UIN IMAM BONJOL PADANG
MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

METODE *THREE-STEP ITERATION* MENGGUNAKAN KONVERGENSI BERORDE ENAM UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

THE THREE-STEP ITERATION METHOD USING CONVERGENCE OF THE SIX ORDER TO SOLVE NONLINEAR EQUATIONS

Herris Elvaningsih[1§]

[1]Program Studi Teknik Informatika, STMIK Dumai, Indonesia [E-mail: herris.elvaningsih@gmail.com]
[§]*Corresponding Author*

Received Oct 29th 2021; Accepted Nov 19th 2021; Published Dec 01st 2021;

Abstrak

Berbagai permasalahan yang terjadi dalam menyelesaikan persamaan nonlinear yang biasanya diselesaikan menggunakan metode iterasi dalam pengaplikasian matematika dalam ruang lingkup pendidikan. Terdapat dua solusi dalam penyelesaian persamaan nonlinear yaitu secara analitik dan numerik. Namun terkadang metode analitik mengalami kesulitan dalam menentukan akar persamaan nonlinear sehingga dibutuhkan solusi dengan menggunakan metode numerik. Salah satunya yaitu modifikasi iterasi pada persamaan nonlinear yang bertujuan untuk mendapatkan orde konvergensi yang lebih tinggi. Penelitian ini menggunakan metode *Three-step Iteration* atau Iterasi Tiga Langkah yang menggabungkan tiga jenis metode diantaranya Metode Newton, Metode VMN, dan Metode *Hasanov*. Hasil dari penelitian ini dengan menggunakan simulasi numerik dari lima persamaan nonlinear yaitu Metode Iterasi Tiga Langkah lebih cepat dalam menemukan akar persamaan nonlinear dengan hasil 4 iterasi pada persamaan 1, 3 iterasi pada persamaan 2, 4 iterasi pada persamaan 3, 2 iterasi pada persamaan 4, dan 4 iterasi pada persamaan 5.

Kata Kunci: Iterasi Tiga Langkah, Metode Newton, Metode VMN, Metode *Hasanov*

Abstract

Various problems that occur in solving nonlinear equations are usually solved using the iteration method in the application of mathematics in the scope of education. There are two solutions in solving nonlinear equations, namely analytically and numerically. However, sometimes analytical methods have difficulty in determining the roots of nonlinear equations so that solutions using numerical methods are needed. One of them is iteration modification on nonlinear equations which aims to get a higher order of convergence. This study uses a three-step iteration method which combines three types of methods including the Newton Method, the VMN Method, and the Hasanov Method. The results of this study using numerical simulations of five nonlinear equations, namely the Three-Step Iteration Method is faster in finding the roots of nonlinear equations with the results of 4 iterations in equation 1, 3 iterations in equation 2, 4 iterations in equation 3, 2 iterations in equation 4, and 4 iterations in equation 5.

Keywords*: Three-Step Iteration, Newton's Method, VMN Method, Hasanov Method*

---

1. Pendahuluan

Ada berbagai macam permasalahan yang terjadi dalam pengaplikasian matematika di ruang lingkup pendidikan yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan nonlinear yang biasanya diselesaikan menggunakan metode iterasi.

Akar persamaan nonlinear

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Dalam [1] dijelaskan bahwa untuk menyelesaikan persamaan nonlinear terdapat dua proses yang dilakukan yaitu dengan analitik dan numerik. Namun metode analitik terkadang mengalami kesulitan dalam menentukan akar persamaan nonlinear [2]. Oleh karena itu dibutuhkan solusi dengan menggunakan metode numerik yang mana solusi ini tergantung pada teknik numerik berdasarkan pada metode iterasi

Dalam [3] banyaknya peneliti yang mengembangkan dan memodifikasi metode iterasi pada persamaan nonlinear ini yang bertujuan untuk mendapatkan orde konvergensi yang lebih tinggi dan metode yang mempunyai jumlah evaluasi fungsi lebih sedikit untuk memperoleh indeks efisiensi yang lebih besar.

Berbagai macam cara dilakukan untuk meningkatkan orde dari konvergensi pada metode iterasi. Salah satu langkahnya yaitu dengan menambah langkah dari metode iterasi. [4]

Penelitian metode iterasi sudah banyak dilakukan oleh peneliti sebelumnya seperti penelitian oleh [3] dimana hasil dari penelitian yang dilakukan dengan melakukan perbandingan pada metode Newton, metode *Abbasbandy*, dan metode Raffiullah-Haleem. Metode iterasi tiga langkah yang dilakukan pada penelitian tersebut diperoleh nilai fungsi iterasi yang lebih kecil dibandingkan tiga metode lainnya.

Penelitian ini membahas tentang proses terbentuknya metode iterasi tiga langkah baru yang memiliki konvergensi orde enam. Dalam penelitian metode iterasi tiga langkah dilakukan penggabungan tiga metode yaitu Metode Newton, Varian Metode Newton (VMN), dan Metode *Hasanov*. Simulasi kekonvergenan berorde enam iterasi tiga langkah, algoritma metode iterasi tiga langkah, dan simulasi numerik dari metode iterasi tiga langkah ini menggunakan Pemrograman Maple 13. Menurut [5] Maple merupakan *software* antarmuka pengguna khusus untuk pembuatan notasi matematika. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari nilai fungsi akar yang lebih kecil dari penelitian-penelitian sebelumnya secara efektif dan efisien dengan memperoleh hasil yang lebih akurat.

2. Landasan Teori

2.1 Metode *Newton Raphson*

Metode *Newton Raphson* merupakan metode penyelesaian persamaan nonlinear yang hanya memerlukan satu nilai *x* awal untuk memulai iterasi agar mendapatkan nilai akar persamaan. Nilai *x* awal ini tidak dibatasi oleh interval tertentu sehingga Metode *Newton Raphson* sering dikategorikan sebagai metode terbuka. [6]

Berikut ini persamaan Metode *Newton Raphson*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,,\ f'(x_n) \neq 0 \tag{2}$$

2.2 Varian Metode Newton (VMN)

Dalam [7] Metode Newton merupakan metode numerik yang paling sering digunakan untuk mencari persamaan nonlinear. Metode ini merupakan metode popular sehingga banyak peneliti yang melakukan modifikasi terhadap metode ini. VMN merupakan metode yang mengaprokmasikan Metode Newton agar mendekati akar persamaan nonlinear.

Berikut ini persamaan Varian Metode Newton (VMN)

$$x^*_{n+1} = x^*_n - \frac{f(x^*_n)}{f'(x^*_n)}\ ,\ f'(x_n) \neq 0 \qquad (3)$$

2.3 Metode *Hasanov*

Metode *hasanov* merupakan aprokmasi metode newton yang menggunakan skema titik iterasi dari metode newton. Berikut ini Metode *Hasanov* : [1]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{6f(x_n)}{f'(x^*_{n+1}) + 4f'(x^{**}_{n+1}) + f'(x_n)} \qquad (4)$$

2.4 *Software* Maple 13

Menurut [8] maple merupakan aplikasi matematika pada komputer yang diproduksi oleh Waterloo Maple Inc. yang banyak digunakan baik dikalangan pelajar, pendidikan matematikawan, statikawan, ilmuan dan insinyur untuk mengerjakan komputasi numerik dan simbolik. *Software* Maple 13 adalah versi dari Maple yang dapat mengembangkan kemampuan matematika khususnya kalkulus dengan nilai komputasi numerik untuk bilangan yang sangat besar.

3. Hasil Dan Pembahasan

3.1 Kerangka Kerja Penelitian

Pada penelitian konvergensi berorde enam ini metode yang digunakan adalah Metode Newton, Varian Metode Newton, dan Metode *Hasanov* yang menggunakan pemrograman Maple 13. Berikut ini bentuk Persamaan Metode Iterasi Tiga Langkah tersebut yaitu :

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\ f'(x_n) \neq 0 \qquad (5)$$

$$y_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(z_n)} \qquad (6)$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{6f(y_n)}{f'(y_n) + 4f'(\frac{z_n + y_n}{2}) + f'(z_n)} \qquad (7)$$

3.2 Kekonvergenan Iterasi Tiga Langkah

Jika dimisalkan $\alpha \in I$ yang merupakan akar sederhana dari fungsi $f: I \in R \rightarrow R$ yang terdiferensialkan pada interval terbuka di I maka x_0 cukup dekat ke α yang memiliki orde konvergensi enam pada persamaan (5), (6), dan (7).

Berikut pembuktian dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $(x_n = \alpha)$,

$$\begin{aligned} f(x_n) = f(\alpha) &+ (x_n - \alpha)f'(\alpha) \\ &+ \frac{(x_n - \alpha)^2}{2!}f''(\alpha) \\ &+ \frac{(x_n - \alpha)^3}{3!}f'''(\alpha) \\ &+ \frac{(x_n - \alpha)^4}{4!}f^{(4)}(\alpha) \\ &+ \frac{(x_n - \alpha)^5}{5!}f^{(5)}(\alpha) \\ &+ \frac{(x_n - \alpha)^6}{6!}f^{(6)}(\alpha) \\ &+ O(e_n^7) \end{aligned} \qquad (8)$$

Karena $f(\alpha) = 0$, dan jika dimisalkan $e_n = x_n - \alpha$ maka persamaan (8) akan menjadi:

$$f(x_n) = e_n f'(\alpha) + \frac{{e_n}^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{{e_n}^3}{3!} f'''(\alpha) + \frac{{e_n}^4}{4!} f^{(4)}(\alpha) + \frac{{e_n}^5}{5!} f^{(5)}(\alpha) + \frac{{e_n}^6}{6!} f^{(6)}(\alpha) + O(e_n^7) \qquad (9)$$

Kemudian bila dinyatakan $c_k = \frac{1}{k}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ untuk k = 2,3,… maka persamaan (9) akan menjadi:

$$f(x_n) = e_n f'(\alpha) + c_2 e_n^2 f'(\alpha) + c_3 e_n^3 f'(\alpha) + c_4 e_n^4 f'(\alpha) + c_5 e_n^5 f'(\alpha) + c_6 e_n^6 f'(\alpha) + O(e_n^7) \qquad (10)$$

Bila disederhanakan persamaan (10) akan menjadi:

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 e_n^6 + O(e_n^7)] \qquad (11)$$

Kemudian dengan cara yang sama maka akan didapat:

$$f'(x_n) = f'(\alpha) + f^{(2)}(\alpha) e_n + \frac{1}{2!} f^{(3)}(\alpha) e_n^2 + \frac{1}{3!} f^{(4)}(\alpha) e_n^3 + \frac{1}{4!} f^{(5)}(\alpha) e_n^4 + \frac{1}{5!} f^{(6)}(\alpha) e_n^5 + O(e_n^2)$$
$$= f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 e_n^5 + O(e_n^6)] \qquad (12)$$

Kemudian persamaan (11) dan (12) disederhanakan dengan dibagi sehingga didapat:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = [e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 e_n^6] x \frac{1}{1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 e_n^5 + 7c_7 e_n^6} \qquad (13)$$

Misalkan:

$$r = (2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_5 e_n^5 + 7c_7 e_n^6 \qquad (14)$$

Maka dengan menggunakan persamaan:

$$\frac{1}{1-r} \approx 1 - r + r^2 - r^3 + r^4 + \cdots \qquad (15)$$

Persamaan (13) dapat disajikan sebagai berikut:

$$\frac{f(x_n)}{f(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2) e_n^3 + (-4c_2^3 + 7c_2 c_3 - 3c_4) e_n^4 + (6c_3^2 - 4c_5 + 8c_2^4 + 10c_2 c_4 - 20c_2^2 c_3) e_n^5 + \left(52c_2^3 c_3 - 5c_6 + 17c_3 c_4 - 28c_2^2 c_4 + 13c_2 c_5 - 33c_2 c_3^2 - 16c_2^5\right) e_n^6 + O(e_n^7) \qquad (16)$$

Selanjutnya dengan mensubtitusi persamaan (16) ke persamaan (5) maka didapatkan:

$$z_n = \alpha + c_2 c_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2) e_n^3 + (4c_2^3 - 7c_2 c_3 + 3c_4) e_n^4 + (-6c_3^2 + 4c_5 - 8c_2^4 - 10c_2 c_4 + 20c_2^2 c_3) e_n^5 + (-52c_2^3 c_3 + 5c_6 - 17c_3 c_4 + 28c_2^2 c_4 - 13c_2 c_5 + 33c_2 c_3^2 + 16c_2^5) e_n^6 + O(e_n^7) \qquad (17)$$

Selanjutnya dengan mensubtitusi persamaan (16) ke persamaan (6) dengan menggunakan ekspansi Taylor dari $f(z_n)$ disekitar $z_n = \alpha$

$$f(z_n) = f'(\alpha)[c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 7c_2c_3 + 5c_2^3)e_n^4 + (-10c_2c_4 - 6c_3^2 - 12c_2^4 + 24c_2^2c_3 + 4c_5)e_n^5 + (5c_6 + 28c_2^5 - 17c_3c_4 - 13c_2c_5 + 34c_2^2c_4 + 37c_2c_3^2 - 73c_2^3c_3)e_n^6 + O(e_n^7) \quad (18)$$

Dengan cara yang sama didapatkan:

$$f'(z_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2^2e_n^2 + (4c_2c_3 - 4c_2^3)e_n^3 + (6c_2c_4 - 11c_3c_2^2 + 8c_2^4)e_n^4 + (28c_3c_2^3 - 20c_4c_2^2 + 8c_2c_5 - 16c_2^5)e_n^5 + (-16c_4c_3c_2 - 68c_3c_2^4 - 26c_2^2c_5 + 10c_2c_6 + 32c_2^6 + 60c_2^3c_4 + 12c_3^3)e_n^6 + O(e_n^7) \quad (19)$$

Dari persamaan diatas diperoleh:

$$y_n = \alpha + (2e_n^2 + 2c_3e_n^3 + (-14c_2^3 - 3c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + (8c_2^4 - 49c_2^2c_3 - 4c_2c_4 - 6c_3^2 - 4c_5)e_n^5 + \left(-12c_2^5 + 29c_2^3c_3 - 72c_2^2c_4 - 41c_2c_3^2 + 5c_2c_5 - 17c_3c_4 + 5c_6\right)e_n^6 + O(e_n^7) \quad (20)$$

Selanjutnya ditentukan ekspansi Taylor untuk $f(y_n)$ disekitar $y_n = \alpha$ sehingga diperoleh:

$$f(y_n) = f(\alpha) + (y_n - \alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^3}{3!}f'''(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^4}{4!}f^{(4)}(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^5}{5!}f^{(5)}(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^6}{6!}f^{(6)}(\alpha) + O(y_n - \alpha)^7 \quad (21)$$

Kemudian selanjutnya subtitusi persamaan (20) ke persamaan (21) dengan mengingat bahwa $f(\alpha) = 0$ yang mana setelah penyederhanaan diperoleh:

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left[c_2e_n^3 + 2c_3e_n^3 + (-13c_2^3 - 3c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + (8c_2^4 - 45c_2^2c_3 - 4c_2c_4 - 6c_3^2 + 4c_5)e_n^5 + \left(-40c_2^5 + 24c_2^3c_3 - 66c_2^2c_4 - 37c_2c_3^2 + 3c_2c_5 - 17c_3c_4 + 5c_6\right)e_n^6 + O(e_n^7)\right] \quad (22)$$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$f'(y_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2^2e_n^2 + 4c_2c_3e_n^2 + (-28c_2^4 - 3c_2^2c_3 + 6c_2c_4)e_n^4 + (16c_2^5 - 98c_2^3c_3 - 8c_2^2c_4 + 8c_2c_5)e_n^5 + (-24c_2^6 - 26c_2^4c_3 - 140c_2^3c_4 - 100c_2^2c_2^3 + 6c_2^2c_5 - 16c_2c_3c_4 + 12c_3^3 + 10c_2c_6)e_n^6 + O(e_n^7)] \quad (23)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (21) dan persamaan (17) dihitung $\frac{z_n+y_n}{2}$ sehingga diperoleh:

$$\left(\frac{z_n+y_n}{2}\right)=\alpha+c_2e_n^2+(-c_2^2+2c_3)e_n^3 +(-5c_2^3-5c_2c_3+3c_4)e_n^4 +\left(-\frac{29c_2^2c_3}{2}-7c_2c_4-6c_3^2 +4c_5\right)e_n^5 +\left(-\frac{23c_2^3c_3}{2}-22c_2^2c_4 -4c_2c_3^2-5c_1c_5-17c_2c_4 +2c_2^5+5c_6\right)e_n^6+O(e_n^7) \quad (24)$$

Setelah didapatkan hasil $\frac{z_n+y_n}{2}$, maka misalkan $\frac{z_n+y_n}{2}=v_n$ ekspansi Taylor untuk $f'(v_n)$ disekitar $v_n=\alpha$ diperoleh:

$$f'(v_n)=f'(\alpha)+(v_n-\alpha)f''(\alpha) +\frac{(v_n-\alpha)^2}{2!}f'''(\alpha) +\frac{(v_n-\alpha)^3}{3!}f^{(4)}(\alpha) +\frac{(v_n-\alpha)^4}{4!}f^{(4)}(\alpha) +\frac{(v_n-\alpha)^5}{5!}f^{(5)}(\alpha) +O(v_n-\alpha)^7 \quad (25)$$

Kemudian subtitusi persamaan (25) ke persamaan (24) setelah penyederhanaan dengan mengingat bahwa $f(\alpha)=0$ sehingga didapat:

$$f'\left(\frac{z_n+y_n}{2}\right)=f'(\alpha)[1+2c_2^2e_n^2 +(-2c_2^3+4c_2c_3)e_n^3 +(-10c_2^4-7c_2^2c_3 +6c_2c_4)e_n^4 +(-35c_2^3c_3-14c_2^2c_4 +8c_2c_5)e_n^5 +(-35c_2^3c_3-14c_2^2c_4 +8c_2c_5)e_n^5 +(4c_2^6-50c_2^4c_3-10c_2^2c_5 -16c_2c_3c_4+12c_3^3 +10c_2c_6)e_n^6+O(e_n^7)] \quad (26)$$

Persamaan (22) dikalikan dengan 6 sehingga didapat:

$$6f(y_n)=f'(\alpha)[6c_2e_n^2+12c_3e_n^3 +(-78c_2^3-18c_2c_3 +18c_4)e_n^5 +(48c_2^4-270c_2^2c_3 -24c_2c_4-36c_3^2 +24c_5)e_n^5 +(-240c_2^5+144c_2^3c_3 -396c_2^2c_4-222c_2c_3^2 +18c_2c_5-102c_3c_4 +30c_6)e_n^6+O(e_n^7)] \quad (27)$$

Persamaan (26) dikalikan dengan 4 sehingga didapat:

$$4f'\left(\frac{z_n+y_n}{2}\right)=f'(\alpha)[4+8c_2^2e_n^2 +(-8c_2^3+16c_2c_3)e_n^3 +(-40c_2^4-28c_2^2c_3 +24c_2c_4)e_n^4 +(-140c_2^3c_3-56c_2^2c_4 +32c_2c_5)e_n^5 +(16c_2^6-200c_2^4c_3 -160c_2^3c_4-200c_2^2c_3^2 -40c_2^2c_5-64c_2c_3c_4 +48c_3^3+40c_2c_6)e_n^6 +O(e_n^7)] \quad (28)$$

Selanjutnya dengan menambahkan persamaan (19) dengan persamaan (28) kemudian dijumlahkan juga dengan persamaan (23) diperoleh:

$$f'(z_n) + 4f'^{\left(\frac{z_n+y_n}{2}\right)} + f'(y_n) = f'(\alpha)[6 + 12c_2e_n^2 + (24c_2c_3 - 12c_n^3)e_n^3 + (36c_2c_4 - 42c_2^2c_3 - 60c_2^4)e_n^4 + (-210c_2^3c_3 - 84c_2^2c_4 + 48c_2c_5)e_n^5 + (24c_2^6 - 294c_2^4c_3 - 240c_2^3c_4 - 300c_2^2c_3^2 - 60c_2^2c_5 - 96c_2c_3c_4 + 72c_3^3 + 60c_2c_6)e_n^6 + O(e_n^7)] \quad (29)$$

Selanjutnya bagi persamaan (27) dengan persamaan (29), setelah penyederhanaan didapat:

$$\frac{6f(y_n)}{f'(z_n) + 4f'^{\left(\frac{z_n+y_n}{2}\right)} + f'(y_n)} = f'(\alpha)[6c_2e_n^2 + 12c_3e_n^3 + (-78c_2^3 - 18c_2c_3 + 18c_4)e_n^4 + (48c_2^4 - 270c_2^2c_3 - 24c_2c_4 - 36c_3^2 + 24c_5)e_n^5 + (-240c_2^5 + 144c_2^3c_3 - 396c_2^2c_4 - 222c_2c_3^2 + 18c_2c_5 - 102c_3c_4 + 30c_6)e_n^6 + O(e_n^7)] \quad (30)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (15) dengan

$$r = c_2c_3e_n^3 + (2c_2^4 - 2c_2^2c_3 + 2c_2c_4)e_n^4 + \left(-8c_2^5 + 11c_2^3c_3 - 4c_2^2c_4 - 3c_2c_3^2 + 3c_2c_5\right)e_n^5 + (20c_2^6 - 45c_2^4c_3 + 16c_2^3c_4 + 20c_2^2c_3^2 - 5c_2^2c_5 - 13c_2c_3c_4 + 3c_3^3 + 4c_2c_6)e_n^6 + O(e_n^7) \quad (31)$$

Persaman (31) dapat dituliskan setelah dilakukan penyederhanaan sebagai berikut:

$$\frac{6f(y_n)}{f'(z_n) + 4f'^{\left(\frac{z_n+y_n}{2}\right)} + f'(y_n)} = c_2e_n^2 + 2c_3e_n^3 + (-13c_2^3 - 3c_2c_3 + 3c_4)e_n^4(8c_2^4 - 46c_2^2c_3 - 4c_2c_4 - 6c_3^2 + 4c_5)e_n^5 + \left(-42c_2^5 + 26c_2^3c_3 - 68c_2^2c_4 - 39c_2c_3^2 + 3c_2c_5 - 17c_3c_4 + 5c_6\right)e_n^6 + O(e_n^7) \quad (32)$$

Kemudian subtitusi persamaan (20) dan persamaan (32) dimana setelah penyederhanaan diperoleh:

$$x_{n+1} = \alpha + c_2^3e_n^4 - 3c_2^2c_3e_n^5 + (30c_2^5 + 3c_2^3c_3 - 4c_2^2c_4 - 2c_2c_3^2)e_n^6 + O(e_n^7),$$

Sehingga

$$e_{n+1} = c_2^3e_n^4 - 3c_2^2c_3e_n^5 + (30c_2^5 + 3c_2^3c_3 - 4c_2^2c_4 - 2c_2c_3^2)e_n^6 + O(e_n^7)$$

Dengan demikian iterasi tiga langkah ini mempunyai kekonvergenan berorde enam.

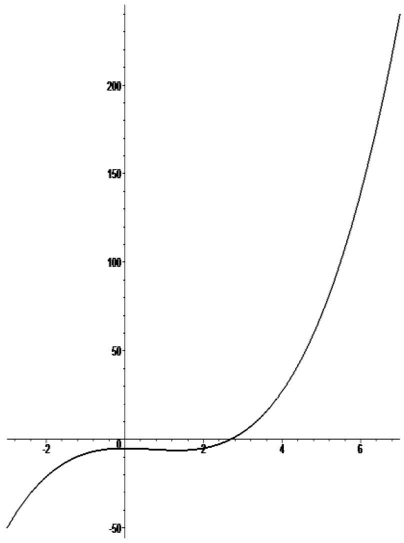
3.3 Simulasi Numerik

Untuk melihat bagaimana perbandingan Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Metode Newton, VMN, dan Hasanov maka dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan program Maple 13. Persamaan nonlinear yang dibandingkan adalah sebagai berikut :

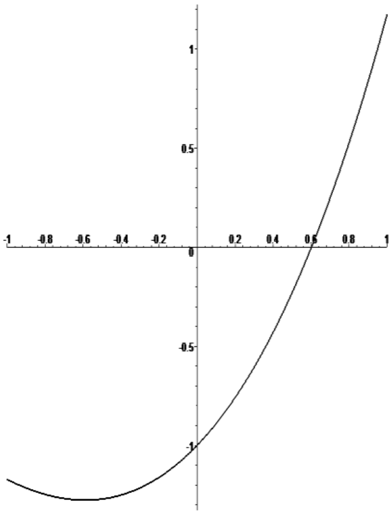
1. Fungsi Polinomial: $f_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5$
2. Fungsi Trigonometri: $f_2(x) = e^x - 1 - \cos(x)$
3. Fungsi Polinomial: $f_3(x) = x^{10} - 1$
4. Fungsi Trigonometri: $f_4(x) = \sin(x)$

5. Fungsi Eksponensial: $f_5(x) = e^x - 3x^2$

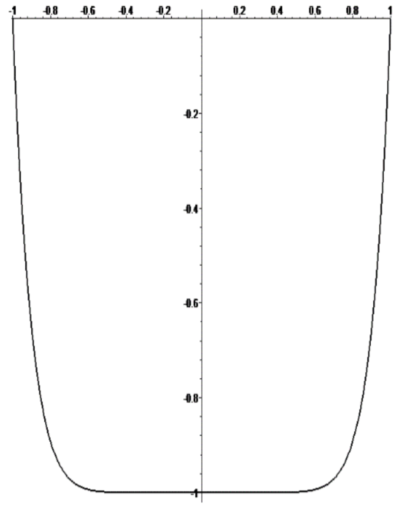
Grafik fungsi pada persamaan diatas dapat dilihat pada hasil gambar 1-5 menggunakan Maple 13 berikut ini yang memperlihatkan perpotongan dengan sumbu x yang menunjukkan akarnya.



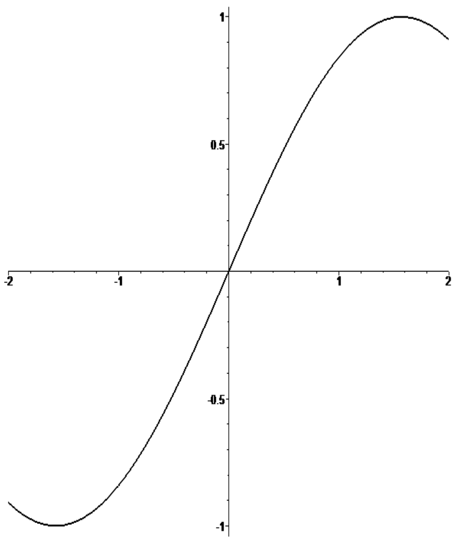
Gambar 1. Grafik fungsi $f_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5$



Gambar 2. Grafik fungsi $f_2(x) = e^x - 1 - \cos(x)$

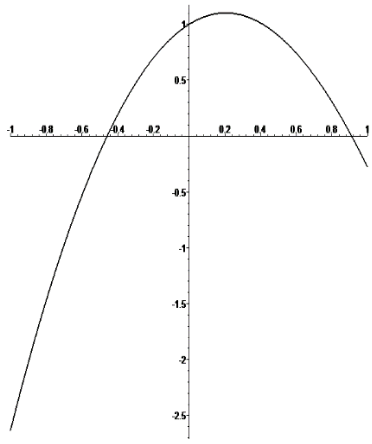


Gambar 3. Grafik fungsi $f_3(x) = x^{10} - 1$



4

Gambar 4. Grafik fungsi $f_4(x) = \sin(x)$



Gambar 5. Gambar grafik $f_5(x) = e^x - 3x^2$

$|x_{n+1} - x_n| < Tol$ atau $|f(x_n)| < eps$ merupakan kriteria untuk pemberhentian komputasi dengan jumlah iterasi maksimum adalah 100 kali dengan batas *error* yang diberikan yaitu $1.0x10^{-18}$.

Tabel 1. Tabel Hasil Komputasi Newton

Contoh	x_0	Metode Newton (N)		
		Akar	***n***	**Error**
1	2	2.69064744	8	9.7333e-39
2	0.3	0.601346767	7	1.1235e-46
3	1.2	1.000000000	9	7.2460e-57
4	0.5	0.000000000	5	5.9169e-43
5	0.1	-0.458962267	9	1.7101e-32

Tabel 2. Tabel Hasil Komputasi VMN

Contoh	x_0	Metode VMN		
		Akar	***n***	**Error**
1	2	2.690647448	5	1.21321e-21
2	0.3	0.6013467677	5	1.40248e-56
3	1.2	1.0000000000	6	7.00846e-47
4	0.5	0.000000000	3	1.09177e-15
5	0.1	-0.4589622675	6	3.15729e-29

Tabel 3. Tabel Hasil Komputasi *Hasanov*

Contoh	x_0	Metode *Hasanov* (HN)		
		Akar	***n***	**Error**
1	2	2.690647448	5	2.80827009e-24
2	0.3	0.601346767	5	5.97847907e-59
3	1.2	1.000000000	6	5.94087329e-54
4	0.5	0.000000000	3	1.09177861e-15
5	0.1	-0.458962267	6	3.20731315e-30

Tabel 4. Tabel Hasil Kompuasi ITL

Contoh	x_0	Metode Iterasi Tiga Langkah (ITL)		
		Akar	***n***	**Error**
1	2	2.690647448	4	2.44983944e-48
2	0.3	0.601346767	3	1.37574731e-25
3	1.2	1.00000000	4	7.26670920e-45
4	0.5	0.00000000	2	1.52829709e-08
5	0.1	-0.45896226	4	1.51510110e-18

Tabel 5. Tabel Hasil Komputasi Perbandingan

Contoh	x_0	N	VMN	HN	ITL
1	2	8	5	5	4
2	0.3	7	5	5	3
3	1.2	9	6	6	4
4	0.5	5	3	3	2
5	0.1	9	6	6	4

Berdasarkan tabel 1-5 dapat dilihat bahwa konvergensi dari Iterasi Tiga Langkah dengan konvergensi berorde enam lebih cepat dalam menemukan akar persamaan nonlinear dibandingan dengan Metode Newton, VMN, dan *Hasanov*.

4. Kesimpulan Dan Saran

Dari pembahasan yang telah diuraikan dapat disimpulkan bahwa Konvergensi berorde enam dengan menggunakan metode Iterasi Tiga Langkah dapat diperoleh apabila menggunakan Metode Newton sebagai langkah awal, Metode VMN sebagai langkah kedua, dan Metode Hasanov sebagai langkah ketiga.

Dari hasil simulasi numerik secara komputasi dapat disimpulkan juga bahwa metode Iterasi Tiga Langkah ini lebih efisien dalam perhitungan fungsi enam yang mana menggunakan pemrograman Maple 13 untuk perhitungannya.

Diharapkan untuk penelitian selanjutnya peneliti dapat mengkaji lebih banyak lagi sumber dan referensi yang terkait dengan metode iterasi tiga langkah dengan menggunakan kombinasi metode yang lain agar hasil penelitiannya dapat lebih baik dan lebih lengkap lagi untuk penelitian kedepannya.

5. Ucapan Terima Kasih

Terimakasih penulis kepada Ibu Deasy Wahyuni, M.Si sebagai dosen yang telah membimbing saya dalam memberikan masukan dan saran sehingga penelitian ini dapat terselesaikan.

Daftar Pustaka

[1] D. Wahyuni and E. Elisawati. 2019. Metode Iterasi Tiga Langkah untuk Menyelesaikan Persamaan NonLinear dengan Menggunakan Matlab. *JISKA (Jurnal Inform. Sunan Kalijaga)*, doi: 10.14421/jiska.2019.42-05.

[2] M. . N. M.Arif. 2016. Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Orde Konvergensi Enam untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear. Jurnal Sains Matematika dan Statistika, 2(2) , pp.74-80

[3] M. N. Muhaijir and A. Aljarizi. 2018. Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Konvergensi Orde Enam untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear. Jurnal Sains Matematika dan Statistika 4, no. 1 (2018): 1-9.

[4] M. I. Wartono. 2016. Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Orde Konvergensi Tujuh. In Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri.

[5] D. R. Sisilia Sylviani, Fahmi Candra Permana. 2019. Penggunaan Maple dalam Upaya Peningkatan Minat Siswa SMA dalam Pembelajaran Materi Integral," *Pendidik. Multimed.*,

[6] B. Yulistiyanto. 2019. *Metode Numerik Aplikasi Untuk Teknik Sipil*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

[7] Pratamasyari, D.A., Silalahi, B.P. and Guritman, S., 2017. Kombinasi varian metode Newton dan metode Halley untuk menyelesaikan persamaan tak linier. Journal of Mathematics and Its Applications, 16(2), pp.1-12.

[8] Widiastuti, T.T. and Hidayanto, M.N., 2018. Pembelajaran Kalkulus Sma Dengan Menggunakan Software Maple 13. Al-Khidmat, 1(2), pp.89-96.