1)}$	<i>p – value</i>	Keputusan	Keterangan
<i>Intercept</i>	20,080	3,8413	0,00000743	Tolak H_0	Signifikan
X_1	9,406	3,8413	0,00216	Tolak H_0	Signifikan
X_2	0,030	3,8413	0,86271	Gagal tolak H_0	Tidak signifikan
X_3	10,411	3,8413	0,00125	Tolak H_0	Signifikan

Dengan demikian, bentuk model regresi Poisson yang diperoleh adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \mu_i &= \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_3 x_{3i}) \\
 &= \exp(3,050 + 1,226 \times 10^{-3} x_{1i} + (-2.195 \times 10^{-4}) x_{3i}) \\
 &= \exp(3,050 + (1,226 \times 10^{-3}) x_{1i} - (2,195 \times 10^{-4}) x_{3i}). \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya uji equidispersi bertujuan untuk mengetahui apakah terjadi atau tidaknya pelanggaran asumsi equidispersi pada model regresi Poisson yang diperoleh. Equidispersi merupakan kondisi yang mensyaratkan rata-rata dari variabel terikat sama dengan variansi. Hasil uji equidispersi diperoleh dari hasil bagi *Deviance* dengan derajat bebas. Hasil uji equidispersi disajikan pada Tabel 4.7 sebagai berikut:

Tabel 4.7. Uji equidispersi pada data

	Value	db	Value/db
<i>Deviance</i>	25,942	15	1,729
<i>Pearson Chi-square</i>	23,287	15	1,552

Dapat disimpulkan adanya pelanggaran asumsi equidispersi, kriteria yang dialami adalah overdispersi. Hal ini ditunjukkan pada Tabel 4.7, di mana kondisi overdispersi ini akan menyebabkan model yang diperoleh kurang tepat, sehingga diperlukan lagi pemodelan lanjutan dengan tujuan mengevaluasi tingkat dispersi yang terjadi pada model sebelum dijadikan model akhir. Solusi yang ditawarkan adalah melakukan pemodelan GPR.

C. Analisis Generalized Poisson Regression

Peran model GPR dalam penelitian ini sebagai alat diagnostik untuk mendeteksi dispersi yang terjadi, karena model GPR memiliki parameter dispersi α yang secara eksplisit mengukur penyimpangan variansi terhadap nilai rata-rata. Dengan mengestimasi parameter dispersi α peneliti dapat melihat bagaimana tingkat dispersi yang terjadi. Dugaan parameter model GPR disajikan pada Tabel 4.8:

Tabel 4.8. Estimasi parameter model *generalized Poisson regression*

Parameter	Nilai estimasi parameter	Std. error
------------------	-------------------------------------	-------------------

β_0	3,068	$7,374 \times 10^{-1}$
β_1	$1,245 \times 10^{-3}$	$4,505 \times 10^{-4}$
β_2	$1,046 \times 10^{-3}$	$7,392 \times 10^{-3}$
β_3	$-2,223 \times 10^{-4}$	$7,316 \times 10^{-5}$

Model *Generalized Poisson Regression* yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i}) \\ &= \exp(3,068 + (1,245 \times 10^{-3})x_{1i} - (2,223 \times 10^{-4})x_{3i}).\end{aligned}\quad (4.3)$$

Setelah melakukan pemodelan *generalized Poisson regression* diperoleh parameter dispersi (α) yang menyatakan tingkat penyimpangan sebaran data terhadap rata-rata data yaitu sebesar $\alpha = -4,762$. Parameter dispersi yang dihasilkan bernilai negatif dengan p-value yang tidak signifikan, hal ini menunjukkan bahwa tingkat dispersi dalam data tidak terlalu *ekstrem*. Dengan demikian, model regresi Poisson masih relatif sesuai untuk digunakan. Di sisi lain, model *generalized Poisson regression* memberikan fleksibilitas dalam mendeteksi dispersi pada kasus angka kematian ibu, sebagaimana tampak pada Tabel 4.8.

D. Pemilihan Model Terbaik

Pemilihan model terbaik dilakukan dengan membandingkan nilai AIC antara regresi Poisson dengan model GPR. Berikut adalah tabel yang menampilkan masing-masing nilai AIC yang diperoleh:

Tabel 4.9. Pemilihan model terbaik

Model regresi	Nilai AIC
Model regresi Poisson	89.792
Model <i>Generalized Poisson Regression</i>	91.69853

Model regresi Poisson terpilih sebagai model terbaik karena memiliki nilai AIC paling kecil, yaitu sebesar 89,792. Hal ini menunjukkan bahwa model regresi Poisson merupakan model yang paling tepat untuk memodelkan AKI di Sumatera Barat tahun 2023, sebagaimana disajikan pada Tabel 4.9.

5. Kesimpulan dan Saran

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan terkait faktor-faktor yang berpengaruh terhadap AKI di Sumatera Barat Tahun 2023, maka dapat ditarik beberapa kesimpulan yaitu:

1. Pemodelan angka kematian ibu di Provinsi Sumatera Barat Tahun 2023 menggunakan model regresi Poisson menunjukkan bahwa variabel jumlah tenaga kesehatan (X_1) dan pendapatan per kapita (X_3) merupakan faktor yang berpengaruh signifikan.
2. Pemodelan angka kematian ibu di provinsi Sumatera Barat Tahun 2023 dengan model GPR untuk mendeteksi dispersi menunjukkan bahwa, tingkat dispersi yang terjadi tidak terlalu *ekstrem* dengan nilai $\alpha = -4,762$.

3. Berdasarkan kriteria AIC, model regresi poisson adalah model terbaik yang terpilih sebagai model akhir dengan nilai AIC terkecil senilai 89.792. Dengan demikian, model yang digunakan untuk memodelkan angka kematian ibu di Sumatera Barat tahun 2023 adalah sebagai berikut::
- $$\mu_i = \exp(3,050 + (1,226 \times 10^{-3})x_{1i} - (2,195 \times 10^{-4})x_{3i}).$$

B. Saran

Pada penelitian ini penulis memanfaatkan model regresi Poisson untuk memodelkan AKI di Sumatera Barat Tahun 2023 dengan pendeteksi dispersi model *generalized Poisson regression*. pada penelitian selanjutnya, apabila ditemukan kondisi yang sama penulis menyarankan untuk menggunakan model regresi Quasi-Poisson untuk mengatasi pelanggaran asumsi equidispersi yang tidak begitu signifikan.

6. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Imam Bonjol Padang yang telah menyediakan banyak fasilitas dan dukungan kepada penulis.

Daftar Pustaka

- [1] Aulele, S. N., Heumasse, A. G., & Lesnussa, Y. A. (2021). Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kematian Ibu di Provinsi Maluku dengan Menggunakan Regresi Poisson. *Jurnal EurekaMatika*, 9(2), 151–158.
- [2] Chaniago, P. R., Devianto, D., & Rahmi, I. (2018). Analisis Faktor Risiko Angka Kematian Ibu dengan Pendekatan Regresi Poisson. *Jurnal Matematika UNAND*, VII(2), 126–131.
- [3] Claudia, C., & Ananda, I. (2025). Pemodelan Generalized Poisson Regression (GPR) untuk Mengatasi Pelanggaran Equidispersi Pada Regresi Poisson Kasus Pneumonia di Provinsi NTT. *MATHunesa*, 13(01), 139–146.
- [4] Esra, R. U. T., Nohe, D. A., & Fathurahman, M. (2023). Pemilihan Model Terbaik pada Generalized Poisson Regression Menggunakan Akaike Information Criterion. *Statistika*, 23(1), 73–87.
- [5] Khan, E. (2023). Regression Analysis: An Overview of Techniques for Modelling Relationships between Variables. *Research & Reviews: Journal of Statistics and Mathematical Sciences* 1, 2, 1–2. <https://doi.org/10.4172/J>
- [6] Mori, S. A., Martha, S., & Aprizkiyandari, S. (2024). Pemodelan Tingkat Pengangguran Terbuka Menggunakan Generalized Linear Model. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya (Bimaster)*, 13(1), 137–146.
- [7] Nosheen, M., Ahmad, S., & Naz, S. (2025). Challenges , And Methodological Remedies widely used in econometrics , statistics , and data analysis for examining explores the key practical challenges associated with real-wo. *Pakistan Journal of Social Science Review (PJSSR)*, 8052, 1–9.
- [8] Ramadhani, N., Yanuar, F., & Yozza, H. (2018). Penerapan Regresi Poisson Generalized Poisson Regression Dalam Memodelkan Kasus Angka Kematian Ibu Di Sumatera Barat Tahun 2015. *Jurnal Matematika UNAND*, 7(2), 112–117. <https://doi.org/10.25077/jmu.7.2.112-117.2018>

- [9] Ruliana, Hendikawati, P., & Agoestanto, A. (2016). Pemodelan Generalized Poisson Regression (GPR) Untuk Mengatasi Pelanggaran Equidispersi Pada Regresi Poisson Kasus Campak Di Kota Semarang Tahun 2013. *UNNES Journal of Mathematics*, 5(1), 39–46. <http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm>
- [10] Sabrina, F. A., Vidya Nandita, W., & Dewi Maharani, D. (2023). Uji Asumsi Klasik untuk Menghindari Pelanggaran Asumsi Klasik pada Regresi Linier Ordinary Least Squares (OLS) dalam Ekonometrika. *Jurnal Ilmiah Manajemen Ekonomi Dan Akuntansi*, 1(1), 195–203. <https://doi.org/10.62017/jimea>
- [11] Samatova, S. H. (2025). Maternal Mortality is a Indicator of The Health System. *Journal of Multidisciplinary Research*, 3(1), 80–84.
- [12] Sari, R. N., Nabilla, U., & Sari, R. P. (2023). Poisson Regression Modeling Generalized in Maternal Mortality Cases in Aceh Tamiang Regency. *Barekeng: Journal of Mathematics and Its Applications*, 17(1), 235–244. <https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss1pp0235-0244>
- [13] Tendriyawati. (2023). Pemodelan regresi Poisson Terhadap Faktor-faktor yang mempengaruhi Terjadinya Hipertensi di Kota Kendari. *Jurnal Matematika, Komputasi Dan Statistika*, 3(April), 255–262.