MAp Journal
Mathematics & Applications
UIN IMAM BONJOL PADANG
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

KONSISTENSI DARI ESTIMATOR MARTINGALE PADA MODEL EPIDEMI

CONSISTENCY OF MARTINGALE ESTIMATOR FOR EPIDEMIC MODEL

Vira Agusta[1§], Ezhari Asfa'ani[2]

[1]Universitas Gadjah Mada, Bulaksumur, Sleman, DIY, Indonesia [agusta.vira@rocketmail.com]
[2]Program Studi Matematika FST, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: ezhariasfaani@uinib.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

Received Oct 21st 2021; Accepted Nov 22nd 2021; Published Dec 01st 2021;

Abstrak

Di dalam artikel ini, dibahas tentang estimasi parameter pada model epidemi. Model epidemi yang dibahas dalam penelitian ini memiliki 2 parameter yaitu laju penularan dan laju kesembuhan. Masing-masing parameter akan diestimasi dengan estimator martingale. Metode estimasi dengan estimator martingale muncul sebagai cara natural estimasi bila tidak ada asumsi distribusi dari model dan estimator maksimum likelihood tidak dapat diperoleh dalam bentuk tertutup (*close form*). Perilaku asimtotis dari estimator martingale diamati yaitu konsistensi dan normalitas asimtotisnya. Dari teorema dan proposisi dapat dibuktikan bahwa estimator martingale dari laju penularan dan laju kesembuhan konvergen dalam probabilitas ke parameter awalnya. Hal ini menunjukkan estimator martingale laju penularan dan laju kesembuhan bersifat konsistensi. Sifat konsistensi dari kedua estimator ini juga ditunjukkan dengan simulasi menggunakan software R.

Kata Kunci: Estimator Martingale, laju penularan, laju kesembuhan, konsistensi

Abstract

In this paper we consider about parameters estimation of epidemic model. The epidemic model here has two parameters, namely infection and removal rate. Each parameter will be estimated with a martingale estimation. This method arises as a natural way of estimation when there is no distribution in the model assumed, or; when the maximum likelihood estimator cannot be obtained in a closed form. The asymptotic behavior of martingale estimator which is observed, are consistency and asymptotic normality. By using some theorems and propositions, it can be proved that the martingale estimators of infection and removal rate are convergent in probability to its initial parameter. This indicate that the martingale estimators are consistent. The consistency both of these estimators are shown by simulation in R software.

***Keywords**: Martingale estimator, infection rate, removal rate consistency.*

1. Pendahuluan

Metode statistika adalah prosedur-prosedur yang digunakan dalam pengumpulan, penyajian, analisis, dan penafsiran data. Metode statistika dibagi ke dalam dua kelompok besar yaitu statistika deskriptif dan inferensi statistik. Statistika deskriptif merupakan metode yang berkaitan dengan pengumpulan dan penyajian data sehingga memberikan informasi yang berguna. Sedangkan inferensi statistik mencakup semua metode yang berhubungan dengan analisis sebagian data untuk kemudian sampai pada peramalan atau penarikan kesimpulan mengenai keseluruhan data.

Inferensi statistik merupakan proses pengambilan kesimpulan (generalisasi) dari suatu sampel tertentu dari suatu himpunan *n* observasi untuk suatu populasi. Estimasi parameter adalah salah satu bentuk prosedur inferensi. Teori estimasi memegang peran yang sangat penting dalam inferensi statistika karena teori estimasi bersama dengan pengujian hipotesis merupakan dasar inferensi statistika yang dilandasi oleh teori peluang. Estimasi parameter dibedakan menjadi dua macam, yaitu estimasi titik dan estimasi interval. Pada estimasi titik, satu titik atau satu harga digunakan untuk mengestimasi parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi parameter populasi dapat dilakukan dengan menggunakan pendekatan klasik yaitu penarikan kesimpulan berdasarkan informasi yang diperoleh dari sampel random yang diambil dari suatu populasi. Estimasi parameter merupakan topik yang banyak dikaji dalam berbagai bidang keilmuan diantaranya bidang epidemiologi.

Epidemiologi adalah ilmu yang mempelajari tentang penyebaran penyakit menular pada manusia dan faktor yang dapat mempengaruhi penyebaran itu (KBBI, 2015). Secara umum ada 2 macam model yang digunakan pada penyebaran epidemi yaitu model epidemi deterministik dan model epidemi stokastik. Dalam bidang epidemiologi dikenal beberapa model epidemi diantaranya model SI (*Susceptible- Infective)*, SIS (*Susceptible-Infective-Susceptible*), SIRS (*Susceptible-Infective-Removed-Susceptible*) dan SIR (*Susceptible-Infective-Removed*). Setiap model epidemi mempunyai parameter-parameter yang akan diestimasi. Salah satu estimasi yang dapat digunakan adalah estimator martingale. Metode martingale dipopulerkan pada abad ke 18 oleh P.Levy yang digunakan sebagai salah satu metode tebak-tebakan (*betting*) di Prancis. Martingale digunakan di sejumlah aplikasi di berbagai bagian dalam teori probabilita. Martingale merupakan teori manajemen modal probabilitas yang memungkinkan kesamaan nilai sesuatu di masa tertentu dengan masa sebelumnya dengan menggunakan prinsip penggandaan. Jadi bisa diartikan makna dari martingale yaitu apa yang diharapkan akan diperoleh nilainya sama dengan sebesar yang sudah diperoleh sebelumnya.

Metode estimasi dengan estimator martingale ini muncul sebagai cara natural estimasi bila tidak ada asumsi distribusi dari model dan estimator maksimum likelihood tidak bisa diperoleh dalam bentuk tertutup (*closed form*). Dengan mengamati prilaku asimtotis suatu estimator yaitu konsistensi dan normalitas asimtotisnya, sehingga dapat dilakukan inferensi [6]. Konsistensi merupakan salah satu sifat asimtotis dari barisan estimator. Pada penelitian ini, akan dibahas konsistensi dari estimator martingale pada model epidemi.

2. Landasan Teori

2.1 Variabel Random Multivariabel

Definisi Distribusi Multinomial 2.1.1 [4] *Misalkan n dan m bilangan bulat positif dan $p_1, \dots, p_n$ bilangan yang memenuhi $0 \le p_i \le 1$, $i = 1, \dots, n$ dan $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Suatu vektor random $(X_1, \dots, X_n)$ mempunyai distribusi multinomial dengan m percobaan dan probabilitas sel $p_1, \dots, p_n$ jika fungsi massa probabilitas dari $(X_1, \dots, X_n)$ adalah*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{m!}{x_1! \dots x_n!} p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n}$$

$$= m! \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{x_i}}{x_i!},$$

pada himpunan $(x_1, \dots, x_n)$ dengan x_i merupakan bilangan bulat nonnegatif dan $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$.

2.2 Teori Sampel Besar dan Distribusi Pelimitan

Konsistensi adalah sifat asimtotis yaitu menggambarkan sifat estimator bila ukuran sampel menjadi takhingga. Konsistensi adalah sifat dari barisan estimator, bukan dari estimator tunggal walaupun biasanya disebut suatu estimator konsisten. Bila kita mengobservasi $X_1, X_2, \dots$ menurut fungsi densitas $f(x, \theta)$, dapat dikonstruksikan barisan estimator $W_n = W_n(X_1, \dots, X_n)$ dengan melakukan estimasi yang sama untuk setiap ukuran sampel *n*. Berikut definisi konsistensi dari barisan estimator untuk parameter θ.

Definisi 2.2.1 Konsistensi [4] *Barisan estimator $W_n = W_n(X_1, \dots, X_n)$ adalah barisan estimator konsisten untuk parameter θ, bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $\theta \epsilon \Omega$,*

$$\lim_{n \to \infty} P(|W_n - \theta| < \varepsilon) = 1.$$

Definisi 2.2.1 di atas mengatakan bahwa barisan estimator konsisten jika konvergen dalam probabilitas pada parameter θ. Dengan kata lain $W_n = W_n(X_1, \dots, X_n)$ estimator dari θ, W_n disebut konsisten bila W_n konvergen dalam probabilitas ke θ.

2.3 Proses Stokastik

Berikut diberikan definisi proses stokastik dan martingale.

Definisi 2.3.1 Proses Stokastik [10] *Suatu proses stokastik adalah keluarga variabel random $\{X_t, t \epsilon T\}$ yang didefinisikan pada ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Jika himpunan indeks T adalah himpunan terhitung yaitu $T = \{1,2,3, \dots\}$, maka $\{X_t\}$ disebut proses stokastik dalam waktu diskrit. Jika himpunan indeks T adalah kontinu yaitu $T = [0, \infty)$, maka $\{X_t\}$ disebut proses stokastik dalam waktu kontinu.*

Definisi 2.3.2 Martingale [2] *Misalkan $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suatu ruang probabilitas dengan $X_1, X_2, \dots$ barisan variabel random yang terintegralkan di $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dan $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ adalah suatu himpunan barisan naik dari sub σ −field $\mathcal{F}$. X_n diasumsikan sebagai $\mathcal{F}_n$-terukur sedemikian sehingga $X_n : (\Omega, \mathcal{F}_n) \to (R, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Barisan X_n disebut sebagai martingale relatif terhadap $\mathcal{F}_n$ (dengan kata lain, $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ disebut sebagai martingale) jika dan hanya jika untuk setiap $n = 1,2, \dots$*

- *$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ disebut martingale*

- $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ *disebut submartingale dan*
- $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ *disebut supermartingale.*

3. Estimasi Parameter Model Epidemi dengan Estimator Martingale

Misalkan $Z_1^n, \dots, Z_{\mathrm{m}}^n$ merupakan suatu proses stokastik dan $\mathcal{F}_k^n$ suatu $\sigma-$field yaitu $\sigma(Z^n(t_1^n), \dots, Z^n(t_k^n))$ yang dibangun oleh $(Z^n(t_1^n), \dots, Z^n(t_k^n))$. Proses stokastik $Z_1^n, \dots, Z_{\mathrm{m}}^n$ akan mengalami kenaikan yang bergantung pada laju transisi yang didefinisikan oleh fungsi non negatif $a_1, \dots, a_m$. Domain dari fungsi $a_1, \dots, a_m$ adalah simpleks-2 yaitu $\mathbb{S} = \{(u, v, w) \in [0,1]^3 : u + v + w = 1\}$ dan diasumsikan memenuhi :

(C) untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan variabel random $\Delta Z_1^n(t_k^n), \dots, \Delta Z_m^n(t_k^n)$ yang bersifat independen serta bersyarat $\mathcal{F}_{k-1}^n$ dan memenuhi :

$$E(\Delta Z_i^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n) = a_i(\chi^n(t_{k-1}^n))$$

untuk $i \in (1, \dots, m)$, dengan

$$\chi^n(t) = \left(\sigma^n(t), \iota^n(t), \rho^n(t)\right) \qquad (1)$$

dan $\sigma^n(t). \iota^n(t), \rho^n(t)$ masing-masing menyatakan densitas individu yang rentan, terinfeksi, dan individu yang sembuh pada waktu t, untuk $t \geq 0$ didefinisikan

$$\sigma^n(t) = \frac{S^n(t)}{n},\ \iota^n(t) = \frac{I^n(t)}{n},\ \rho^n(t) = \frac{R^n(t)}{n}.$$

Misalkan a_i merupakan fungsi nonnegatif dengan $a_i = \beta_i b_i$, untuk setiap $i = 1, \dots, m$ dimana β_i merupakan parameter dari model epidemi dan b_i fungsi kontinu non-negatif yang didefinisikan pada $\mathbb{S}$. Untuk menentukan estimator dari β_i, didefinisikan filtrasi $\mathcal{G}_t^n = \mathcal{F}_{[nt]}^n$, $\Delta t^n = 1/n$ dan variabel random

$$L_t^n(i) = \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k^n(i) \Delta t^n, (t \geq 0),$$

dengan

$$\xi_k^n(i) = \Delta Z_i^n(t_k^n) - a_i\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right),$$

diperhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
L_t^n(i) &= \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k^n(i) \Delta t^n \\
&= \sum_{k=1}^{[nt]} [\Delta Z_i^n(t_k^n) - (\chi^n(t_{k-1}^n))] \Delta t^n \\
&= \sum_{k=1}^{[nt]} \Delta Z_i^n(t_k^n) \Delta t^n\ - \\
&\quad \sum_{k=1}^{[nt]} \beta_i b_i\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) \Delta t^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_t^n(i) &= \sum_{k=1}^{[nt]} \Delta Z_i^n(t_k^n) \Delta t^n - \\
&\quad \beta_i \sum_{k=1}^{[nt]} b_i\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) \Delta t^n
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh :

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \Delta Z_i^n(t_k^n) \Delta t^n = \beta_i \sum_{k=1}^{[nt]} b_i\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) \Delta t^n + L_t^n(i) \qquad (2)$$

Selanjutnya diperhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{[nt]} \Delta Z_i^n(t_k^n) \Delta t^n &= \Delta t^n \sum_{k=1}^{[nt]} \Delta Z_i^n(t_k^n) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} [Z_i^n(t_k^n) - Z_i^n(t_{k-1}^n)] \\
&= \frac{1}{n} [Z_i^n(t_1^n) - Z_i^n(t_0^n) + Z_i^n(t_2^n) \\
&\quad - Z_i^n(t_1^n) + \dots + Z_i^n\left(t_{[nt]}^n\right) - Z_i^n\left(t_{[nt]-1}^n\right)] \\
&= \frac{1}{n} \left[Z_i^n\left(t_{[nt]}^n\right) - Z_i^n(t_0^n)\right] \\
&= \frac{1}{n} Z_i^n\left(t_{[nt]}^n\right) \\
&= \frac{Z_i^n(t)}{n}
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh $\sum_{k=1}^{[nt]} \Delta Z_i^n(t_k^n) \Delta t^n = \frac{Z_i^n(t)}{n}$, atau $\sum_{k=1}^{[nt]} \Delta Z_i^n(t_k^n) = Z_i^n(t)$. Sehingga persamaan (2) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{Z_i^n(t)}{n} = \beta_i \sum_{k=1}^{[nt]} b_i\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) \Delta t^n\ + L_t^n(i)$$

Pada interval waktu $[0,T]$, $T>0$ diperoleh

$$\beta_i = \frac{Z_i^n(T)}{n\sum_{k=1}^{[nT]} b_i\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)\Delta t^n} - \frac{L_T^n(i)}{\sum_{k=1}^{[nT]} b_i\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)\Delta t^n} \quad (3)$$

Selanjutnya untuk setiap $i=1,\dots,m$ didefinisikan :

$$\hat{\beta}_i^n(T) = \beta_i + \frac{L_T^n(i)}{\sum_{k=1}^{[nT]} b_i\chi^n(t_{k-1}^n))\,\Delta t^n} \quad (4)$$

Substitusi persamaan (3) ke persamaan (4) sehingga diperoleh

$$\hat{\beta}_i^n(T) = \frac{Z_i^n(t)}{n\sum_{k=1}^{[nT]} b_i\chi^n(t_{k-1}^n))\,\Delta t^n}$$

yang merupakan estimator dari β_i untuk $i=1,\dots,m$. Selanjutnya akan dibuktikan $\hat{\beta}_i^n(T)$ merupakan estimator martingale yaitu dengan menunjukan kondisi (C) dipenuhi. Karena $Z_i^n(t)=\sum_{k=1}^{[nt]}\Delta Z_i^n(t_k^n)$ sehingga untuk $i\in(1,\dots,m)$ diperoleh

$$E(Z_i^n(t)\,|\mathcal{F}_{k-1}^n) = E\left(\sum_{k=1}^{[nt]}\Delta Z_i^n(t_k^n)\,|\mathcal{F}_{k-1}^n\right)$$

$$= E\left(\Delta Z_i^n(t_1^n) + \Delta Z_i^n(t_2^n) + \cdots + \Delta Z_i^n\left(t_{[nt]}^n\right)|\mathcal{F}_{k-1}^n\right)$$

untuk $k=1,2,\dots,[nt]$

$$= E(\Delta Z_i^n(t_1^n)|\mathcal{F}_0^n) + E(\Delta Z_i^n(t_2^n)|\mathcal{F}_1^n) + \cdots + E\left(\Delta Z_i^n\left(t_{[nt]}^n\right)\middle|\mathcal{F}_{[nt]-1}^n\right)$$

$$= a_i\left(\chi^n(t_0^n)\right) + a_i\left(\chi^n(t_1^n)\right) + \cdots + a_i\left(\chi^n\left(t_{[nt]-1}^n\right)\right), i\in(1,\dots,m)$$

$$= a_i,(\chi^n(t_0^n) + \chi^n(t_1^n) + \cdots + \chi^n\left(t_{[nt]-1}^n\right)\ i\in(1,\dots,m)$$

$$= a_i\left(\sum_{k=1}^{[nt]}\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)\right),$$

untuk $i\in(1,\dots,m)$. Jadi diperoleh $\hat{\beta}_i^n(T) = \frac{Z_i^n(t)}{n\sum_{k=1}^{[nT]} b_i\chi^n(t_{k-1}^n))\,\Delta t^n}$ adalah estimator martingale dari β_i.

4. Konsistensi Barisan Estimator Martingale

Misalkan barisan estimator martingale $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^n\,(T) = (\hat{\beta}_1^n(T),\dots,\hat{\beta}_m^n\,(T))^T$ untuk setiap $T>0$. Proposisi berikut menyatakan kekonsistenan barisan estimator martingale $\left\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^n\,(T)\right\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ ke parameter $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_m)^T$.

Proposisi 3.2 *Misalkan χ solusi tunggal dari $\frac{d\chi(t)}{dt} = F(\chi(t)), \chi(0)=\chi_0$ dan asumsikan kondisi (C), kondisi (L) dan hipotesis dari 1 berikut dipenuhi:*

(1.1) *Barisan kondisi awal $\{\chi^n(0)\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ konvergen dalam probabilitas ke $\chi_0 = (\sigma_0,\iota_0,\rho_0)$ untuk n menuju ∞.*

(1.2) *Untuk setiap $T>0$ dan $i=1,\dots,m$ dengan*

$$\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{[nT]} E([\Delta Z_i^n(t_k^n) - a_i\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)]^2|\mathcal{F}_{k-1}^n)\right\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$$

konvergen dalam probabilitas ke 0, untuk n menuju ∞.

Maka untuk setiap $T>0$ barisan $\left\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^n\,(T)\right\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ konvergen dalam probabilitas ke $\boldsymbol{\beta}$.

5. Inferensi Statistik untuk Model Epidemi SIR

5.1 Model Epidemi SIR

Model versi deterministik diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick (1927) yang didasarkan pada persamaan diferensial, sedangkan artikel yang ditulis oleh Kendall (1956) merupakan pelopor untuk versi stokastik berdasarkan proses penghitungan. Dua jenis transisi yang mungkin bagi setiap individu, dari rentan ke terinfeksi dan dari individu yang terinfeksi ke individu yang sembuh. Sehingga pada penelitian ini, pemodelan epidemi harus memenuhi persamaan $X^n(t) = X^n(0) + AZ^n(t)$ dengan matriks insidensi A sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } Z^n = \begin{pmatrix} Z_1^n \\ Z_2^n \end{pmatrix}.$$

Jadi Z_1^n merupakan transisi dari rentan ke terinfeksi dan Z_2^n transisi dari infeksi ke individu yang sembuh. Fungsi untuk mendefinisikan tingkat transisi yaitu :

$$a_1(u, v, w) = \beta uv \qquad (5)$$

$$a_2(u, v, w) = \gamma v$$

dengan β dan γ merupakan parameter yang menyatakan laju penularan dan laju kesembuhan. Model ini juga dikenal sebagai model SIR. Perhatikan bahwa kembali persamaan (1), diperoleh

$$a_i\big(\chi^n(t_{k-1}^n)\big) =$$
$$a_i\big(\sigma^n(t_{k-1}^n), \iota^n(t_{k-1}^n), \rho^n(t_{k-1}^n)\big), \qquad (6)$$

untuk $i = 1, \dots, m$

dan berdasarkan persamaan (5) dan (6), untuk $i = 1,2$ sehingga persamaan (6) dapat ditulis menjadi :

$$a_1\big(\chi^n(t_{k-1}^n)\big) =$$
$$a_1\big(\sigma^n(t_{k-1}^n), \iota^n(tt_{k-1}^n), \rho^n(tt_{k-1}^n)\big) =$$
$$\beta\iota^n(tt_{k-1}^n)\rho^n(tt_{k-1}^n) \quad (3.4.4)$$
$$a_2\big(\chi^n(t_{k-1}^n)\big)$$
$$= a_2\big(\sigma^n(t_{k-1}^n), \iota^n(tt_{k-1}^n), \rho^n(tt_{k-1}^n)\big) = \gamma\rho^n$$

Selanjutnya perhatikan kembali Persamaan :

$$X^n(t) = X^n(0) + AZ^n(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} S^n(t) \\ I^n(t) \\ R^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^n(0) \\ I^n(0) \\ R^n(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^n \\ Z_2^n \end{pmatrix}$$

Sehingga dapat ditentukan jumlah individu dalam setiap kopartemen masing-masing :

$$S^n(t) = S^n(0) - Z_1^n.$$
$$I^n(t) = I^n(0) + Z_1^n - Z_2^n. \qquad (7)$$
$$R^n(t) = R^n(0) + Z_2^n.$$

Selanjutnya misalkan $Z_1^n(t) = A^n(t)$ dan $Z_2^n(t) = B^n(t)$, sehingga persamaan (7) menjadi :

$$S^n(t) = S^n(0) - A^n(t),$$
$$I^n(t) = I^n(0) + A^n(t) - B^n(t),$$
$$R^n(t) = R^n(0) + B^n(t).$$

4.2 Estimasi Parameter Model Epidemi SIR dengan Estimator Martingale

Proposisi 2 *Misalkan β dan γ masing-masing merupakan laju penularan dan laju kesembuhan yang didefinisikan pada model epidemi SIR. Didefinisikan A^n dan B^n sebagai proses yang bernilai bilangan bulat. Selanjutnya dengan mengamati epidemi pada interval waktu $[0, T]$, untuk $T > 0$ diperoleh:*

$$\hat{\beta}^n(T) = \frac{A^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nT]} \sigma^n(t_{k-1}^n)\iota^n(t_{k-1}^n)}$$

$$\hat{\gamma}^n(T) = \frac{B^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nT]} \iota^n(t_{k-1}^n)}$$

masing-masing merupakan estimator martingale dari β dan γ.

Bukti:

Akan dibuktikan

a) $\hat{\beta}^n(T) = \frac{A^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nT]} \sigma^n(t_{k-1}^n)\iota^n(t_{k-1}^n)}$

b) dan $\hat{\gamma}^n(T) = \frac{B^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nT]} \iota^n(t_{k-1}^n)}$.

Perhatikan persamaan (3.3.2)

$$\hat{\beta}_i^n(T) = \frac{Z_i^n(T)}{n\sum_{k=1}^{[nT]} b_i\big(\chi^n(t_{k-1}^n)\big)\,\Delta t^n}.$$

Untuk $i = 1$ diperoleh

$$\hat{\beta}_1^n(T) = \frac{Z_1^n(T)}{n\sum_{k=1}^{[nT]} b_1\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)\Delta t^n}.$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi $\widehat{\beta_1^n}(T) = \hat{\beta}^n\,(T)$ dan $Z_1^n(T) = A^n(T)$ didapat:

$$\hat{\beta}^n\,(T) = \frac{A^n(T)}{n\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{a_1}{\beta}\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{A^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{1}{\beta}a_1\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)}$$

$$= \frac{A^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{1}{\beta}\beta(\sigma^n(t_{k-1}^n)\iota^n(t_{k-1}^n))}$$

$$= \frac{A^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nt]}\sigma^n(t_{k-1}^n)\iota^n(t_{k-1}^n)}$$

Sehingga diperoleh:

$$\hat{\beta}^n\,(T) = \frac{A^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nT]}\sigma^n(t_{k-1}^n)\iota^n(t_{k-1}^n)}.$$

Selanjutnya dengan cara yang sama akan dibuktikan $\hat{\gamma}^n\,(T) = \frac{B^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nT]}\iota^n(t_{k-1}^n)}$.

Untuk $i = 2$ diperoleh:

$$\hat{\beta}_1^n(T) = \frac{Z_2^n(T)}{n\sum_{k=1}^{[nT]} b_2\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)\Delta t^n}.$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi $\widehat{\beta_2^n}(T) = \hat{\gamma}^n\,(T)$ dan $Z_2^n(T) = B^n(T)$ didapat :

$$\hat{\gamma}^n\,(T) = \frac{B^n(T)}{n\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{a_2}{\gamma}\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{A^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{1}{\gamma}a_2\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)}$$

$$= \frac{B^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{1}{\gamma}\gamma\left(\iota^n(t_{k-1}^n)\right)}$$

$$= \frac{B^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nt]}\iota^n(t_{k-1}^n)}.$$

Sehingga diperoleh

$$\hat{\gamma}^n\,(T) = \frac{B^n(T)}{\sum_{k=1}^{[nT]}\iota^n(t_{k-1}^n)}.$$

(b) Akan dibuktikan $\hat{\beta}^n\,(T)$ dan $\widehat{\gamma^n}\,(T)$ adalah estimator martingale yaitu jika memenuhi kondisi (C).

Misalkan β menyatakan rata-rata efektif kontak per satuan waktu antara orang yang terinfeksi dan individu lain dalam populasi. Konstanta ini dikenal sebagai laju kontak, karena $\frac{\beta}{n}$ adalah rata-rata jumlah efektif kontak per satuan waktu per kapita dari yang terinfeksi, dan diasumsikan peluang individu yang rentan menjadi terinfeksi dalam interval waktu $(t_{k-1}^n, t_k^n]$ adalah $\left(\frac{\beta}{n}\right)\iota^n(t_{k=1}^n)$. Di sisi lain, karena jumlah kontak yang memenuhi syarat pada waktu t_{k-1}^n yang dapat menghasilkan infeksi pada waktu t_k^n sama dengan jumlah yang rentan $S^n(t_{k-1}^n)$, diasumsikan bahwa:

1. $\Delta A^n(t_k^n)\,\middle|\,\mathcal{F}_{k-1}^n \sim$ Binomial $\left(S^n(t_{k-1}^n), \left(\frac{\beta}{n}\right)\iota^n(t_{k-1}^n)\right)$
2. $\Delta B^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n \sim$ Binomial $(I^n(t_{k-1}^n), \gamma\Delta t^n)$.

Jadi untuk membuktikan $\widehat{\beta^n}\,(T)$ dan $\widehat{\gamma^n}\,(T)$ adalah estimator martingale yaitu dengan menunjukkan :

$$E(\Delta A^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n) = a_1(\chi^n(t_{k-1}^n)) \text{ dan}$$
$$E(\Delta B^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n) = a_2\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right).$$

Diketahui

$\Delta A^n(t_k^n)\,|\,\mathcal{F}_{k-1}^n \sim$ Binomial $\left(S^n(t_{k-1}^n), \left(\frac{\beta}{n}\right)\iota^n(t_{k-1}^n)\right)$

sehingga

$$E(\Delta A^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n) = S^n(t_{k-1}^n)\left(\frac{\beta}{n}\right)\iota^n(t_{k-1}^n)$$

Akan ditunjukkan

$$a_1\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) = S^n(t_{k-1}^n)\left(\frac{\beta}{n}\right)\iota^n(t_{k-1}^n).$$

Berdasarkan Persamaan (5) diperoleh:

$$a_1\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) = a_1\left(\sigma^n(t_{k-1}^n), \iota^n(t_{k-1}^n), \rho^n(t_{k-1}^n)\right)$$
$$= \beta\sigma^n(t_{k-1}^n)\iota^n(t_{k-1}^n)$$

$$= \beta \frac{S^n(t_{k-1}^n)}{n} \iota^n(t_{k-1}^n)$$

$$= S^n(t_{k-1}^n) \frac{\beta}{n} \iota^n(t_{k-1}^n),$$

Sehingga terbukti

$$a_1\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) = S^n(t_{k-1}^n) \left(\frac{\beta}{n}\right) \iota^n(t_{k-1}^n).$$

Akibatnya diperoleh

$$E(\Delta A^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n) = a_1\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right).$$

Dengan cara yang sama akan ditunjukkan $E(\Delta B^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n) = a_2\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right).$

Diketahui

$\Delta B^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n \sim$Binomial $(I^n(t_{k-1}^n), \gamma \Delta t^n)$

sehingga

$$E(\Delta B^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n) = I^n(t_{k-1}^n)\, \gamma \Delta t^n$$

Selanjutnya ditunjukkan

$$a_2\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) = I^n(t_{k-1}^n)\, \gamma \Delta t^n.$$

Berdasarkan Persamaan (6) diperoleh:

$$a_2\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right)$$

$$= a_2\left(\sigma^n(t_{k-1}^n), \iota^n(t_{k-1}^n), \rho^n(t_{k-1}^n)\right)$$

$$= \gamma \iota^n(t_{k-1}^n)$$

$$= \gamma \frac{I^n(t_{k-1}^n)}{n}$$

$$= I^n(t_{k-1}^n)\, \gamma \frac{1}{n}$$

$$= I^n(t_{k-1}^n)\, \gamma \Delta t^n,$$

sehingga terbukti

$$a_2\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right) = I^n(t_{k-1}^n)\, \gamma \Delta t^n,$$

akibatnya diperoleh

$$E(\Delta B^n(t_k^n)|\mathcal{F}_{k-1}^n) = a_2\left(\chi^n(t_{k-1}^n)\right),$$

karena kondisi (C) dipenuhi sehingga terbukti $\hat{\beta}^n(T)$ dan $\hat{\gamma}^n(T)$ adalah estimator martingale. □

6. Simulasi

6.1 Deskripsi Data

Data yang digunakan adalah data simulasi yang dibangkitkan secara random menggunakan distribusi multinomial dan distribusi binomial dengan menggunakan randomisasi yang ada pada software R 3.3.0.

6.2 Analisis Data

6.2.1 Konsistensi Estimator Martingale

Dari proses simulasi di R, diperoleh output sebagai berikut

n	Betaest	Gammaest
30	1.677019	1.1241218
100	1.732070	0.9442313
300	1.968903	0.9455118
500	1.873400	1.0453893
1000	1.869097	0.9733132
2000	2.104522	0.9947064
3000	1.980845	0.9875174
5000	2.026422	0.9940587
8000	1.959579	1.0134197
10000	2.049538	1.0004193

Gambar 1. Hasil Estimasi Laju Penularan dan Laju Kesembuhan

Dari output di atas, dapat disimpulkan bahwa Hasil estimasi dari parameter laju penularan (β) yaitu $\hat{\beta}$ konsisten berada di sekitar nilai $\beta = 2$ untuk setiap jumlah sampel yang diambil. Hasil estimasi dari parameter laju kesembuhan (γ) yaitu $\hat{\gamma}$ konsisten berada di sekitar nilai $\gamma = 1$ untuk setiap sampel yang diambil.

7. Kesimpulan Dan Saran

Parameter pada model epidemi dapat diestimasi dengan estimator martingale untuk setiap parameter. Pada model epidemi, untuk $T > 0$, barisan estimator martingale $\widehat{\boldsymbol{\beta}^n}(T)$ konsisten ke parameter $\boldsymbol{\beta}$. Pada model epidemi SIR, parameter laju penularan (β) dan laju kesembuhan (γ) dapat diestimasi dengan estimator martingale

8. Ucapan Terima Kasih

Pada artikel ini penulis ucapkan terima kasih kepada :

1. Pengelola Rumah Jurnal UIN Imam Bonjol Padang
2. MAp Journal Program Studi Matematika FST UIN Imam Bonjol Padang
3. Rekan-Rekan Dosen program studi matematika
4. Para penulis MAp Journal Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang

Daftar Pustaka

[1] Aderson, H. dan Britton, T. 2000. *Stochastis Epidemic Models and Their Statistical Analysis*. Uppsala University, Swedia.

[2] Ash, R.N. 1972. *Real Analysis and Probability*, Academic Press inc, London.

[3] Bain, L.J. and Engelhardt, Max. 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Duxbury Press, California.

[4] Casella, G. dan R. L. Berger. 1990. *Statistical Inference*. Ed. Ke-1 Wadsworth & Brooks/Cole, Pasific Grove, California.

[5] Ethier,S.N. dan Kurtz, T.G. 1986. *Markov Processes Characterization and Convergence*. Wiley. United States of America.

[6] Fierro, Raul. 2012. Asymptotic Distribution of Martingale Estimators for a Class of Epidemic Models, *Statistics Methods Application of Springer*, diakses 18 September 2014.

[7] Hogg, R.V. McKean, J.W. dan Craig A.T. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics Sixth Edition*. Pearson Prentice Hall, USA.

[8] Klebaner, F.C. 2005. *Intoduction to Stochastic Calculus with Applications Second Edition*. Imperial College Press, Australia.

[9] Lenglart, E. 1977. *Relation de Domination Entre Deux Processus.* Diakses 8 januari 2005.

[10] Ross, S.M. 2010. *Introduction to Probability Models 10th Edition*. Academic Press Elsevier, USA.

[11] Royden, H.L dan Fitzpatrick, P.M. 2010. *Real Analysis Fourth Edition*.China Machine Press, China.

[12] Subanar. 2013. *Statistika Matematika, Probabilitas, Distribusi, dan Asimtotis dalam Statistika*. Graha Ilmu, Yogyakarta.