MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id
UIN IMAM BONJOL PADANG

PEMODELAN RANTAI MARKOV MENGGUNAKAN ALGORITMA METROPOLIS-HASTINGS

THE MARKOV CHAIN MODELING USING METROPOLIS-HASTINGS ALGORITHM

Harizahayu[§]

Politeknik Negeri Medan, Indonesia [Email: harizahayu@polmed.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

Received Oktober 2020; Accepted November 2020; Published Desember 2020;

Abstrak

Pada tulisan ini akan dijelaskan bentuk distribusi posterior P(probabilitas klaim) = Beta (β|α) dengan proses simulasi implementasi algoritma yang disederhanakan dan penerapan algoritma Markov Chain Monte Carlo dengan mengunkan analisis sistem Bayes dengan pendekatan model Markov Monte Carlo. Algoritma Markov Chain Monte Carlo adalah suatu kelas algoritma untuk melakukan sampling dari distribusi probabilitas dengan membangun rantai Markov pada suatu distribusi tertentu yang stasioner. Algoritma Metropolis merupakan algoritma untuk membangkitkan barisan sampel menggunakan mekanisme penerimaan dan penolakan (*accept-reject*) dari suatu distribusi probabilitas yang sulit untuk dilakukan penarikan sampel. Penggunaan perangkat lunak R sebagai media untuk mengeksplorasi algoritma dan diagnostik yang umum untuk implementasi MCMC. Hampir semua program dapat dijalankan dengan fungsionalitas dasar R yang berarti tidak diperlukan overhead penyetelan untuk menjalankan blok kode selain versi kerja R dan tersedia gratis secara online untuk semua sistem operasi.
Kata Kunci: Distribusi Posterior, Rantai Markov Monte Carlo, Metropolish, Peluang Klaim

Abstract

In this paper, we will describe the form of the posterior distribution of P (claim probability) = $Beta(\beta|\alpha)$ *with A simplified algorithm implementation simulation process and the application of the Markov Chain Monte Carlo algorithm are given by the Bayes system analysis with the Markov Monte Carlo model approach. The Monte Carlo algorithm of the Markov Chain is a class of algorithms for sampling the distribution of probability through the construction of a Markov chain in a particular stationary distribution. The Metropolis-Hastings algorithm is an algorithm used to produce sample sequences from a probability distribution that is difficult for sampling using an accept-reject mechanism. Usage of R program as a platform for MCMC implementations to explore popular algorithms and diagnostics. It is possible to run almost any program with simple R features, which means that no overhead configuration is needed to run code blocks other than the working version of R, and all operating systems are available online free of charge.*
Keywords*: Posterior Distribution, Monte Carlo Markov Chain, Metropolish, Claims Probability*

1. Pendahuluan

Metode pengambilan sampel *Monte Carlo* (MC) diterapkan secara luas dalam sistem inferensi Bayesian simulasi dan masalah optimasi. Algoritma *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) adalah metode MC yang menghasilkan rantai Markov dengan yang diinginkan distribusi invarian. Dalam penelitian ini difokus pada sampler *Metropolis-Hastings* (MH), yang dapat dianggap sebagai atom/inti bagi teknik MCMC, yang memperkenalkan pengertian dasar dan properti yang berbeda dan menjelaskan secara rinci semua elemen-elemen yang terlibat dalam algoritma MH dan varian yang paling relevan. Beberapa perbaikan dan perluasan terbaru diusulkan dalam literatur juga dibahas secara singkat, memberikan gambaran yang cepat tapi lengkap tentang arus pengambilan sampel nyata berbasis Metropolis [5].

Teori penskalaan optimal menghasilkan kondisi untuk tingkat penerimaan optimal tanpa gejala pada algoritma Metropolis menjadi 0,234 ketika diterapkan pada target distribusi multi-dimensi tertentu. Distribusi target berdimensi d ini dibentuk dari komponen independen, masing-masing diskalakan menurut fungsinya dari d. Penelitian ini menunjukkan bahwa ketika kondisi tidak terpenuhi maka proses pembatas dari algoritma harus diubah/diganti agar menghasilkan tingkat penerimaan yang optimal secara asimtotik yang mungkin akan berbeda secara drastis dari 0,234 biasanya. Secara khusus, telah membuktikan bahwa $d \to \infty$ membentuk urutan proses stokastik pada komponen ke-i dari tiap-tiap rantai markov yang selalu konvergen pada proses difusi Langevin dengan sebuah ukuran kecepatan baru v, kecuali dalam kasus tertentu di mana ia menyatu dengan algoritma Metropolis satu dimensi dengan aturan penerimaan α^*[1].

Teorema penskalaan optimal semuanya terbukti di bawah sangat terbatas dan tidak realistis asumsi (misalnya, distribusi target dengan koordinat independen), tampaknya memberikan pedoman yang berguna secara lebih umum. Secara khusus, hasil tentang penerimaan *asimtotic rate* memberikan tolok ukur yang berguna untuk algoritma Meteropolis dalam berbagai pengaturan. Algoritma MCMC adaptif tampaknya menyediakan metode pencarian yang sederhana dan intuitif rantai Markov yang menyatu dengan cepat tanpa usaha keras dari pengguna (selain dari pemrograman awal, dan bahkan ada beberapa perangkat lunak generik yang tersedia. hasil ini menunjukkan perkembangan penerapan dari keduanya optimal penskalaan dan algoritma MCMC adaptif ke beberapa pengaturan MCMC yang berbeda [7].

Untuk membantu memperkuat algoritma yang paling sederhana yaitu algoritma Metropolis yang telah menyediakan implementasi dasar dengan perangkat lunak R [3] dan juga menggunakan keluaran sampler Metropolis kami untuk menjelajahi sejumlah diagnosis yang berguna dalam Bayesian untuk menganalisis dan memeriksa tingkat kekonvergenan sampel , titik stasioner, gabungan dari multiple chain, dan untuk menentukan tingkat efisiensi dengan tujuan akhir serta memastikan representasi yang sesuai dari distribusi posterior.

Sistematika tulisan ini terdiri dari pendahulu yang berisikan penelitian dan kajian dari beberapa penulis sebelumnya, tinjaun pustaka berisikan dalil bayes, distribusi beta, rantai markov, algoritma metropolis, dan cara pemilihan proposal yang akan digunakan pada penelitian ini, hasil dan pembahasan berisikan kajian dan alur yang dikerjakan oleh penulis untuk mendapatkan output dari tujuan penelitian ini, dan kesimpulan.

2. Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka yang digunakan dalam tulisan ini adalah sebagai berikut:

Dalil Bayes 2.1. [2],[9] *Misalkan kejadian* $B_1, B_2, \cdots, B_k$ *merupakan himpunan ruang sampel* T *dengan* $P(\beta_i) \neq 0$ *untuk* $i = 1,2,\cdots,k$. *Misalkan* A *suatu kejadian sebarang dalam* T *dengan* $(A) \neq 0$, *maka:*

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)}$$

$$= \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Untuk $i = 1,2,\cdots,k$.

Bukti. Menurut definisi peluang bersyarat, B bila A diketahui dinyatakan dengan $P(B|A)$, maka

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad bila\ P(A) > 0$$

Sehingga diperoleh persamaan:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$$

Dengan menggunakan teorema jumlah peluang penyebut

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)}$$

Dan dengan menggunakan aturan perkalian pada pembilang dan penyebut, diperoleh:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)} \quad \blacksquare$$

2.1. Distribusi Beta

Peubah acak mempunyai distribusi Beta dengan parameter α dan β [2][10], jika peubah tersebut bernilai $(0,1)$ dengan fungsi pdf X adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \alpha,\beta > 0, 0 < x < 1 \\ 0, \quad lainnya \end{cases}$$

Dimana:

α dan β: parameter distribusi beta

$\Gamma(\alpha)$: fungsi gamma: $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^x \, dx$

Untuk $0 < x < \infty$ dan $\alpha > 0$

$\Gamma(\beta)$: fungsi gamma: $\int_0^\infty x^{\beta-1} e^x \, dx$

Untuk $0 < x < \infty$ dan $\beta > 0$

2.2. Model Rantai Markov

Suatu proses stokastik [1],[2] $(X_{t,}\ t = 0,1,2,\cdots)$ yang mengikuti sifat bahwa kejadian pada saat t yaitu peubah acak X_t hanya dipengaruhi oleh kejadian satu langkah yang merupakan proses stokastik khusus yang mengikuti sifat rantai markov, secara matamatis sifat rantai markov adalah sebagai berikut:

$$P = (X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, \cdots, X_0 = x_0)$$

$$= P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1})$$

Peluang bersyarat $P(X_t = j | X_{t-1} = i)$ disebut peluang transisi satu langkah, yaitu proses dalam keadaan j pada waktu t jika mula-mula proses apada keadaan i pada waktu $t-1$. Sedangkan peluang transisi m langkah jika $P_{ij}^{(m)} =$

$P(X_{t+m} = j|X_t = i)$. Suatu rantai markov mempunyai sebaran stasioner $\mu(x)$ jika keadaan i dan j pada semua t berlaku:

$$P = (X_t = j|X_{t-1} = i) = P(X_0 = j|X_1 = i)$$

2.3. Algoritma Metropolis

Algoritma Meropolis merupakan salah satu algoritma yang paling popular dan merupakan modifikasi dari algoritma MCMC. Perbedaanya terletak pada penggunaan bobot pada setiap pengulangan dati iterasi *Monte-Carlo*. Algoritma *Metropolis - Hastings* bekerja dengan menghasilkan urutan nilai sampel sedemikian rupa sehingga, dengan semakin banyak nilai sampel yang dihasilkan, distribusi nilai mendekati distribusi yang diinginkan $P(x)$. Nilai sampel ini diproduksi secara berulang, dengan distribusi sampel berikutnya hanya bergantung pada nilai sampel saat ini ,sehingga membuat urutan sampel menjadi rantai Markov. Secara khusus, di setiap iterasi, algoritma memilih target untuk nilai sampel berikutnya berdasarkan nilai sampel saat ini. Kemudian, dengan beberapa kemungkinan, target diterima (dalam hal nilai target ini digunakan dalam iterasi berikutnya) atau jika ditolak (dalam hal ini nilai kandidat dibuang, dan nilai saat ini digunakan kembali pada iterasi berikutnya). Probabilitas penerimaan ditentukan dengan membandingkan nilai-nilai fungsi $f(x)$ dari nilai sampel saat ini dan terget sehubungan dengan distribusi yang diinginkan $P(x)$ [8].

2.4. Pilihan Khusus Bentuk Proposal

Beberapa kasus menarik, tergantung pada pemilihan density proposal [5]. Ada beberapa cara pemilihan proposal:

a. Proposal Simetrik

Jika proposal memenuhi kesetaraan $q(z|x) = q(x|z)$, sehingga probability penerimaannya sederhana.

$$\alpha(x|z) = \min\left[1, \frac{\pi(z)}{\pi(x)}\right]$$

Tergantung pada evaluasi dari fungsi target π. Khusus pada kasus ini sangat menarik karena kasus ini menjelaskan hubungan yang erat antara masalah pengambilan sampel dan pengoptimalan kasus. Sehingga penyelesaian kasus ini memperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\alpha(x|z) = \begin{cases} 1, & jika \quad \pi(z) \geq \pi(z) \\ \dfrac{\pi(z)}{\pi(x)}, & jika \quad \pi(z) < \pi(x) \end{cases}$$

Sampel memberikan nilai yang lebih tinggi dari π selalu diterima, sedangkan sampelnya memberikan nilai yang lebih kecil dari π hanya diterima menurut probabilitas tertentu.

b. Independent Proposal

Jika proposal pdf independen pada inisialisasi selanjutnya di rantai, contoh: $q(z|x) = q(x)$. Probabilitas penerimaan adalah:

$$\alpha(x|z) = \min\left[1, \frac{\pi(z)q(x)}{\pi(x)q(z)}\right] = \min\left[1, \frac{w(z)}{w(x)}\right]$$

Dimana $w(x) = \frac{\pi(x)}{q(x)}$ adalah bobot yang terkait dengan sampel x dalam standar teknik pengambilan sampel.

c. Proposal Optimal

Jika $g(x) = \bar{\pi}(x)$, contoh: proposal tersebut sesuai dengan target pdf $\bar{\pi}(x) \propto \pi(x)$, untuk

$\alpha(x, z) = 1$. Sehingga, semua sampel yang diusulkan diterima karena didistribusikan sebagai $\bar{\pi}(x)$ yang menghasilkan nilai yang independen dan tidak memiliki korelasi satu sama lain.

d. Proposal Random Walk

Pada kasus ini ketika proposal pdf dapat diformulasikan sebagai $q(z|x) = q(z - x)$, contoh : x berperan sebagai parameter lokasi (*mean*). Pilihan ini menyajikan perilaku eksploratif yang menarik karena lokasi proposal mengikuti sebuah perjalanan acak di sekitar ruang parameter pada inisialiasi nilai pada rantai.

3. Hasil Dan Pembahasan

Adapun hasil dan pembahasan dari adalah sebagai berikut:

3.1. Alur Algoritma Metropolis

1. Pilih nilai awal $x^{(0)}$.
2. Untuk $t = 1, \cdots, T$.
   a. Buatlah sampel $z' = \sim q\left(x \middle| x^{(t-1)}\right)$
   b. Terima nilai baru, $x^{(t)} = z'$, dengan kemungkinan

$$\alpha\left(x^{(t-1)}, z'\right) min\left[1, \frac{\pi(z')q\left(x^{(t-1)}\middle|z'\right)}{\pi(x^{(t-1)})q(z'|x^{(t-1)})}\right]$$

jika tidak , maka set ulang $x^{(t)} = x^{(t-1)}$.

Algoritma mengembalikan urutan status $\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(t)}, \cdots, x^{(T)}\right\}$ atau menghapus sub himpunan anggota dengan periode *burn-in* jika untuk memeperoleh estimasi membutuhkan durasi waktu yang panjang. Nilai awal selanjutnya $x^{(t)}$ dapat menjadi sampel yang diusulkan z' (dengan nilai kemungkinan α) atau nilai awal berikutnya $x^{(t-1)}$ (dengan nilai kemungkinan $\alpha - 1$).

3.2. Elemen-elemen pada metode M-H

Algoritma MH terdiri dari 3 elemen-elemen berikut:

1. Density proposal $q(z|x)$
2. Probabilitas penerimaan $\alpha(x|z)$
3. Fungsi target $\pi(x)$

Semuanya dapat divariasikan, ditingkatkan atau diperpanjang untuk meningkatkan kinerja algoritma, dan selalu memastikan ergodisitas rantai. Proposal pdf q harus dipilih sedekat mungkit dengan target π. Penerimaan yang berbeda pada probabilitas α dapat digunakan, dan secara umum metode MH fungsi penerimaan yang sesuai harus dirancang untuk menjamin keergodikan rantai yang dihasilkan. Selanjutnya di beberapa skenario tertentu, peningkatan ruang parameter buatan dapat berguna untuk meningkatkan kinerja. Lebih khusus lagi, peningkatan fungsi target π_g akan dipelajarin di beberapa kasus. Target π_g dibangun untuk memperoleh posterior pdf πyang sebenarnya sebagai *marginal density* [5].

3.3. Sumber Data

Data diambil dari hasil ulangan 100 orang mahasiswa untuk mata kuliah Matematika yang lulus ulangan berjumlah 45 orang. Adapun pada tahap selanjutnya dilaksanakan remedial bagi 50 orang mahasiswa yang tidak lulus dan tidak hadir pada saat ulangan dan terdapat 25 mahasiswa yang lulus ulangan pada tahap remedial.

3.4. Pemilihan Prior Beta

Distribusi beta adalah konjugasi prior dari distribusi binomial, artinya jika fungsi kemungkinan adalah binomial dan distribusi prior adalah beta posterior juga beta [6]. Secara spesifik, misalkan likelihood distribusi binomial $(N|\theta)$ untuk N diketahui dan θ parameter yang tidak diketahui dan data x merupakan bilangan *integer* antara 0 dan N, sehingga prior dari beta dapat diperoleh sebagai berikut:

Hipotesis : θ dan data: x

Prior: Beta $(a|b)$

$c_1\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$

Likelihood: Binomial $(N|\theta)$

$$c_2\theta^{x}(1-\theta)^{N-x} \quad (1)$$

Posterior: Beta $(a+x, b+N-x)$

$$c_3\theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+N-x-1} \quad (2)$$

Persamaan tersebut disederhanakan dengan menuliskan koefisien normalisasi masing-masing sebagai c_1,c_2, dan c_3 sebagai berikut:

$$c_1 = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,(b-1)!}$$

$$c_2 = \binom{N}{x} = \frac{N!}{x!\,(N-x)!}$$

$$c_3 = \frac{(a+b+N-1)!}{(a+x-1)!\,(b+N-x-1)!}$$

Adapun data yang diinput kan dengan menggunkan program R 3.5.3 sebagai berikut:

mahasiswa_1 <- 100; n_kuis <- 45

mahasiswa_2 <-50 ; r_kuis <- 25

Prior: $p(a|b)$

a <- 5; b <- 10

a <- 10; b <- 5

a <- 10; b <- 10

a <- 5; b <- 5

Kemudian dengan menggunakan bantuan perangkat lunak R akan ditentukan nilai dari likelihood dan posteriornya [4].

3.5. Hasil Analisis Data dengan Metode M-H

Berdasarkan nilai prior distribusi beta:

mahasiswa_1 <- 100; n_kuis <- 45

mahasiswa_2 <-50 ; r_kuis <- 25

untuk prior: $p(5|10)$

a <- 5; b <- 10

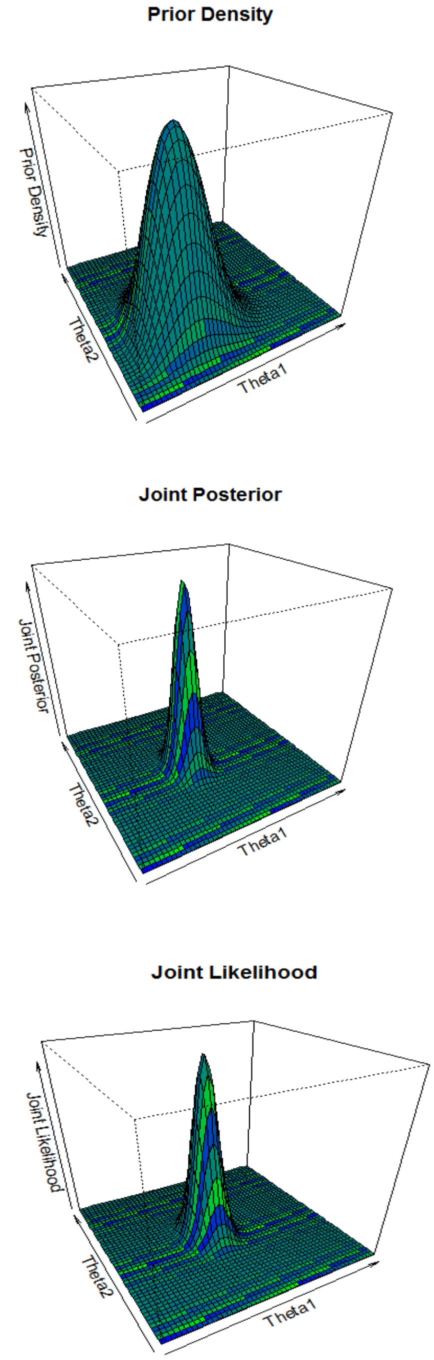
Kemudian dicari nilai *likelihood* dan posterior dengan menggunakan rumus (1) dan (2). Selanjutnya akan dibentuk matriks densitas dari distribusi joint prior $p(a|b)$ dimana a merupakan jumlah mahasiswa yang mengikuti ulangan dan b jumlah mahasiswa yang lulus passing grade. Sehingga secara matematika dapat dibentuk rmus sebagai berikut:

$p(\theta_i|\theta_j) = p(\theta_i)$,

untuk $i, j = 1{,}2$ dan $p(\theta_i|\theta_j) = p(\theta_i).p(\theta_j)$

$$p(\theta_1,\theta_2|data) = \frac{p(data|\theta_1,\theta_2)p(\theta_1|\theta_2)}{\int\int p(data|\theta_1,\theta_2)p(\theta_1|\theta_2)d\theta_1 d\theta_2}$$

Berdasarkan asumsi di atas *joint distibution* dapat difaktorkan menjadi dua konjungsi distribusi beta yang independen. Adapun output plot ketiga komponen prior density, joint posterior, dan joint likelihood untuk distribusi $\beta(5|10)$ dengan menampilkan aplikasi dalam bentuk 2 dimensi sebagai berikut:

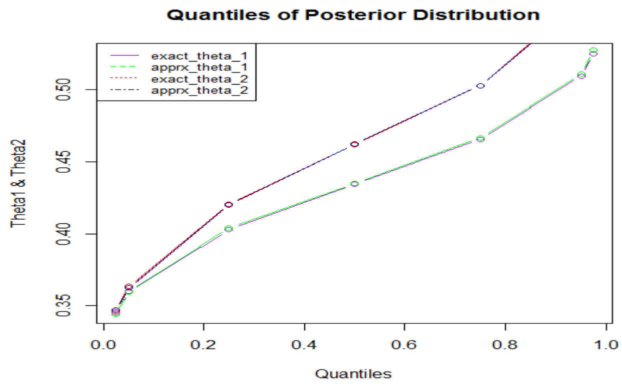


Gambar 1. Plot Prior, Posterior dan Likelihood

Selanjutnya akan dilakukan perhitungan posterior secara analitik dengan algoritma metropolis untuk proposal dsitribusi bivariat normal dan varians $0{,}05^2$,mengasumsikan matriks kovarians kedalam variabel cov_mat, serta mengambil sampel sebanyak 20000 untuk melihat perbandingan nilai eksak dengan nilai aprroksimasinya. Kemudian dengan memanfaatkan *package library* (MASS) diperoleh output pemanggilan fungsi posterior sebagai berikut:

```
> quant_thetas
      exact_theta_1 apprx_theta_1 exact_theta_2
apprx_theta_2
2.5%     0.3451191    0.3438779    0.3462152
0.3472135
5%       0.3599487    0.3595262    0.3634803
0.3624527
25%      0.4028621    0.4041664    0.4205574
0.4201944
50%      0.4345967    0.4349983    0.4620781
0.4623245
75%      0.4657141    0.4667697    0.5028922
0.5028516
95%      0.5096200    0.5111512    0.5633470
0.5613928
97.5%    0.5249114    0.5273480    0.5807633
0.5816204
```

Berikut ini adalah plot Quantil dari distribusi posterior:



Gambar 2. Plot Quantile Distribusi Posterior

Berdasarkan output quantil distribusi posterior di atas dapat diamati bahwa penggunaan algoritma metropolis untuk menentukan nilai eksak dari theta_1 hampir sama dengan nilai approksimasinya dari theta_1 mulai dari tingkat kuantil 2,5%, 5%, 25%, 50%, 75%, 95%, dan 97,5% begitu juaga dengan nilai aprroksimasi theta_2 yang hampir sama dengan nilain eksaknya. Nilai proposal merupakan nilai awal yang diberikan unutk menentukan nilai posterior dari suatu distribusi.

4. Kesimpulan Dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Distribusi posterior dibentuk dari sampel dan distribusi awal (*prior*).
2. Analisis data bayesian adalah metode fleksibel untuk menyesuaikan semua jenis model statistik.
3. Maksimum likelihood adalah kasus khusus pada model Bayesian.
4. Jumlah iterasi sangat menentukan nilai eksak dan nilai aproksimasi pada algoritma metropolish.
5. Algoritma Markov chain Monte Carlo yang termasuk dalam bagian algoritma aproksimasi yang menggunakan teknik simulasi menggunakan bantuan komputer.

5. Ucapan Terima Kasih

Pada penelitian ini penulis mengucapkan terima kasih banyak kepada rekan-rekan yang telah membantu penulis dalam perbaikan tulisan dan saran revisi *sourcecode* pemograman R sehingga penelitian ini dapat selesai tepat waktu.

Daftar Pustaka

[1] Bédard, M. 2008. *Optimal acceptance rates for Metropolis algorithms: Moving beyond 0.234. Stochastic Processes and Their Applications*, 118(12), 2198–2222. https://doi.org/10.1016/j.spa.2007.12.005

[2] Bain, L.J and Engelhardt, M. 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, ed, California: PWS-Kent Publising Company.

[3] Ford, P., & Cspa, F. 2018. *MCMC Algorithms*. April, 1–28.

[4] Hornik, K. 2009. *Use R ! Robert Gentleman. In Media*. http://www.springerlink.com/index/10.1007/978-0-387-88698-5

[5] Martino, L., Elvira, V., & Camps-Valls, G. 2017. *Group metropolis sampling. 25th European Signal Processing Conference*, EUSIPCO 2017, 2017-Janua(2), 201–205. https://doi.org/10.23919/EUSIPCO.2017.8081197

[6] Orloff, J., & Bloom, J. 2014. *Normal Beta Conjugate*. https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2014/readings/MIT18_05S14_Reading15a.pdf

[7] Rosenthal, J. S. 2011. *Optimal proposal distributions and adaptive MCMC. Handbook of Markov Chain Monte Carlo*.1, 93–112. https://doi.org/10.1201/b10905-5

[8] Rupert, M., & Katie, R. 2012. *Reproduced with permission of the copyright owner . Further reproduction prohibited without. Journal of Allergy and Clinical Immunology*.130(2), 556. http://dx.doi.org/10.1016/j.jaci.2012.05.050

[9] Safitri, D. 2010. *Metode Bayes dengan model rantai Markov Monte Carlo untuk menaksir jumlah klaim asuransi (Doctoral dissertation*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

[10] Walpole, Ronald E., Raymond H Myers. 1995. *Ilmu Peluang Dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuawan*, edisi ke-4, Penerbit ITB, Bandung.