MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id
UIN IMAM BONJOL PADANG

MENENTUKAN KONTROL YANG OPTIMAL DARI SISTEM LINEAR TIME INVARIANT (LTI) BERKENDALA

DETERMINE THE OPTIMAL CONTROL OF CONSTRAINED LINEAR TIME INVARIANT (LTI) SYSTEM

Nurweni Putri[1§], Iswan Rina[2]

[1]Universitas Dharma Andalas [Email: nurweniputri@gmail.com]
[2]Universitas Dharma Andalas [Email: iswanrina0@gmail.com]

Received Apr 25th 2022; Accepted Jun 30th 2022; Published Jun 30th 2022;

Abstrak

Sistem kontrol optimal dikatakan berkendala jika kontrol $\mathbf{u}(t)$ dari sistem tersebut terbatas. Sistem berkendala ini dapat diubah menjadi sistem kontrol optimal tak berkendala dengan cara mengkontruksi sistem sedemikian sehingga kontrol yang optimal $\mathbf{u}^*(t)$ menjadi tidak terbatas. Pada artikel ini akan dibahas mengenai bagaimana menetukan kontrol yang optimal dari sistem Linear Time Invariant (LTI) berkendala dimana $\mathbf{u}^*(t)$ harus memenuhi sistem dan meminimukan fungsi tujuan yang diberikan dengan hasil bentuk kontrol dalam keadaan yang optimal $\mathbf{u}*(t) = -SGN\{\mathbf{q}*(t)\}$ dimana $\mathbf{q}^*(t) = B^T \boldsymbol{\lambda}^*(t)$.

Kata Kunci: Sistem Kontrol Optimal Berkendala, Sistem LTI, Kontrol Optimal Berbatas.

Abstract

The optimal control system is said to be constrained if the control of the system is limited. This constrained system can be converted into an optimal control system without constraints by constructing the system so that the optimal control becomes unlimited. In this article, we will discuss how to determine the optimal control of a constrained Linear Time Invariant (LTI) system which must satisfy the system and minimize the objective function with the results of the control form in optimal control $\mathbf{u}*(t) = -SGN\{\mathbf{q}*(t)\}$ with $\mathbf{q}^*(t) = B^T \boldsymbol{\lambda}^*(t)$.

***Keywords**: Constrained Optimal Control System, LTI System, Boundary Optimal Control*

1. Pendahuluan

Masalah kontrol optimal didefinisikan sebagai suatu masalah memilih suatu pengontrol $\mathbf{u}(t)$ yang bergantung terhadap waktu t, sedemikian sehingga memberikan nilai optimum bagi fungsi objektif [1], [2]. Didefinisikan sistem ruang keadaan linear bergantung waktu sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x}(t) + B\,\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

dan meminimumkan fungsi objektif

$$\mathrm{J} = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathrm{t}), \mathbf{u}(\mathrm{t}), \mathrm{t}) \tag{2}$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan keadaan, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ menyatakan kontrol, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}, D \in \mathbb{R}^{r\times m}$, dan $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah matriks simetris [3]. Sistem (1) merupakan sistem kontrol optimal yang tidak bergantung kepada waktu atau *Linear Time Invariant (LTI)* [4].

Berdasarkan [5], sistem (1) dikatakan berkendala jika kontrol **u(t)** yang memenuhi sistem tersebut dan meminimumkan fungsi tujuan (2) terbatas, atau ditulis

$$U^- \leq \mathbf{u}(\mathrm{t}) \leq U^+ \quad \text{atau} \quad |\mathbf{u}(\mathrm{t})| \leq \mathbf{U} \qquad (3)$$

dimana U^+ dan U^- adalah batas atas dan batas bawah dari **U**. Dengan menyerap besaran dari **U** menjadi matriks *B,* bentuk batasan pada persamaan (3) dapat ditulis menjadi sebagai berikut:

$$-1 \leq \mathbf{u}(\mathrm{t}) \leq +1 \quad \text{atau} \quad |\mathbf{u}(\mathrm{t})| \leq 1 \qquad (4)$$

dengan masing-masing komponen

$$|u_j(\mathrm{t})| \leq 1$$

Sistem kontrol optimal berkendala dapat diubah menjadi sistem tanpa kendala dengan cara mengkonstruksi sistem (1) sedemikian sehingga diperoleh kontrol dalam keadaan optimal $\mathbf{u}^*\mathbf{(t)}$ yang memenuhi batasan (3) dan sistem (1) serta meminimumkan fungsi tujuan (2), dengan keadaan awal $\mathbf{x}(t_0)$ dan keadaan asal yaitu 0 (sistem dalam keadaaan terkontrol).

Pada [6] telah dikaji tentang masalah kontrol optimal dengan fungsi kendala murni dan campuran. Pada [7] juga sudah dikaji mengenai masalah kontrol optimal dengan keadaan berkendala pada sistem Aerospace. Pada penelitian ini akan dikaji tentang masalah kontrol optimal berkendala pada sistem LTI dengan cara mengontruksi *kontrol yang optimal* $\mathbf{u}^*(t)$ menjadi tidak terbatas. Adapun algoritma dalam mengontruksi sistem berkendala ini akan diberikan kemudian.

2. Keterkontrolan Sistem LTI

Perhatikan sistem linear tidak bergantung waktu

$$\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x}(t) + B\,\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ t \geq t_0 \qquad (5)$$

memiliki solusi persamaan keadaan sebagai berikut

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t,t_0)\ \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi(t,\tau) B(\tau)\ \mathbf{u}(\tau)\, d\tau, \qquad (6)$$

dengan $\varphi(t,t_0)$ adalah matriks transisi keadaan dari sistem (4). Jika sistem adalah linier dan invarian waktu, maka t_0 dapat dibuat menjadi nol, yakni, $t_0 = 0$. Sehingga, solusi pesamaan keadan dapat ditulis menjadi berikut :

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\ \mathbf{x}(0) + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-At}\ B\,\mathbf{u}(\tau)\, d\tau, \qquad (7)$$

dimana e^{At} adalah matrik *n x n*.

Definisi 2.1. [1] Suatu keadaan $\mathbf{x}_0$ dikatakan terkontrol pada waktu t_0 jika ada suatu waktu hingga $t_1 \geq t_0$ dan suatu kontrol $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ yang dapat mentransfer keadaan $\mathbf{x}_0$ ke keadaan 0.

Definisi 2.2. [8] Sistem (5) dikatakan terkontrol lengkap jika semua $\mathbf{x}_0$ terkontrol untuk semua t_0.

Teorema 2.3. [3] Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dengan $m \geq n$, sistem (5) dikatakan terkontrol jika matriks *n x nm* berikut

$$M_C = \left[\, B \;\middle|\; AB \;\middle|\; A^2B \;\middle|\; .... \;\middle|\; A^{n-1}B \,\right]$$

mempunyai rank *n*.

Bukti:

Andaikan rank $(M_C) \neq n$.

Perhatikan kembali solusi dari sistem (5) yaitu pada persamaan (7). Misalkan **x**(0) adalah keadaan awal sebarang. Berdasarkan definisi keterkontrolan, maka kontrol **u**(t) harus ada untuk suatu waktu t_1 sedemikian sehingga

$$\mathbf{0} = e^{At}\ \mathbf{x}(t_0) + e^{At_1}\int_0^{t_1} e^{At}\ B\ \mathbf{u}(\tau)\,d\tau. \quad (8)$$

Persamaan (8) dapat ditulis sebagai

$$-\mathbf{x}(t_0) = \int_0^{t_1} e^{At}\ B\ \mathbf{u}(\tau)\,d\tau \quad (9)$$

Pada [9] telah dijelaskan bahwa, berdasarkan Teorema Cayley Hamilton menyatakan bahwa matriks A memenuhi persamaan karakteristiknya, sedemikian sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} e^{-At} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^j}{j!} A^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^j}{j!} \left[\sum_{i=0}^{n-1} b_{ji} A^i\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} K_i(t) A^i \end{aligned} \quad (10)$$

dengan $K_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ji}\ \frac{(-1)^j t^j}{j!}$.

Subtitusikan (10) ke (9) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -\mathbf{x}(t_0) &= \int_0^{t_1} e^{-At}\ B\ \mathbf{u}(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^{t_1} \sum_{i=0}^{n-1} K_i(\tau) A^i\ \ B\ \mathbf{u}(\tau)\,d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i\ B \int_0^{t_1} K_i(\tau)\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

Ruas kanan dari persamaan (11) adalah vektor sebarang yang membentuk kombinasi linier dari kolom-kolom *B, AB,* A^2B, ..., $A^{n-1}B$, dengan pengalinya $\int_0^{t_1} K_i(\tau)\ \mathbf{u}(\tau)\,d\tau$.

Karena rank $(M_C) \neq n$, maka kolom-kolom dari *B, AB,* A^2B, ..., $A^{n-1}B$ tidak dapat membentuk suatu basis dari $\mathbb{R}^n$, akibatnya keadaan **x**(0) tidak dapat dibawa kepada keadaan pada saat waktu t_1, $\mathbf{x}(t_1) = 0$. Oleh karena itu, berdasarkan definisi sistem (5) menjadi tidak terkontrol. Hal ini kotradiksi dengan asumsi, sehingga haruslah rank $(M_C) = n$.

Definisi 1.3. [3] Diberikan masalah optimisasi sebagai berikut :

$$\min \mathrm{L}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \quad (12)$$

dengan keadaan stabil

$$\mathrm{f_i}(\mathbf{x.u}) = 0,\ \mathrm{i} = 1,2,...\mathrm{n} \quad (13)$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, untuk meminimumkan $\mathrm{L}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ dan memenuhi $\mathrm{f_i}(\mathbf{x.u}) = 0$, maka Fungsi Hamiltonian didefinisikan sebagai beikut :

$$\mathrm{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}(\mathrm{t})) = \mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}), \quad (14)$$

Akibatnya fungsi Hamiltonian (14) memiliki syarat cukup untuk meminimumkan (12) yang memenuhi kendala (13), syarat cukup diberikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
H_x &= L_x + \lambda^T f_x = 0\\
H_u &= L_u + \lambda^T f_u = 0\\
H_\lambda &= L_\lambda + \lambda^T f_\lambda = 0\\
H_\lambda &= f(x,u) = 0.
\end{aligned}
$$

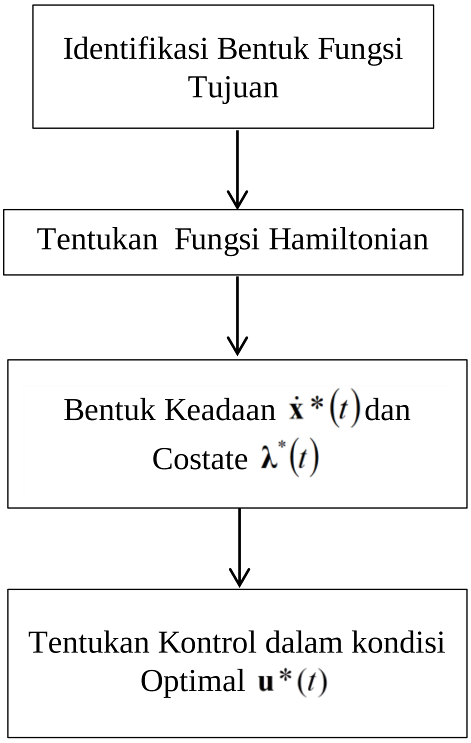
3. Metode Penelitian

Berikut adalah langkah-langkah yang akan dilakukan dalam menyelesaikan penelitian ini:

a) Melakukan studi literatur dengan mengumpulkan referensi yang relevan berupa buku teks, jurnal, dan artikel terkait di internet.

b) Mengumpulkan berbagai defenisi dan teorema yang berkaitan dengan penelitian.

c) Mengkonstruksi sistem kontrol optimal berkendala sehingga menjadi sistem kontrol optimal tanpa kendala dengan algoritma sebagai berikut :



d) Melakukan interpretasi terhadap hasil-hasil yang diperoleh.

4. Hasil Dan Pembahasan

Untuk mendapatkan kontrol dalam keadaan yang optimal $\mathbf{u}^*(\mathbf{t})$ yang memenuhi batasan (3) dan sistem (1) serta meminimumkan fungsi tujuan (2), maka ada algoritma yang dilakukan adalah sebagai berikut:

Langkah 1. Identifikasi bentuk dari fungsi tujuan.

Bersadarkan bentuk sistem pada (1) dan memperhatikan batasan kontrol pada (4), maka fungsi tujuan menjadi seperti berikut :

$$
J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\, dt = \int_{t_0}^{t_f} 1\, dt = t_f - t_0 \qquad (15)
$$

dimana t_0 tetap dan t_f bebas.

Langkah 2. Bentuk Fungsi Hamiltonian

Adapun bentuk Hamiltonian *(H)* yang memenuhi sistem (1) dan meminimumkan fungsi tujuan (2) sebagai berikut:

$$
H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\, \dot{\mathbf{x}}(t), \qquad (16)
$$

dimana $\lambda^T(t)$ adalah variable *costate*.

Subtitusikan persamaan (1) dan (15) sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)) &= 1 + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\left[A\,\mathbf{x}(t) + B\,\mathbf{u}(t)\right]\\
&= 1 + \left[A\,\mathbf{x}(t)\ \boldsymbol{\lambda}^T(t) + B\,\mathbf{u}(t)\ \boldsymbol{\lambda}^T(t)\right], \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Langkah 3. Bentuk Keadaan $\dot{\mathbf{x}}^*(t)$ dan Costate

$\boldsymbol{\lambda}^*(t)$.

Definisikan semua variabel keadaan, kontrol dan *costate* dalam keadaan yang optimal : $\dot{\mathbf{x}}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$, dan $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$. Maka berdasarkan syarat perlu untuk meminimumkan (kondisi optimal), keadaan $\dot{\mathbf{x}}^*(t)$ dan costate $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ diberikan sebagai berikut :

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = +\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)_* = A\mathbf{x}^*(t) + B\mathbf{u}^*(t), \qquad (18)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathbf{x}}\right)_* = -A\boldsymbol{\lambda}^*(t), \qquad (19)$$

dengan nilai batas $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ dan $\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{0}$.

Langkah 4. Tentukan Kontrol dalam kondisi Optimal $\mathbf{u}^*(t)$

Untuk mendapatkan kontrol dalam keadaan yang optimal, maka berdasarkan Prinsip *Pontryagain* $\mathbf{u}^*(t)$ harus memenuhi pertidaksamaan sebagai berikut :

$$\mathrm{H}(\mathbf{x}^*(\mathrm{t}), \mathbf{u}^*(\mathrm{t}), \boldsymbol{\lambda}^*(\mathrm{t}), \mathrm{t}) \leq \mathrm{H}(\mathbf{x}^*(\mathrm{t}), \mathbf{u}(\mathrm{t}), \boldsymbol{\lambda}^*(\mathrm{t}), \mathrm{t})$$

Sehingga dari persamaan (17) diperoleh

$$\begin{aligned} &1 + \left[A\mathbf{x}^*(t)\right]^T \boldsymbol{\lambda}^*(t) + \mathbf{u}^{*T}(t) B^T \boldsymbol{\lambda}^*(t) \\ &\quad \leq 1 + \left[A\mathbf{x}^*(t)\right]^T \boldsymbol{\lambda}^*(t) + \mathbf{u}^T(t) B^T \boldsymbol{\lambda}^*(t) \qquad (20) \end{aligned}$$

Persamaan (20) dapat disederhanakan menjadi berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{*T}(t) B^T \boldsymbol{\lambda}^*(t) &\leq \mathbf{u}^T(t) B^T \boldsymbol{\lambda}^*(t) \\ \mathbf{u}^{*T}(t)\, \mathbf{q}^*(t) &\leq \mathbf{u}^T(t)\, \mathbf{q}^*(t) \\ &= \min_{|\mathbf{u}(t)| \leq 1} \left\{\mathbf{u}^T(t)\, \mathbf{q}^*(t)\right\} \qquad (21) \end{aligned}$$

dimana $\mathbf{q}^*(t) = B^T \boldsymbol{\lambda}^*(t)$.

Perhatikan kondisi berikut:

1. Jika $\mathbf{q}^*(t)$ bernilai positif, maka nilai kontrol optimal $\mathbf{u}^*(t)$ haruslah yang paling kecil, akibatnya nilai $\mathbf{u}^*(t)$ yang mungkin adalah -1, sedemikian sehingga

$$\min_{|\mathbf{u}(t)| \leq 1} \left\{\mathbf{u}^T(t)\, \mathbf{q}^*(t)\right\} = -\mathbf{q}^*(t) = -\left|\mathbf{q}^*(t)\right|, \qquad (22)$$

2. Jika $\mathbf{q}^*(t)$ bernilai negatif, maka nilai kontrol optimal $\mathbf{u}^*(t)$ haruslah yang paling besar, akibatnya nilai $\mathbf{u}^*(t)$ yang mungkin adalah +1, sedemikian sehingga

$$\min_{|\mathbf{u}(t)| \leq 1} \left\{\mathbf{u}^T(t)\, \mathbf{q}^*(t)\right\} = +\mathbf{q}^*(t) = -\left|\mathbf{q}^*(t)\right|, \qquad (23)$$

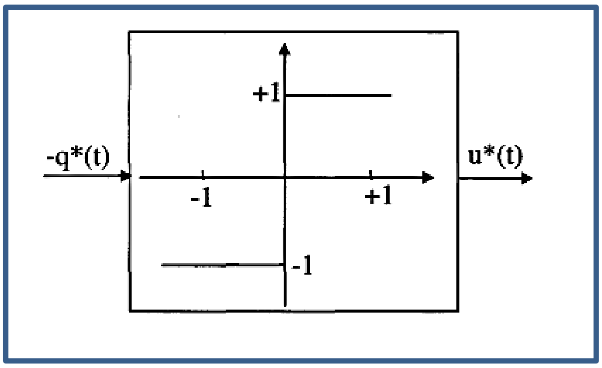
Dari kedua kondisi diatas, maka bentuk (22) dan (23) dapat ditulis dalam bentuk persamaan berikut

$$\min_{|\mathbf{u}(t)| \leq 1} \left\{\mathbf{u}^T(t)\, \mathbf{q}^*(t)\right\} = -\left|\mathbf{q}^*(t)\right|. \qquad (24)$$

Selain itu dapat juga ditulis

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{jika } \mathbf{q}^*(t) < 0, \\ -1 & \text{jika } \mathbf{q}^*(t) > 0, \\ \text{tak terdefinisi} & \text{jika } \mathbf{q}^*(t) = 0. \end{cases}$$

Hubungan antara kontrol optimal $\mathbf{u}^*(t)$ dan fungsi $\mathbf{q}^*(t)$ dapat ditunjukkan dalam gambar berikut



Gambar 2. Kontrol Optimal

Berdasarkan algoritma dalam menentukan kontrol dalam kondisi yang optimal dari sistem LTI berkendala adalah

$$\mathbf{u}^*(t) = -SGN\{\mathbf{q}^*(t)\}. \tag{25}$$

Contoh 3.1. Diberikan sistem kontrol optimal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= u(t),\end{aligned} \tag{26}$$

dan fungsi tujuan sebagai berikut

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\mathbf{x}_1^2(t) + \mathbf{u}^2(t)\right]dt, \tag{27}$$

dengan keadaan x (t_f) bebas dan kontrol **u**(t) berbatas

$-1 \le u(t) \le +1$ atau $|u(t)| \le +1$ untuk $t \in [t_0, t_f]$

Langkah 1. Identifikasi bentuk dari fungsi tujuan.

$$\mathbf{V} = J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x_1^2(t) + u^2(t)\right]dt$$

$$J = \int \mathbf{V} + x'$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}\left[x_1^2(t) + u^2(t)\right]dt$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)\right]$$

Langkah 2. Bentuk Fungsi Hamiltonian

Perhatikan bahwa :

$$H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$$

Sedemikian sehingga diperoleh fungsi hamiltonian sebagai berikut :

$$H = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2(t)u(t)$$

Langkah 3. Keadaan $\dot{\mathbf{x}}^*(t)$ *dan Costate* $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$.

Dengan menggunakan persamaan diferensial, berdasarkan bentuk fungsi hamiltonian (16) yang bersesuaian dengan syarat cukup untuk meminimumkan, diperoleh

$$\dot{x}_1^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2^*(t),$$

$$\dot{x}_2^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = u^*(t),$$

$$\dot{\lambda}_1^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_1^*(t),$$

$$\dot{\lambda}_2^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1^*(t)$$

dengan nilai batas $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ dan $\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{0}$.

Langkah 4. Kontrol dalam kondisi Optimal $\mathbf{u}^*(t)$

Berdasarkan Prinsip *Pontryagain* $\mathbf{u}^*(t)$ harus memenuhi pertidaksamaan sebagai berikut :

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) \le H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t)$$

Dengan menggunakan bentuk hamiltonian diperoleh bentuk berikut

$$\frac{1}{2}u^{*2}(t) + \lambda_2^*(t)\,u^*(t) \le \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_2^*(t)\,u(t)$$

$$= \min_{|u|\le 1}\left\{\frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_2^*(t)\,u(t)\right\}$$

Karena B=1, maka kasus ini $\mathbf{q}^*(t) = \boldsymbol{\lambda}^*(t)$, , akibatnya

$$u^{*2}(t) + q_2^*(t)\,u^*(t) \le \frac{1}{2}u^2(t) + q_2^*(t)\,u(t)$$

$$= \min_{|u|\le 1}\left\{\frac{1}{2}u^2(t) + q_2^*(t)\,u(t)\right\}$$

Gunakan kalkulus sederhana untuk menyelesaikan $\frac{1}{2}u^2(t) + q_2^*(t)\,u(t)$ sehingga menghasilkan nilai optimun

$$u^*(t) = -q_2^*(t), \quad \text{jika } -1 \le q_2^*(t) \le +1. \qquad (28)$$

dari sistem kontrol optimal berkendala (26) dan batasan dari $u(t)$, diperoleh bahwa

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{jika } \lambda_2^*(t) > +1 \\ +1, & \text{jika } \lambda_2^*(t) < -1. \end{cases} \qquad (28)$$

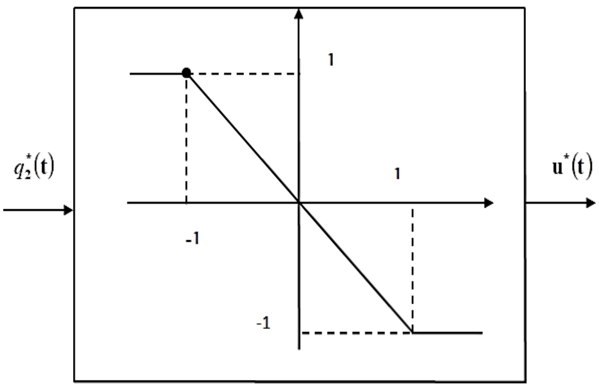
Atau dapat juga ditulis

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{jika } q_2^*(t) > +1 \\ +1, & \text{jika } q_2^*(t) < -1. \end{cases} \qquad (29)$$

Selanjutnya gabungkan kontrol dalam keadaan nilai yang optimun (27) dan (29), diperoleh

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & \text{jika } q_2^*(t) < -1 \\ -1, & \text{jika } q_2^*(t) > +1 \\ -q_2^*(t), & \text{jika } -1 \le q_2^*(t) \le +1. \end{cases} \qquad (30)$$

Berikut diberikan gambar dari persamaan (30)



Gambar 3. Kontrol Optimal

Jelas terlihat pada gambar diatas bahwa kontrol optimal tidak terbatas, sehingga berdasarkan definisi maka sistem kontrol optimal berkendala sudah berubah menjadi sistem kontrol optimal tanpa kendala.

5. Kesimpulan Dan Saran

5.1. Kesimpulan

Sistem kontrol optimal berkendala dikatakan berkendala jika **u(t)** yang memenuhi sistem tersebut terbatas. Sistem kontrol optimal berkendala ini dapat diubah menjadi sistem kontrol optimal tanpa kendala dengan mengkonstruksi sistem tersebut sedemikian sehingga nilai **u(t)** menjadi tidak terbatas dengan mengikuti algoritma yang telah diberikan. Pada penelitian ini, sistem yang digunakan adalah Sistem Linear Time Invariant (LTI), dengan bentuk kontrol dalam keadaan yang optimal adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{u}^*(t) = -SGN\{\mathbf{q}^*(t)\}$$

dimana $\mathbf{q}^*(t) = B^T \boldsymbol{\lambda}^*(t)$

5.2. Saran

Pada penelitian ini, penulis menggunakan sistem Linear Time Invariant (LTI), maka untuk pembahasan selanjutnya penulis menyarankan pembaca untuk mengkaji masalah ini dengan menggunakan jenis sistem yang lain, misalnya sistem Linear Time Variant.

6. Ucapan Terima Kasih

Kami mengucapkan terima kasih yang tulus kepada tim yang telah membantu dalam penyelesaian artikel ini serta semua pihak yang terkait, sehingga artikel ini bisa dipublikasikan dalam Map Journal edisi Juni Tahun 2022.

Daftar Pustaka

[1] C. Beauthier and J. J. Winkin, "LQ-optimal control of positive linear systems," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 31, no. 6, pp. 547–566, 2010.

[2] E. Hendricks, O. Jannerup, and P. H. Sørensen, *Linear systems control: deterministic and stochastic methods*. Springer, 2008.

[3] D. S. Naidu, *Optimal control systems*. CRC press, 2002.

[4] B. Roszak and E. J. Davison, "Necessary and sufficient conditions for stabilizability of positive LTI systems," *Systems & Control Letters*, vol. 58, no. 7, pp. 474–481, 2009.

[5] E. Casas and F. Tröltzsch, "Sparse optimal control for the heat equation with mixed control-state constraints," *Mathematical Control & Related Fields*, vol. 10, no. 3, p. 471, 2020.

[6] A. Boccia, M. D. R. de Pinho, and R. B. Vinter, "Optimal control problems with mixed and pure state constraints," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 54, no. 6, pp. 3061–3083, 2016.

[7] R. Bonalli, "Optimal Control of Aerospace Systems with Control-State Constraints and Delays," Sorbonne Université, 2018.

[8] L. Farina and S. Rinaldi, *Positive linear systems: theory and applications*, vol. 50. John Wiley & Sons, 2000.

[9] D. G. Luenberger, *Introduction to dynamic systems: theory, models, and applications*, vol. 1. Wiley New York, 1979.