

PEWARNAAN SISI GRAF BUKU SIKEL $B_{C_n,m}$

EDGE COLORING CYCLE BOOKS GRAPH $B_{C_n,m}$

Yeni Rahma Oktaviani^{1§}, Saman Abdurrahman²

^{1,2}Jurusan Matematika, Universitas Lambung Mangkurat, JL.Jend. A Yani KM 35,8 Banjarbaru 70714

Corresponding Author: yenirahma@ulm.ac.id

Received 14th Apr 2026; Accepted 21st Apr 2026; Published 28th Apr 2026;

Abstrak

Penelitian ini mengkaji pewarnaan sisi graf buku sikel $B_{C_n,m}$ yaitu graf yang dibentuk dari m salinan sikel C_n dengan terhubung melalui lintasan yang sama P_2 . Tujuan penelitian ini adalah menentukan jumlah minimum warna atau indeks kromatik yang diperlukan sehingga dua sisi yang insiden pada titik yang sama memiliki warna yang berbeda. Pembuktian pada penelitian ini dilakukan secara deduktif dengan membangun fungsi pewarnaan sisi menggunakan pola siklis terhadap dua kasus n genap dan n ganjil. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa jumlah minimum atau indeks kromatik warna yang diperlukan pada graf buku sikel adalah $\chi'(B_{C_n,m}) = m + 1$ untuk setiap $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ baik untuk n ganjil dan genap. Nilai indeks kromatik diverifikasi dari hasil konstruksi pewarnaan yang memenuhi batas bawah Teorema Vizing.

Kata Kunci: Bilangan kromatik, Graf buku sikel, Pewarnaan sisi graf

Abstract

This study investigates the edge coloring of the cycle book graphs, denoted as $B_{C_n,m}$, which consist of m cycles C_n intersection at a shared P_2 path. The primary objective is to identify the chromatic index-the fewest colors needed to ensure no two adjacent edges share the same color. Utilizing a deductive approach, the researchers developed an edge coloring function based on cyclic patterns for both even and odd values of n . The findings establish that the chromatic index $\chi'(B_{C_n,m}) = m + 1$ for all $n \geq 3$ and $m \geq 2$. This result is validated by coloring construction that aligns with the lower bound established by Vizing's Theorem

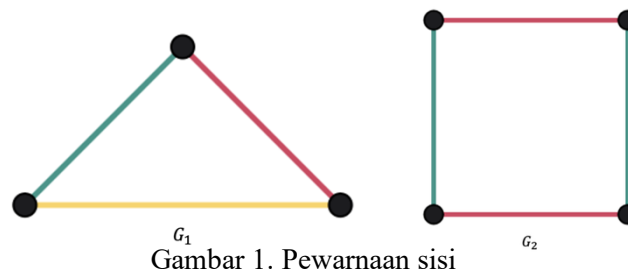
Keywords: Chromatic index, Cycle Books Graphs, Edge Graph Coloring

1. Pendahuluan

Pewarnaan graf merupakan terapan dari teori graf yang diperkenalkan oleh Leonhard Euler. Pewarnaan graf mencakup pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Pewarnaan sisi suatu graf G merupakan pemetaan $\chi': E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ sedemikian sehingga dua sisi yang insiden pada titik yang sama diberikan warna yang berbeda. Jumlah minimum warna yang dibutuhkan disebut dengan indeks kromatik dinotasikan dengan $\chi'(G)$. Beberapa penelitian tentang pewarnaan sisi telah dilakukan diberbagai kelas graf, antara lain oleh Cole dan Hopcroft [1] yang mengembangkan

algoritma pewarnaan sisi graf bipartit dengan kompleksitas $O(E \log V)$. Kaawoan dan Budayasa [2] telah mengkaji pewarnaan sisi pada graf lengkap yang memuat subgraf sikel C_4 terwarna sejati dengan derajat warna minimum. Penelitian lain oleh Vizing [3] membuktikan teorema bahwa setiap graf sederhana G berlaku $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, sehingga setiap graf dikategorikan kedalam kelas 1 jika $\chi'(G) = \Delta(G)$, atau jika $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ kedalam kelas 2. Penentuan pewarnaan graf yang lebih kompleks menjadi tantangan tersendiri untuk penulis.

Pewarnaan graf terus berkembang dengan berbagai jenis dan bentuk. Graf buku sikel $B_{(C_n, m)}$ adalah graf yang dibentuk dari m salinan sikel C_n yang terhubung melalui lintasan bersama P_2 . Santoso [4] menentukan bilangan kromatik titik pada graf buku sikel $\chi'(B_{(C_n, m)}) = 2$ untuk n genap dan $\chi'(B_{(C_n, m)}) = 3$ untuk n ganjil. Oleh karena itu, Pewarnaan sisi pada graf $(B_{(C_n, m)})$ belum dilakukan. Sehingga, penelitian ini bertujuan untuk menentukan indeks kromatik $\chi'(B_{(C_n, m)})$ dengan membuktikan secara eksplisit batas atas dan bawah. Konsep lain terkait pewarnaan sisi injektif telah dikembangkan, yaitu tiga sisi yang berurutan harus memiliki warna berbeda. Gambar 1, graf dengan tiga sisi memuat bilangan kromatik $\chi'(G_1) \leq 3$. Konsep yang sama pada graf G_2 yang memiliki 4 sisi, diperoleh bilangan kromatik $\chi'(G_2) \leq 2$.



Penulis menggunakan pendekatan analisis deduktif berbasis teori graf. Pendekatan ini memiliki keunggulan menghasilkan generalisasi yang berlaku untuk semua nilai n dan m berbeda dengan metode algoritma. Oleh karena itu, memungkinkan dirumuskannya teorema secara umum. Hasil penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi bagi pengembangan teori pewarnaan graf terstruktur dan dijadikan sebagai referensi untuk penelitian sejenis pada graf buku lainnya.

2. Landasan Teori

Berikut definisi dan teorema yang menjadi landasan pada pembahasan penelitian ini.

Definisi 2.1. [5] Graf G adalah pasangan terurut himpunan tak kosong (V, E) dimana $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong titik atau vertices, dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi yang menghubungkan dua pasang titik di $V(G)$.

Definisi 2.2. [2] Graf sederhana merupakan graf yang tidak memuat gelang (loop) dan sisi ganda (multiple edges) yang menghubungkan pasangan titik yang sama.

Definisi 2.3. [6,9] Graf lintasan P_n adalah graf lintasan dengan n titik yang membentuk lintasan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dengan sisinya $\{v_i, v_{i+1}\}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Definisi 2.4. [7,10] Graf sikel C_n adalah graf lintasan tertutup dengan minimal $n \geq 3$ titik.

Definisi 2.5. [5] Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemetaan $\chi': E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, sedemikian sehingga setiap dua sisi yang insiden pada titik yang sama mendapat warna berbeda. Indeks kromatik $\chi'(G)$ adalah nilai minimum m untuk pewarnaan sisi.

Definisi 2.6. [5] Suatu titik $v(G)$ di graf G memiliki derajat yang dinotasikan dengan $d(v)$ yaitu menyatakan banyaknya sisi terhubung dengan titik $v(G)$. Derajat maksimum titik $\Delta(G)$ adalah nilai derajat titik tertinggi dari semua titik yang ada di $v(G)$.

Teorema 2.1. [3] Setiap graf sederhana tak berarah G , berlaku $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

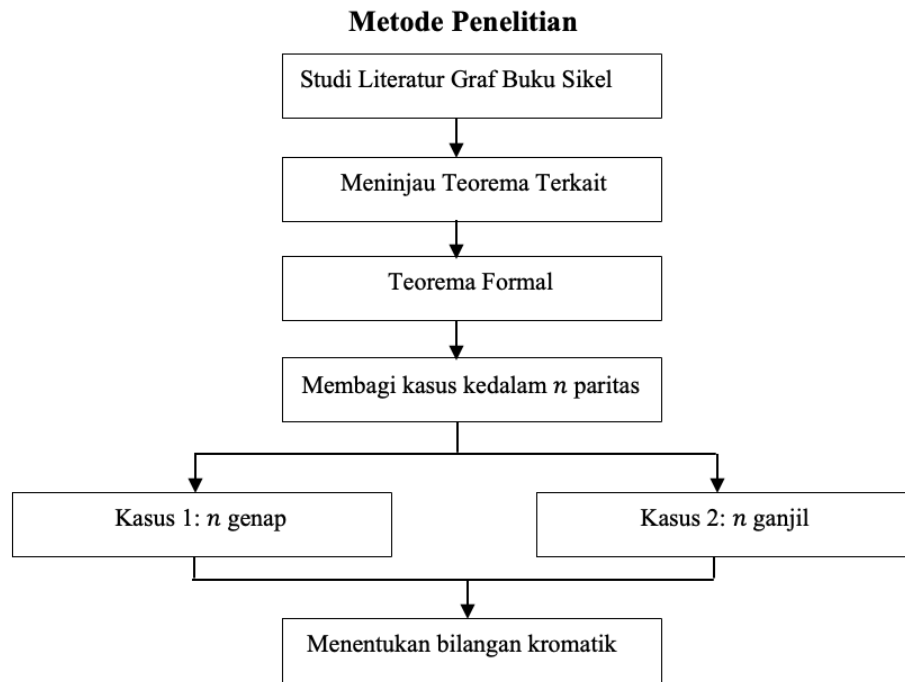
Teorema 2.2 [8] Setiap graf bipartit G , berlaku $\chi'(G) = \Delta(G)$ kelas 1

Teorema 2.3. [4] Misalkan G adalah graf sederhana tak berarah terhubung dengan derajat maksimum $\Delta(G)$. Maka $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ kecuali jika G merupakan graf lengkap K_n dengan n ganjil atau sikel ganjil C_n dengan n ganjil, maka $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

3. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur dan analisis deduktif. Fokus penelitian ini adalah pewarnaan sisi dalam menentukan indeks kromatik pada graf $B_{C_n, m}$. Adapun tahapan penelitian ini sebagai berikut:

- Identifikasi struktur graf $B_{C_n, m}$ untuk menentukan himpunan titik $V(B_{C_n, m})$, himpunan sisi $E(B_{C_n, m})$, dan derajat setiap titik $V(B_{C_n, m})$
- Menentukan derajat maksimum $\Delta(B_{C_n, m})$ melalui analisis jumlah sisi yang insiden dengan titik pusat P_2 ,
- Menentukan batas bawah indeks kromatik melalui Teorema Vizing,
- Mengkonstruksi fungsi pewarnaan sisi memberikan pewarnaan sisi $\chi': E(B_{C_n, m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 1\}$ dengan menggunakan pola siklik, dan kasus dipisahkan untuk n genap dan n ganjil
- Memverifikasi pewarnaan dengan memastikan dua sisi yang insiden pada titik yang sama memiliki warna yang berbeda.
- Melakukan penarikan kesimpulan terhadap nilai indeks kromatik graf $\chi'(B_{C_n, m})$.



Gambar 2. Skema Metode Penelitian

4. Hasil Dan Pembahasan

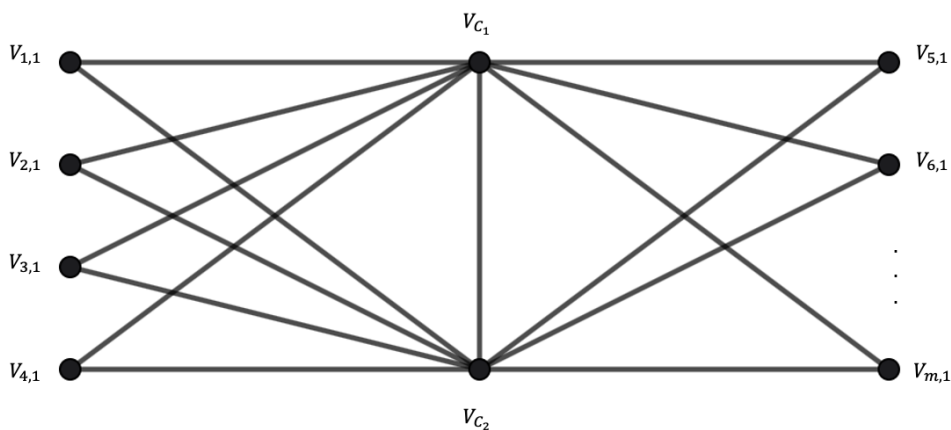
Graf buku sikel $(B_{C_n,m})$ didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.1. Graf buku sikel $B_{C_n,m}$ adalah graf yang dibentuk dari m salinan sikel $C_n (n \geq 3, m \geq 2, n, m \in \mathbb{N})$ yang terhubung dengan lintasan bersama $P_2 = \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$. Graf $B_{C_n,m}$ memiliki himpunan titik:

$$V(B_{C_n,m}) = \{v_{c_1}, v_{c_2}\} \cup \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, \dots, v_{1,n}\} \cup \{v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, \dots, v_{2,n}\} \\ \cup \{v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, \dots, v_{3,n}\} \cup \{v_{m,1}, v_{m,2}, v_{m,3}, \dots, v_{m,n}\}$$

Derajat titik $d(v_{c_1}) = d(v_{c_2}) = m + 1$, dan $d(v_{i,j}) = 2$ untuk semua titik dalam pada setiap sikel. Oleh karena itu, derajat maksimum graf adalah $\Delta(B_{C_n,m}) = m + 1$, sehingga berdasarkan Teorema Vizing didapatkan batas bawah $\chi'(B_{C_n,m}) \geq m + 1$.

Perhatikan Gambar 3 yang merupakan graf buku sikel $B_{C_3,m}$.

Gambar 3. Graf $(B_{C_3,m})$

Gambar 3 adalah graf buku sikel $(B_{C_n,m})$ dengan dua titik pusat v_{c_1} dan v_{c_2} sebagai engsel dari m salinan sikel C_3 .

Teorema 4.1. Misalkan $B_{C_n,m}$ adalah graf buku sikel dengan $n \geq 3$, $m \geq 2$ dan $n, m \in N$. Maka indeks kromatik graf buku sikel $\chi'(B_{C_n,m}) = m + 1$, berlaku untuk n genap dan n ganjil.

BUKTI.

Karena $\Delta(B_{C_n,m}) = m + 1$, maka berdasarkan Teorema Vizing berlaku $m + 1 \leq \chi'(B_{C_n,m}) \leq m + 2$. Untuk membuktikan $\chi'(B_{C_n,m}) = m + 1$, konstruksikan pewarnaan sisi tepat $m + 1$ warna. Pembuktian dibagi kedalam dua kasus n genap dan n ganjil

Graf buku sikel $B_{C_n,m}$ yang memuat m kopi sikel dengan sisi bersama (*path*) dan setiap sikel memuat n titik dengan syarat $n \geq 3$ dan $n \geq 2$ dan $n, m \in N$. Pembuktian teorema ini dilakukan dengan membuktikan menjadi dua kasus sebagai berikut.

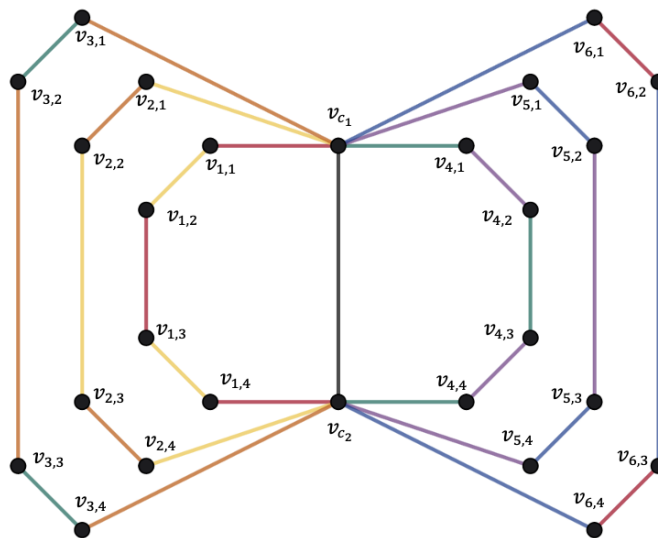
Kasus 1. $\chi'(B_{C_n,m}) = m + 1$, untuk n genap

Didefinisikan pewarnaan sisi $\chi': E(B_{C_n,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 1\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\chi'(v_{c_2}, v_{c_1}) &= 1 \\ \chi'(v_{c_1}, v_{i,1}) &= i + 1, (\text{untuk } i = 1, 2, \dots, m) \\ \chi'(v_{i,j}, v_{i,j+1}) &= \begin{cases} k, & \text{jika } j \text{ ganjil} \\ i + 1, & \text{jika } j \text{ genap} \end{cases} (\text{untuk } j = 1, 2, \dots, n - 1) \\ \chi'(v_{i,n}, v_{c_2}) &= i + 1, (\text{untuk } i = 1, 2, \dots, m)\end{aligned}$$

dimana, $k \in \{1, 2, \dots, m + 1\} \setminus \{1, i + 1\}$ adalah pewarnaan berbeda dari warna sisi utama, sisi masuk dan yang belum digunakan pada sisi-sisi yang insiden ke v_{c_2} . Pada kasus n genap, setiap sikel C_n membentuk lintasan dengan jumlah sisi genap. Pola warna yang diterapkan bergantian antara warna k dan $i + 1$ pada sisi dalam untuk memastikan tidak ada permasalahan. Pada titik pusat v_{c_1} dan v_{c_2} , setiap sisi yang insiden mendapat warna berbeda karena $i + 1$ adalah warna berbeda untuk setiap $i \in \{1, \dots, m\}$ dan warna 1 adalah warna utama yang hanya ada pada sisi pusat. Sehingga, pewarnaan sisi $\chi'(B_{C_n,m}) = m + 1$. Pada Gambar 4 ditunjukkan pewarnaan sisi pada graf $B_{C_6,6}$ ketika n genap.

Contoh 4.1. Pewarnaan sisi graf buku sikel $\chi'(B_{C_6,6}) = 7$, untuk n genap



Gambar 4. Pewarnaan sisi graf $(B_{C_6,6})$

Pada Gambar 4, indeks kromatik pewarnaan sisi graf buku sikel dengan n genap adalah $\chi'(B_{C_{6,6}}) = 7$. Pewarnaan sisi utama $\chi'(v_{c_2}, v_{c_1}) = 1$, pewarnaan sisi masuk yaitu $\chi'(v_{c_1}, v_{i,1}) = i + 1$ dimana $i = 1, 2, \dots, m$. Pewarnaan sisi bagian dalam $\chi'(v_{i,j}, v_{i,j+1}) = k$ ketika j ganjil dimana pewarnaan yang diberikan haruslah berbeda dengan sisi utama dan sisi masuk, sedangkan pewarnaan sisi bagian dalam $\chi'(v_{i,j}, v_{i,j+1}) = i + 1$ ketika j genap sama dengan pewarnaan sisi masuk dengan $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Pewarnaan pada sisi keluar yang terhubung ke v_{c_2} diberi warna $i + 1$ atau sama dengan sisi masuk. Oleh karena itu, tidak ada sisi yang insiden memiliki warna yang sama. Sehingga pewarnaan dari graf $\chi'(B_{C_{n,m}}) = m + 1$.

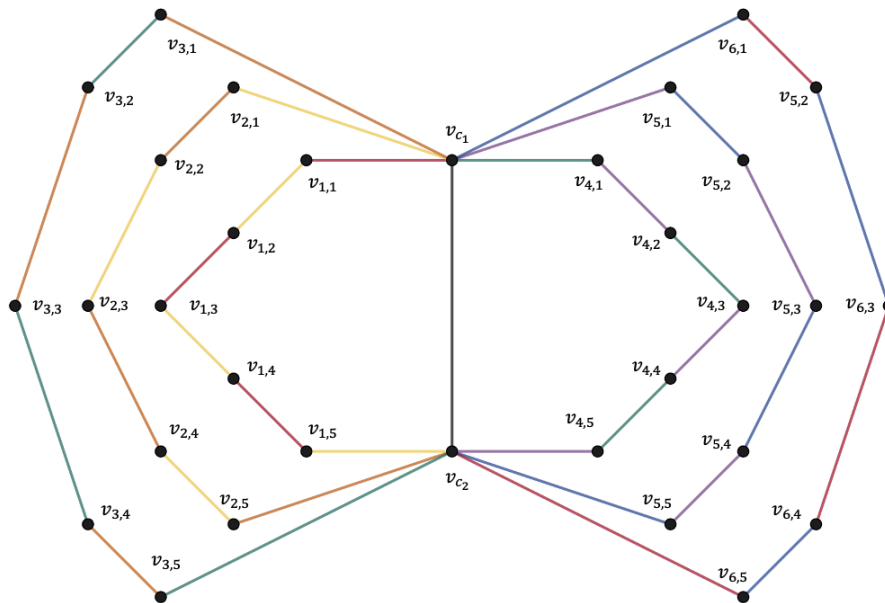
Kasus 2. $\chi'(B_{C_{n,m}}) = m + 1$, untuk n ganjil

Didefinisikan pewarnaan sisi $\chi': E(B_{C_{n,m}}) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 1\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\chi'(v_{c_2}, v_{c_1}) &= 1 \\ \chi'(v_{c_1}, v_{i,1}) &= i + 1, \text{ (untuk } i = 1, 2, \dots, m) \\ \chi'(v_{i,j}, v_{i,j+1}) &= \begin{cases} k_i, & \text{jika } j \text{ ganjil} \\ i + 1, & \text{jika } j \text{ genap} \end{cases} \text{ (untuk } j = 1, 2, \dots, n - 2) \\ \chi'(v_{i,n}, v_{c_2}) &= k_i, \text{ (} i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

dimana, $k_i \in \{1, 2, \dots, m + 1\} \setminus \{1, i + 1, \chi'(v_{i,n-2}, v_{i,n-1}), k_1, k_2, \dots, k_{i-1}\}$ adalah pewarnaan berbeda dari warna yang telah digunakan pada sisi yang insiden ke v_{c_2} . Karena n ganjil, lintasan dalam pada setiap sikel memiliki jumlah sisi ganjil, sehingga warna pada sisi akhir yang menuju ke v_{c_2} tidak dapat menggunakan pola pada Kasus 1. Oleh karena itu, pemilihan k_i secara eksplisit merupakan himpunan warna sisa dengan menjamin tidak ada permasalahan pada warna sisi keluar yang terhubung ke v_{c_2} . Sehingga setidaknya terdapat satu warna berbeda.

Contoh 4.2. Pewarnaan sisi graf buku sikel $\chi'(B_{C_{7,6}}) = 7$, untuk n ganjil



Gambar 5. Pewarnaan sisi graf $(B_{C_{7,6}})$

Pada Gambar 5, pewarnaan sisi graf buku sikel dengan n ganjil $\chi'(B_{C_{7,6}}) = 7$. Pewarnaan sisi utama $\chi'(v_{c_2}, v_{c_1}) = 1$, pewarnaan sisi masuk yaitu $\chi'(v_{c_1}, v_{i,1}) = i + 1$ dimana $i = 1, 2, \dots, m$. Pewarnaan sisi bagian dalam $\chi'(v_{i,j}, v_{i,j+1}) = k_i$ ketika j ganjil dimana pewarnaan yang diberikan haruslah berbeda dengan sisi utama dan sisi masuk, sedangkan pewarnaan sisi bagian dalam $\chi'(v_{i,j}, v_{i,j+1}) = i + 1$ ketika j genap sama dengan pewarnaan sisi masuk dengan $j = 1, 2, \dots, n - 2$. Pewarnaan pada sisi keluar yang terhubung ke v_{c_2} yaitu sisi $\chi'(v_{i,n}, v_{c_2}) = k_i$ atau sama dengan pewarnaan sisi dalam ketika j ganjil. Oleh karena itu, tidak ada sisi yang insiden memiliki warna yang sama. Sehingga pewarnaan dari graf $\chi'(B_{C_{n,m}}) = m + 1$.

Berdasarkan Kasus 1 dan Kasus 2 diperoleh pewarnaan sisi $m + 1$ warna untuk semua $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Karena $\chi'(B_{C_{n,m}}) \geq m + 1$ batas bawah berdasarkan Teorema Vizing dan $\chi'(B_{C_{n,m}}) \leq m + 1$ hasil konstruksi, maka disimpulkan bahwa $\chi'(B_{C_{n,m}}) = m + 1$.

5. Kesimpulan dan Saran

Penelitian ini telah membuktikan indeks kromatik graf buku sikel $B_{C_{n,m}}$ adalah $\chi'(B_{C_{n,m}}) = m + 1$ untuk setiap $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Hasil ini berlaku untuk n genap dan n ganjil yang diperoleh melalui konstruksi pewarnaan sisi berdasarkan pola siklis dengan memenuhi batas bawah Teorema Vizing. Oleh karena itu, $B_{C_{n,m}}$ masuk ke dalam kelas 1 berdasarkan klasifikasi Vizing. Saran untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan ke arah pewarnaan sisi total pada graf $B_{C_{n,m}}$, pewarnaan sisi r -dinamis pada graf buku lain, penentuan indeks kromatik pada graf buku sikel dengan lintasan bersama atau engsel lebih dari satu.

6. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam proses penulisan penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] R. Cole and J. Hopcroft, "On Edge Coloring Bipartite Graphs*," *Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 11, no. 3, pp. 540–546, 1982.
- [2] G. Y. W. R. Kaawoan and I. K. Budayasa, "Pewarnaan Sisi Pada Graf Komplet yang Memuat Sikel C_4 Terwarna Sejati," *J. Ilm. Mat.*, vol. 13, no. 2, pp. 90–98, 2025, [Online]. Available: <https://ejournal.unesa.ac.id/index.php/mathunesa/article/view/64649>
- [3] V. G. Vizing, "On an estimate of the chromatic class of a p -graph," *Discret Anal.*, vol. 3, pp. 25–30, 1964, Accessed: Apr. 20, 2026. [Online]. Available: <https://cir.nii.ac.jp/crid/1571980075458819456.bib?lang=en>
- [4] J. Santoso, "On the Chromatic Number of Cycle Books Graph," *Compiler*, vol. 14, no. 1, p. 27, 2025, doi: 10.28989/compiler.v14i1.2930.
- [5] V. R. Noviyanti, Kusbudiono, I. H. Agustin, and Dafik, "Pewarnaan Sisi r -Dinamis pada Graf Khusus dan Graf Operasi Sakel," *CGANT J. Math. Appl.*, vol. 2, no. 1, pp. 1–14, 2021, doi: 10.25037/cgantjma.v2i1.47.
- [6] J. M. Aldous and R. J. Wilson, *Graphs and applications: an introductory approach*, 4th ed.

2004. doi: 10.5860/choice.38-2200.

- [7] J. Santoso, Darmaji, A. Mulyana, and A. Saragih, "The Matric Dimension of Cycle Book Graphs $Bc(m,n)$ Formed By A Common Path P_2 ," *Barekeng*, vol. 20, no. 2, pp. 1155–1166, 2026, doi: 10.30598/barekengvol20iss2pp1155-1166.
- [8] D. B. West, "Introduction to Graph Theory (2nd Edition)," 2001, *Pearson Education (Singapore), India*.
- [9] R. Diestel, *Graph Theory, 5th edition*. Berlin: Springer, 2017.
- [10] F. Harary, *Graph Theory*. Philippines: Reading, MA: Addison-Wesley, 1969.