UIN IMAM BONJOL PADANG
MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

APLIKASI TEOREMA HUKUM LEMAH BILANGAN BESAR PADA PEMBUKTIAN TEOREMA APROKSIMASI WEIERSTRASS

APPLICATION OF THE WEAK LAW OF LARGE NUMBERS TO PROOF THE WEIRSTRASS APPROXIMATION THEOREM

Fitri Rahmah Ul Hasanah[1§], Darvi Mailisa Putri[2]

[1]Universitas Andalas, Padang [Email: fitrirahmah26@yahoo.com]
[2]UIN Imam Bonjol Padang [Email: darvimailisa@uinib.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

Received Oct 31st 2021; Accepted Nov 20th 2021; Published Dec 01st 2021;

Abstrak

Teorema aproksimasi weierstrass dinyatakan sebagai fungsi kontinu pada selang tertutup dan terbatas yang daoat didekati dengan barisan suku banyak. Salah satu pembuktian teorema ini dengan menggunakan polinomial Bernstein $B_n(x)$. Oleh karena, $0 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1$, dimana $X_n \in [0,1]$ untuk ukuran n cukup besar maka $B_n(x)$ dirumuskan menjadi $B_n(x) = \mathrm{E}\left[\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{S_n}}{\mathrm{n}}\right)\right]$, dimana berlaku hukum lemah bilangan besar dengan $\frac{S_n}{n} \to x\ in\, probability$. Oleh karena itu, dalam tulisan ini dibahas pembuktian teorema aproksimasi weierstrass dengan hukum lemah bilangan besar.

Kata Kunci: bilangan besar, Weierstrass, polinomial Bernstein.

Abstract

Weierstrass approximation theorem is expressed as a continuous function on a closed and finite interval that can be approximated by a polynomial sequence. One of the proofs of this theorem is by using the Bernstein polynomial $B_n(x)$. *Therefore,* $0 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1$, *where* $X_n \in [0,1]$ *for the size* n *is large enough then* $B_n(x)$ *is formulated as* $B_n(x) = E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$, *where the weak law of large numbers applies with* $\frac{S_n}{n} \to x\ inprobability$. *Therefore, in this paper, we discuss the proof of the Weierstrass approximation theorem with the weak law of large numbers.*

Keyword: *large numbers, Weierstrass, Bernstein polynomials.*

1. Pendahuluan

Seorang ahli matematika bernama Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1885) menyatakan bahwa suatu fungsi kontinu pada interval tertutup dan terbatas yang dapat didekati oleh barisan suku banyak. Pernyataan tersebut dikenal dengan teorema weierstrass. Teorema weierstrass memiliki dua metode pembuktian, yaitu dengan barisan Bernstein dan barisan fungsi konvolusi. Dalam tulisan ini, teorema weierstrass difokuskan pada pembuktian dengan barisan Bernstein. Barisan Bernstein atau polinomial bernstein merupakan barisan suku banyak yang sering digunakan dalam kajian diskrit yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Misalkan tedapat barisan $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ dimana S_n menyebar secara *Binomial (n,x)* dan peubah acak Y_i ~ *Bernoulli* (x) yang identik dan saling bebas. Oleh karena, ukuran n dalam jumlah yang cukup besar, maka B_n dapat dituliskan dalam bentuk

$$B_n(x) = E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$

dimana $\frac{S_n}{n} \to x \ in\ probability$ [4]. Hal ini berkaitan dengan hukum lemah bilangan besar dapat dinyatakan sebagai

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_{n-E(S_n)}}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$$

konvergen *in probability* [3]. Selain itu,
hukum lemah bilangan besar dapat dinyatakan juga sebagai

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \ in\ probability.[3]$$

Pembahasan mengenai teorema Weiertrass masih menjadi kajian yang menarik di bahas. Beberapa pembahasan mengenai teorema Weierstrass dapat dilihat pada penelitian di tahun 2015, Naimah Haris membahas tentang penerapan aproksimasi fejer dalam membuktikan teorema Weiertrass [8]. Selanjutnya, di tahun 2018, Arta Ekayanti mengkaji generalisasi teorema aproksimasi Weierstrass [1]. Berdasarkan penelitian sebelumnya dan keterkaitan antara teorema Weierstrass dan hukum lemah bilangan besar maka tulisan ini akan membahas tentang pembuktian teorema aproksimasi Weierstrass dengan hukum lemah bilangan besar.

2. Pembuktian Teorema Aproksimasi Weierstrass dengan Barisan Bernstein

Pada pembahasan ini, akan dibahas teorema aproksimasi weierstrass dan pembuktiannya dengan barisan Bernstein.

Teorema 2.1.[2] Misalkan $f:[0,1]\to\Re$ fungsi kontinu dan $\varepsilon > 0$. Terdapat $n_\varepsilon \in N$ sedemikian sehingga jika $n \geq n_\varepsilon$ maka

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$$

berlaku untuk setiap $x \in [0,1]$.

Bukti.

Untuk membuktikan teorema weirstarss ini kita menggunakan polinomial Bernstein yang dilambangkan $B_n(x)$ dengan

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Sebelum membuktikan teorema ini, akan diberikan beberapa persamaan barisan yang akan diperlukan dalam pembuktian ini. Teorema binomial mengatakan bahwa untuk $n \geq 0, n \in N$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad (1.1)$$

dan untuk $n \geq 1, n \in N$,

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} x^k y^{n-k-1} \quad (1.2)$$

Kalikan Persamaan (1.2) dengan nx sehingga

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} nx\binom{n-1}{k} x^k y^{n-k-1}$$

$$nx\left(x+y\right)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-k-1}\quad(1.3)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}n\binom{n-1}{k}&=n\cdot\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\\&=n\cdot\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\cdot\frac{(k+1)}{(k+1)}\\&=(k+1)\cdot\frac{n(n-1)!}{(k+1)k!(n-1-k)!}\\&=(k+1)\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-1-k)!}\\&=(k+1)\binom{n}{k+1}\end{aligned}$$

sehingga Persamaan (1.3) menjadi

$$\begin{aligned}nx\left(x+y\right)^{n-1}&=\sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n}{k+1}x^{k+1}y^{n-k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n}{k+1}x^{k+1}y^{n-k-1}\end{aligned}$$

Misalkan : $m=k+1$,dimana untuk

$k=0\rightarrow m=0+1=m$

$k=n-1\rightarrow m=n-1+1=n$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}nx(x+y)^{n-1}&=\sum_{m=1}^{n}m\binom{n}{m}x^{m}y^{n-m}\\&=0+\sum_{m=1}^{n}m\binom{n}{m}x^{m}y^{n-m}\\&=\sum_{m=0}^{n}m\binom{n}{m}x^{m}y^{n-m}\end{aligned}$$

dan berlaku untuk $n=0$ sehingga untuk setiap $n\geq 0$ berlaku

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}$$

(1.4)

Untuk $n\geq 2, n\in N$

$$(x+y)^{(x+y)^{n-2}}=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^{k}y^{n-k-2}$$

diperoleh

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{p=2}^{n}(p-1)p\binom{n}{p}x^py^{n-p}$$

$$=\sum_{p=0}^{n}(p-1)p\binom{n}{p}x^py^{n-p}\quad(1.5)$$

Persamaan di atas berlaku untuk $n\geq 0$.

Perhatikan bahwa Persamaan (1.1), (1.4), dan (1.5) mempunyai faktor yang sama yaitu $\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$. Anggap $r_k(x)=\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$.

Misalkan $y=1-x$ sehingga $x+y=1$, maka $r_k(x)=\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Berdasarkan Persamaan (1.1), maka untuk $n\geq 0$,

$$1=\sum_{k=0}^{n}r_k(x)$$

Serupa dengan Persamaan (1.4), untuk $n\geq 0$,

$$nx=\sum_{k=0}^{n}k\ r_k(x)$$

dan juga Persamaan (1.6), untuk $n\geq 0$,

$$n(n-1)x^2=\sum_{k=0}^{n}(k-1)k\ r_k(x)$$

Perhatikan bahwa:

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x)=\sum_{k=0}^{n}(nx)^2 r_k(x)-\sum_{k=0}^{n}2knx\, r_k(x)+\sum_{k=0}^{n}(k)^2\, r_k(x)$$
$$=n^2x^2\sum_{k=0}^{n}r_k(x)-2nx\sum_{k=0}^{n}kr_k(x)+\sum_{k=0}^{n}(k)^2 r_k(x)$$
$$=n^2x^2-2nx(nx)+n(n-1)x^2+nx$$
$$=n^2x^2-2n^2x^2+n^2x^2-nx^2+nx$$
$$=-nx^2+nx$$
$$=nx(1-x)$$

Jadi untuk n $\geq$ 0 berlaku :

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x)=nx(1-x)$$

Karena f kontinu dan [0,1] merupakan selang tertutup dan terbatas berarti terdapat suatu bilangan riil $M>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x\in[0,1]$,maka $|f(x)|\leq M$.

Karena f kontinu pada [0,1] berarti untuk sebarang $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x,y\in[0,1]$ yang memenuhi $|x-y|<\delta$, maka berlaku $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Perhatikan bahwa

$$|f(x)-B_n(x)|=\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right|$$
$$=\left|f(x)\sum_{k=0}^{n}r_k(x)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)r_k(x)\right|$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)r_k(x)\right| \quad (1.11)$$

Selanjutnya perhatikan bahwa persamaan (1.11) bergantung pada keadaan $\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta$ atau $\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\delta$ untuk semua $\delta>0$. Berdasarkan definisi kontinu, maka untuk $\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta$ berlaku

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (1.12)$$

Kemudian untuk $\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\delta$, perhatikan bahwa :

(1.10)
$$|nx-k|\geq n\delta\rightarrow\frac{|nx-k|}{n\delta}\geq 1$$

Akibatnya,

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq|f(x)|+\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$
$$\leq M+M$$
$$\leq 2M$$
$$\leq 2M\frac{(nx-k)^2}{n^2\delta^2}$$

Dengan demikian diperoleh

$$|f(x)-B_n(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)r_k(x)\right|$$
$$\leq\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|r_k(x)$$
$$\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\right)r_k(x)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}(xn-k)^2\right)r_k(x)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}r_k(x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{2M}{\delta^2}(xn-k)^2 r_k(x)$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}r_k(x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{2M}{\delta^2}(xn-k)^2 r_k(x)$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n^2x^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 r_k(x)$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n^2x^2}nx(1-x)$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n^2x^2}$$

Selanjutnya, pilih $n_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{4}$sedemikian sehingga

$$n \geq n_\varepsilon \to \frac{2M}{\delta^2 n} < \frac{\varepsilon}{4}$$

Berdasarkan persamaan (1.14) $\forall n \geq n_\varepsilon$,

$$|f(x) - B_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

Untuk setiap $x \in [0,1]$. (terbukti)

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, akan diberikan aplikasi Hukum Lemah Bilangan Besar pada pembuktian Teorema Aproksimasi *Weiertrass* oleh Serge Bernstein.

Teorema 3.1 [2] Misalkan $f : [0,1] \to \Re$ fungsi kontinu dan $\varepsilon > 0$. Terdapat $n_\varepsilon \in N$ sedemikian sehingga jika $n \geq n_\varepsilon$ maka

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$$

berlaku untuk setiap $x \in [0,1]$ dan $B_n x$ merupakan polinomial Bernstein

Bukti. Misalkan f suatu fungsi kontinu pada $[0,1]$. Untuk setiap $n \geq 1$, didefinisikan Polinomial Bernstein

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b(n,k,x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k \; y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k \; (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

dimana $b(n,k,x) = \binom{n}{k} x^k \; (1-x)^{n-k}$ merupakan sebaran binomial dimana n merupakan jumlah banyaknya percobaan, x merupakan peluang sukses untuk setiap percobaan dan k menunjukkan jumlah banyaknya peluang sukses.

Untuk membuktikan teorema ini, pertama-tama misalkan peubah-peubah acak Y_i ~ *Bernoulli* (x) yang identik dan saling bebas. Jika $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, maka S_n menyebar secara *Binomial (n,x)*. Karena $0 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1$ untuk n yang cukup besar, maka dapat dituliskan $B_n(x) = E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$, dimana berlaku Hukum Lemah Bilangan Besar, yaitu $\frac{S_n}{n} \to x \; in \; probability$ [3].

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena f kontinu dan terbatas pada selang [0,1], maka terdapat M sedemikian sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [0,1]$, sehingga :

$$|f(x)| + \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq M + M$$

$$|f(x)| + \left| -\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \leq 2M$$

$$\left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq 2M$$

Berlaku untuk setiap $x, \frac{S_n}{n} \in [0,1]$. Karena f kontinu pada [0,1] dan [0,1] selang tertutup dan terbatas, maka f kontinu seragam pada [0,1], sehingga terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\left| x - \frac{S_n}{n}\right| < \delta \text{ berlaku } \left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.1)$$

Perhatikan bahwa,

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|f(x) - E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right|$$

$$= \left|f(x)\sum_0^\infty b(n,x) - \sum_0^\infty f\left(\frac{S_n}{n}\right) b(n,x)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{n=0}^\infty \left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| b(n,x)$$

Perhatikan,

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|\sum_{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|<\delta}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| b(n,x) + (2M)P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) b(n,x)$$

(3.2)

Perhatikan bahwa karena (3.1) maka

$$\left|\sum_{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|<\delta}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| b(n,x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.3)$$

Karena S_n Peubah acak dari sebaran *Binomial* maka $Var(S_n) = nx(1-x)$ dan $E(S_n) = nx$.

Perhatikan bahwa berdasarkan teorema

$$2M\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) = 2M\ P(|S_n - nx| > n\delta)$$

$$\leq 2M\ \frac{Var(S_n)}{(n\delta)^2}$$

$$\leq 2M\ \frac{nx(1-x)}{n^2\ \delta^2}$$

$$\leq 2M\ \frac{x(1-x)}{n\,\delta^2}$$

$$\leq \frac{M}{n\,\delta^2}$$

Pilih $n \geq n_\varepsilon$ sedemikian sehingga $\frac{M}{n_\varepsilon \delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$,

sehingga

$$2M\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) \leq \frac{M}{n\delta^2} \leq \frac{M}{n_\varepsilon \delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena persamaan (3.3) dan (3.4) maka berlaku

$$|f(x) - B_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi, diperoleh

$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$ (terbukti).

Untuk setiap $x \in [0,1]$ dan $n \geq n_\varepsilon$.

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat diketahui bahwa teorema weierstrass $|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$ dengan $B_n(x)$ didefenisikan sebagai polinomial Bernstein dapat diubah dalam bentuk :

$$B_n(x) = E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$

dimana S_n menyebar secara *Binomial (n,x)* dan $0 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1$ dengan ukuran n yang cukup besar yang mengakibatkan $\frac{S_n}{n} \to x\ in\ probability$ [3]. Hal ini sejalan dengan hukum lemah bilangan besar, dengan menggunakan definisi dan teorema hukum tersebut, teorema weierstrass dapat dibuktikan.

4. Kesimpulan Dan Saran

Teorema aproksimasi Weierstrass menggambarkan suatu fungsi kontinu pada interval tertutup dan terbatas dapat didekati oleh barisan suku banyak. Pembuktian teorema weierstrass melalui polinomial Bernstein telah dibuktikan dalam beberapa referensi dengan menggunakan peubah acak $Y_i \sim$ *Bernoulli* (x) yang identik dan saling bebas dan S_n menyebar secara *Binomial (n,x)*. Selain dengan menggunakan metode tersebut, teorema aproksimasi Weierstrass dapat dilakukan dengan hukum lemah bilangan besar, dimana peubah acak berdistribusi bebas dan identik serta konvergen *in probability*.

5. UcapanTerimaKasih

Penulis mengucapkan terima kasih atas kerja sama, dukungan dan dorongan yang telah diberikan dari berbagai pihak yang sudahterlibat dan berkontribusi sehingga penyusunan artikel ini dapat diselesaikan.

Daftar Pustaka

[1] Arta Ekayanti. 2018. Generalisasi Teorema Aproksimasi Weierstrass Bulan Desember 2018. *Jurnal Pendidikan matematika dan matematika* 4(2). p.1-8.

[2] Bartle, G. R & Sherbert, R. D. 2000. Introduction to Real Analysis. Ed ke-3 New York: John Wiley & Sons, Inc.

[3] Casella, G dan R.L. Berger. 1990. *Statistical Inference.* Ed ke-1 Wadsworth &Brooks/Cole, Pasific Grove, California.

[4] Chung, K.L. 2001. *A Course In Probability Theory*. Third Edition. Academy Press, San Diego.

[5] Heping, W. 2005. The Rate of Convergence of q- Bernstein Polynomials for 0<q<1, Journal of Approximation Theory, Vol. 136, Issue 2, pp: 151-158.

[6] Kreyszig, E. 1978. *Introduction to Functional Analysis with Application*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[7] Kenneth I. Joy. 1996. *Bernstein Polynomials*. Visualization and Grapichs Research Group Department of Computer Science University of California.

[8] Naimah Aris., Jusmawati. 2015.Penerapan Aproksimasi Fejer dalam Membuktikan Teorema Weierstrass Bulan Januari 2015. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi* 11(2).p.139-148.

[9] Stone, M. H. 1948. *The Generelized Weierstrass Approximation Theorem*. Mathematics Magazine. Vol 21(4), pp:167-184.

[10] Suci Sari Wahyuni., Dodi Devianto. Pembuktian Teorema Hukum lemah Bilangan Besar dengan Fungsi Karakteristik. Vol 2(2).p.71-75.