MAp Journal
Mathematics & Applications
UIN IMAM BONJOL PADANG
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

LEFT INVERTIBLE SEMIGRUP PADA RUANG HILBERT

LEFT INVERTIBLE SEMIGROUP ON HILBERT SPACES

Ezhari Asfa'ani[1], Lilis Harianti Hasibuan[2§], Miftahul Jannah [3], Darvi Mailisa Putri[4]

[1]Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: ezhariasfaani@uinib.ac.id]
[2]Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: lilisharianti@uinib.ac.id]
[3]Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: miftahuljannah@uinib.ac.id]
[4]Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol padang, Indonesia [Email: darvimailisa@uinib.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

Received Mei 2020; Accepted Juni 2020; Published Juni 2020;

Abstrak

Analisis Fungsional merupakan salah satu cabang dari ilmu Matematika yang membahas tentang ruang vektor serta pemetaan di antara ruang - ruang tersebut. Pada artikel ini membahas tentang semigrup pada ruang Hilbert yang dapat dibalik dan mempunyai balikan. Untuk Semigrup yang sangat kontinu pada Ruang Hilbert, disini disajikan bukti singkat dari fakta-fakta bahwa inverse kiri dari semigrup yang dapat dibalik dan dapat dipilih menjadi semigrup juga. Lebih jauh pada tulisan ini akan ditunjukkan pula bahwa semigrup ini tidak perlu unik.

Kata Kunci: semigrup, ruang Hilbert, invers kiri

Abstract

Functional Analysis is one branch of Mathematics that deals with vector spaces and mapping between these spaces This article to discuss about semigroups on Hilbert Space. For strongly continous semigroups on Hilbert space, we present a short proof of the fact that the left inverse of a left invertible semigroup can be chosen to be a semigroups as well. Furthermore, we show that this semigroups need not to be unique.Keywords: three-five word(s) or phrase(s), that it's representative for the article.

Keyword*: semigroups, Hilbert Space, left invertible*

1. Pendahuluan

Analisis Fungsional merupakan salah satu cabang dari ilmu Matematika yang membahas tentang ruang vektor serta pemetaan di antara ruang - ruang tersebut. Koleksi operator linier terbatas pada ruang Hilbert dapat membentuk suatu semigrup atas operator linier terbatas. Di dalam Analisis Fungsional terdapat materi tentang teorema - teorema Semigrup Operator Linier Terbatas pada ruang Hilbert.

Dalam tulisan ini akan dipelajari semigrup kiri yang tidak dapat dibalik. Dalam makalah [4] mereka pada tahun 1983 Louis dan Wexler menunjukkan bahwa jika suatu semigrup yang sangat kontinu pada ruang Hilbert dibiarkan tidak dapat dibalik untuk satu (atau yang semuanya setara) waktu yang cukup positif, maka terdapat invers kiri yang juga merupakan semigrup yang sangat kontinu.

Bukti menggunakan kontrol optimal dan Ricatti Equations. Bukti disajikan lebih singkat menggunakan persamaan Lyapunov. Lebih jauh lagi, dengan menggunakan persamaan Lyapunov ini, dapat ditunjukkan bahwa setiap semigroup ivertible kiri adalah perturbasi terbatas dari semigroup isometrik, lihat teorema 2.2.

Hasil yang diperoleh pada tulisan ini melengkapi yang ditemukan pada [2], [5], dan [6], yang terutama berkonsentrasi pada hubungan antara invertibilitas kiri dan observabilitas yang tepat.

Berikut ini akan diperkenalkan beberapa notasi. Z menunjukkan Hilbert Space dengan produk dalam (x, y). Notasi (x, y) merupakan simbol dari operator pemetaan. Domain operator a akan dilambangkan dengan D (A).

Dan ρ(A) menunjukkan resolusi yang dikirim. Spektrum titik A diberikan oleh σ(A). Jika A adalah generator yang sangat kecil dari sebuah semi-grup, maka kami menunjukkan semigroup ini dengan T (t).

2. LandasanTeori

Definisi 2.1. [5] *C_0-semigrup $\left(T(t)\right)_{t\geq 0}$ adalah left invertible jika terdapat suatu fungsi $t \mapsto m(t)$ sehingga $m(t) > 0$ dan untuk setiap $z_0 \in H$, H suatu ruang Hilbert, berlaku:*

$$m(t)\|z_0\| \leq \|T(t)z_0\|, \;\; t \geq 0.$$

Lemma 2.1. [5] *Misalkan A_1, A_2 merupakan infinitesimal generator dari C_0-semigrup $\left(T_1(t)\right)_{t\geq 0}$ dan $\left(T_2(t)\right)_{t\geq 0}$. Maka $X \in \mathcal{L}(H)$ memenuhi persamaan Sylvester*

$$\langle A_1 z_1, X z_2\rangle + \langle z_1, X A_2 z_2\rangle = 0, \quad z_1 \in D(A_1), z_2 \in D(A_2) \qquad (1)$$

Jika dan hanya jika

$$T_1^*(t) X T_2(t) = X, \quad \text{untuk setiap } t \geq 0. \qquad (2)$$

Lebih lanjut, Jika X invertible, maka

$$X^{-1} T_1{}^*(t) X T_2(t) = I, \qquad \text{untuk setiap } t \geq 0$$

Yang berarti $\left(X^{-1} T_1{}^*(t) X\right)_{t\geq 0}$ adalah left invers dari $\left(T_2(t)\right)_{t\geq 0}$.

Bukti. (⇒) Akan ditunjukkan persamaan (2) ekivalen dengan

$$\langle T_1(t) z_1, X T_2(t) z_2\rangle = \langle z_1, X z_2\rangle, \text{ untuk setiap } z_1, z_2 \in H, \text{ yaitu}$$

$$\langle T_1(t) z_1, X T_2(t) z_2\rangle = \langle z_1, T_1^*(t) X T_2(t) z_2\rangle$$

$$\langle z, X z_2\rangle = \langle z_1, T_1^*(t) X T_2(t) z_2\rangle$$

$$X = T_1^*(t) X T_2(t)$$

Sehingga dengan menurunkan persamaan $\langle T_1(t) z_1, X T_2(t) z_2\rangle \langle z_1, X z_2\rangle$, untuk setiap $z_1, z_2 \in Z$ dan evaluasi di $t = 0$ maka diperoleh (1).

(⇐)Misalkan (1) berlaku, maka untuk $z_1{}' \in D(A_1), z_2{}' \in D(A_2)$,

$$\frac{d}{dt}\langle T_1(t) z_1{}', X T_2(t) z_2{}'\rangle = \langle A_1 T_1(t) z_1{}', X T_2(t) z_2{}'\rangle + \langle T_1(t) z_1{}', X A_2 T_2(t) z_2{}'\rangle = 0$$

Diperoleh

$$\langle T_1(t) z_1{}', X T_2(t) z_2{}'\rangle = \langle z_1{}', X z_2{}'\rangle \text{ untuk setiap } z_1{}' \in D(A_1), z_2{}' \in D(A_2).$$

Karena domainnya dense maka dapat disimpulkan bahwa (2) berlaku. ■

Teorema 2.1. [1] *Misalkan* $\left(T(t)\right)_{t\geq 0}$ *C_0-semigrup pada ruang Hilbert H. Pernyataan berikut ekivalen:*

1. $\left(T(t)\right)_{t\geq 0}$ *adalah left invertible.*
2. *Terdapat C_0-semigrup* $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ *sehingga* $S(t)\,T(t) = I$ *untuk setiap* $t \geq 0$.

Bukti. $(2 \Rightarrow 1)$

$$\|z\| = \|S(t)T(t)z\| \leq \|S(t)\|\|T(t)z\|$$

$$\frac{1}{\|S(t)\|}\|z\| \leq \|T(t)z\|$$

Pilih $m(t) = \frac{1}{\|S(t)\|}$, maka $m(t)\|z\| \leq \|T(t)z\|$. Jadi $\left(T(t)\right)_{t\geq 0}$ left invertible.

$(1 \Rightarrow 2)$ Misalkan A adalah infinitesimal generator dari $\left(T(t)\right)_{t\geq 0}$. Pilih $\omega \in \mathbb{R}$ sehingga $A - \omega I$ eksponensial stabil.

Untuk $z \in H$

$$m_0\|z\|^2 = \int_0^\infty \left\|e^{(A-\omega I)t}\right\|^2 \|z\|^2 dt$$

$$= \int_0^\infty \|e^{At}\|^2\, e^{2\omega t}\|z\|^2 dz$$

$$= \int_0^\infty m(t)^2 e^{-2\omega t}\|z\|^2 dt$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-2\omega t}\|T(t)z\|^2 dt \leq M\|z\|^2$$

Definisikan $\langle z, Xz\rangle = \int_0^\infty e^{-2\omega t}\|T(t)z\|^2$, maka:

$$m_0 I \leq X \leq MI$$

X adalah solusi dari

$$\langle (A-\omega I)z_1, Xz_2\rangle + \langle z_1, X(A-\omega I)z_2\rangle = -\langle z_1, z_2\rangle, \text{ untuk } z_1, z_2 \in D(A)$$

Tulis kembali persamaan diatas ke persamaan Sylvester:

$$\langle (A-\omega I + X^{-1})z_1, Xz_2\rangle + \langle z_1, X(A-\omega I)z_2\rangle = 0$$

Yang merupakan kasus khusus dari persamaan Sylvester secara umum. Berdasarkan lemma diperoleh bahwa semigrup yang dibangun oleh $(A - \omega I)$ adalah left invertible dan

$$X^{-1}T_1(t)^* X T(t) e^{-\omega t} = I$$

Dengan $\left(T_1(t)\right)_{t\geq 0}$ adalah semigrup yang dibangun oleh $(A - \omega I + X^{-1})$. Akibatnya $S(t) = X^{-1}T_1(t)^* X e^{-2\omega t}$ adalah left invers dari $T(t)$.■

Telah diketahui bahwa C_0-semigrup dapat diperluas ke grup jika dan hanya jika negatif dari generatornya juga merupakan generator. Untuk left invertible semigrup hal yang sama juga berlaku.

Teorema 2.2 [1] *Misalkan A adalah infinitesimal generator dari C_0-semigrup* $\left(T_1(t)\right)_{t\geq 0}$ *pada ruang Hilbert H. Maka* $\left(T_1(t)\right)_{t\geq 0}$ *adalah left invertible jika dan hanya jika –A dapat diperluas ke suatu infinitesimal generator dari C_0-semigrup.*

Bukti. Asumsikan $\left(T(t)\right)_{t\geq 0}$ adalah left invertible dan $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ adalah C_0-semigrup sehingga $S(t)\,T(t) = I$. Misalkan A_2 dengan domain $D(A_2)$ merupakan infinitesimal generator dari $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$. Untuk $z \in Z$,

$$S(t)z - z = S(t)z - S(t)\,T(t)z$$

$$= S(t)(z - T(t)z)\,.$$

Untuk $z \in D(A)$ dengan menggunakan kekontinuan kuat dari $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ diperoleh

$$-Az = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)(z - T(t)z)}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)z - z}{t}$$

Jadi, $z \in D(A_2)$ dan $A_2 z = -Az$. Dengan kata lain, A_2 merupakan suatu perluasan dari $-A$.■

3. Hasil dan Pembahasan

Selanjutnya asumsikan bahwa A_2merupakan infinitesimal generator dari C_0-semigrup $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ dan A_2 merupakan suatu perluasan dari $-A$. Makan $-A^*$ merupakan perluasan dari ${A_2}^*$.

Untuk $z_1 \in D({A_2}^*)$ dan $z_2 \in D(A)$, maka

$$\begin{aligned}\langle {A_2}^* z_1, z_2\rangle + \langle z_1, A_2 z_2\rangle &= \langle {A_2}^* z_1, z_2\rangle + \langle A^* z_1, z_2\rangle \\ &= \langle {A_2}^* z_1, z_2\rangle + \langle -{A_2}^* z_1, z_2\rangle = 0\end{aligned}$$

(pertama digunakan $D({A_2}^*) \subset D(A^*)$ dan selanjutnya digunakan $A^* z_1 = -{A_2}^* z_1$ untuk $z_1 \in D({A_2}^*)$). Berdasarkan Lemma, maka dapat disimpulkan $S(t)\,T(t) = I$.

Contoh 2.1. Berikut diberikan contoh semigrup yang tidak left invertible.

Misalkan semigrup pada $L^2(0,1)$, dengan

$$(T(t)f)(\eta) = \begin{cases} f(\eta + t) & \eta + t \in [0,1] \\ 0 & \eta + t \geq 1 \end{cases}$$

Diobservasi di $\eta = 0$ maka $(T(t)f)(0) = f(t), t \in [0,1]$, diperoleh:

$$\|T(t)f\| = \|f(t)\|$$

$$\|e^{At}f\| = \|f(t)\|$$

$$\|f(t)\| = \|e^{At}f\| \leq \|e^{At}\|\|f\|$$

$$\|T(t)f\| = \|f(t)\| \leq m_0\|f\|, t \in [0,1], dengan\; m_0 = \|e^{At}\|$$

Terdapat $t \in [0,1]$ sehingga $\|f(t)\| < m_0\|f\|$.

Contoh 2.2. Berikut contoh yang menunjukkan bahwa left invers semigrup tidak unik.

Misalkan Z adalah ruang Hilbert dan ambil $L^2(0,\infty)\oplus L^2(0,\infty)$. Lebih lanjut, ambil

$$A_1\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{f}_1 \\ -\dot{f}_2\end{pmatrix}$$

dengan domain

$$D(A_1) = \left\{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix} \in Z | f_1 \in H^1(0,\infty), f_2 \in H^1(0,1) \text{ dan } f_1(0) = \alpha f_2(0), f_2(1) = \sqrt{2}f_2(0)\right\}$$

Dimana $H^1(\Omega)$ menyatakan ruang Sobolev dari $L^2(\Omega)$-fungsi terdiferensial di $L^2(\Omega)$. Operator A_2 didefinisikan secara similar, yaitu:

$$A_2\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{g}_1 \\ -\dot{g}_2\end{pmatrix}$$

dengan domain

$$D(A_2) = \left\{\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2\end{pmatrix} \in Z | g_1 \in H^1(0,\infty), g_2 \in H^1(0,1) \text{ dan } g_1(0) = 0, \sqrt{2}g_2(1) = g_2(0)\right\}$$

Dapat ditunjukkan bahwa operator diatas membangun semigrup yang kontinu kuat pada *H*.

Untuk $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix} \in D(A_1)$ berlaku:

$$\begin{aligned}\left\langle A_1\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle A_1\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}\right\rangle &= \int_0^\infty -\dot{f}_1(x)\overline{f_1(x)}dx \\ &+ \int_0^\infty f_1(x)\left(-\overline{\dot{f}_1(x)}\right)dx \\ &+ \int_0^\infty -\dot{f}_2(x)\overline{f_2(x)}dx \\ &+ \int_0^\infty f_2(x)\left(-\overline{\dot{f}_2(x)}\right)dx \\ &= -[|f_1(x)|^2]_0^\infty - [|f_2(x)|^2]_0^1 \\ &= -0 + |\alpha f_2(0)|^2 - 2|f_2(0)|^2 \\ &+ |f_2(0)|^2 \leq 0, \text{untuk } 0 \leq \alpha \leq 1.\end{aligned}$$

Akibatnya untuk $0 \leq \alpha \leq 1$, A_1 membangun semigrup kontraksi.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (1) dipenuhi untuk $X = I$ untuk setiap α.

$$\langle A_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, A_2 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$= \int_0^\infty -\dot{f}_1(x)\overline{g_1(x)}dx$$

$$+ \int_0^\infty f_1(x)\left(-\overline{\dot{g}_1(x)}\right)dx$$

$$+ \int_0^\infty -\dot{f}_2(x)\overline{g_2(x)}dx$$

$$+ \int_0^\infty f_2(x)\left(-\overline{\dot{g}_2(x)}\right)dx$$

$$= -\left[f_1(x)\overline{g_1(x)}\right]_0^\infty$$

$$- \left[f_2(x)\overline{g_2(x)}\right]_0^\infty$$

$$= -0 + 0 - f_2(1)\overline{g_2(1)}$$

$$+ f_2(0)\overline{g_2(0)}$$

$$= -\sqrt{2}f_2(0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\overline{g_2(0)}$$

$$+ f_2(0)\overline{g_2(0)} = 0$$

Akibatnya, berdasarkan lemma A_1^* membangun left invers. Tetapi karena nilainya bergantung pada α maka inversnya tidak unik.

Ruang Hilbert merupakan ruang hasil kali dalam (pre-Hilbert) yang lengkap. Ruang pre-Hilbert dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Pada ruang Hilbert terdapat jenis-jenis operator linear diantaranya operator adjoint dan operator normal. Pembahasan mengenai operator normal memerlukan konsep ruang Hilbert, operator linear kontinu dan operator adjoint.

Metode yang digunakan penulis dalam penyusunan tulisan ini adalah metode tinjauan pustaka (study literature), yaitu dengan memahami beberapa buku tentang Ruang Hilbert, Operator Linier Terbatas, Semigrup.

4. Kesimpulan Dan Saran

Misalkan $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0-semigrup pada ruang Hilbert *H*. Pernyataan berikut ekivalen:

1. $(T(t))_{t\geq 0}$ adalah left invertible.
2. Terdapat C_0-semigrup $(S(t))_{t\geq 0}$ sehingga $S(t)\,T(t) = I$ untuk setiap $t \geq 0$.

$$\|z\| = \|S(t)T(t)z\| \leq \|S(t)\|\|T(t)z\|$$

$$\frac{1}{\|S(t)\|}\|z\| \leq \|T(t)z\|$$

Pilih $m(t) = \frac{1}{\|S(t)\|}$, maka $m(t)\|z\| \leq \|T(t)z\|$. Jadi $(T(t))_{t\geq 0}$ left invertible.

Misalkan *A* adalah infinitesimal generator dari $(T(t))_{t\geq 0}$. Pilih $\omega \in \mathbb{R}$ sehingga $A - \omega I$ eksponensial stabil.

Untuk $z \in H$

$$m_0\|z\|^2 = \int_0^\infty \left\|e^{(A-\omega I)t}\right\|^2 \|z\|^2 dt$$

$$= \int_0^\infty \|e^{At}\|^2\, e^{2\omega t}\|z\|^2 dz$$

$$= \int_0^\infty m(t)^2 e^{-2\omega t}\|z\|^2 dt$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-2\omega t}\|T(t)z\|^2 dt \leq M\|z\|^2$$

Definisikan $\langle z, Xz\rangle = \int_0^\infty e^{-2\omega t}\|T(t)z\|^2$, maka:

$$m_0 I \leq X \leq MI$$

X adalah solusi dari

$$\langle (A-\omega I)z_1, Xz_2\rangle + \langle z_1, X(A-\omega I)z_2\rangle = -\langle z_1, z_2\rangle,$$

untuk $z_1, z_2 \in D(A)$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Pengelola Rumah Jurnal UIN Imam Bonjol Padang
2. MAp Journal Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang
3. Rekan-Rekan Dosen Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang
4. Para penulis Map Journal Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang
5. Kepada Tim editor yang telah memberikan masukan terhadap kebaikan tulisan ini.

Daftar Pustaka

[1] R.F. Curtain., H.J. Zwart. 1995. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear System Theory,* Springer-Verlag. New York.

[2] B.H. Haak, E.M.Ouhabaz, *Exact Observability, square function*, 2012, J.Func Anal, 262(6), 8(2), pp.2903-2927

[3] M. Haase, 2004. *Decomposition theorem for generator of strongly continuos groups on Hilbert spaces*, J.Operator Theory, 52(1),pp 21-37

[4] J.C. Louis, D.Wexler.1983. *On Exact Controllability In Hilbert Spaces*. Jurnal of Differential Equation. 49,pp 258-269.

[5] G.Q.Xu, C. Liu, Y.F. Shang.2000. *Characteristic of Left invertible semigroups and admissibility of observasion operation*, System and Control Letters, 58(8),pp. 561-566.

[6]. G.Q. Xu, Y.F.Shang, Characteristic of left invertible semigroups and admissibility of absservation operators,System and Contol Letters, 58(8),pp. 561-566,2009

[7] Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak.* UGM, Yogyakarta.

[8] F. Kappel, W. Schappacher: *Strongly continuous semigroups–an introduction, preprint*. 5.