

ANALISIS MODEL SIR-ASI PADA PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE

ANALYSIS OF THE SIR-ASI MODEL IN DENGUE FEVER

Anjel Agustina¹, Pardi Affandi^{2§}

¹Universitas Lambung Mangkurat dan Jl. A. Yani KM.36 [agustinaanje@gmail.com]

²Universitas Lambung Mangkurat dan Jl. A. Yani KM.36 [p_affandi@ulm.ac.id]

[§]Corresponding Author

Received 14 April 2023; Accepted 9 Juni 2023; Published 30 Juni 2023;

Abstrak

Penyakit Demam Berdarah (DBD) adalah penyakit yang disebarkan oleh infeksi virus dengue melalui gigitan nyamuk *Aedes Aegypti*. Dengue adalah penyakit yang ditularkan oleh nyamuk dengan pertumbuhan tercepat di dunia. Nyamuk *Aedes Aegypti* dapat berperan sebagai vektor pada penyakit DBD. Tingginya kasus penyakit DBD dari tahun ke tahun menjadi masalah kesehatan yang utama di Indonesia. DBD dapat dimodelkan menggunakan pemodelan matematika untuk memahami dinamika penyebaran penyakit melalui kestabilan titik ekuilibrium serta pengendalian masalah optimal dari penularan penyakit DBD. Model DBD diklasifikasikan dalam 2 jenis kelas yaitu, kelas populasi manusia dan kelas nyamuk. Untuk kelas populasi manusia, ada tiga subkelas yaitu populasi rentan, populasi terinfeksi, dan populasi sembuh. Sementara untuk kelas populasi nyamuk, dibagi menjadi tiga subkelas yaitu populasi akuatik, populasi rentan, dan populasi terinfeksi. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan model matematika penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue, merekonstruksi model dengan menentukan titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar, menentukan bentuk kendali optimal pada penyakit DBD, dan simulasi numerik. Hasil dari penelitian ini adalah terbentuknya model SIR-ASI untuk penyakit DBD. Berdasarkan model tersebut diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) dan titik ekuilibrium endemik (E_1). Kemudian diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) melalui metode *Next Generation*

$$\text{Matrix yaitu } R_0 = \sqrt{\frac{kB^2\beta_{mh}\beta_{hm}(\varphi\eta_A - \eta_A\mu_m - \mu_A\mu_m)}{\varphi\mu_m^2(\eta_h + \mu_h)}}.$$

Kata Kunci: Demam Berdarah Dengue (DBD), Model SIR-ASI, Reproduksi Dasar (R_0), *Aedes Aegypti*

Abstract

Dengue Hemorrhagic Fever (DHF) is a disease caused by dengue virus infection through the bite of the Aedes Aegypti mosquito. The high number of cases of DBD from year to year has become a major health problem in Indonesia. DBD can be modeled using mathematical modeling to understand the dynamics of disease spread through the stability of the equilibrium point and optimal control of the problem of DBD transmission. The DBD model is classified into 2 types of classes: the human population class and the mosquito class. There are three subclasses for the human population class: the susceptible population, the infected population, and the recovered population. Meanwhile, the mosquito population class is divided into three subclasses, namely the aquatic population, the susceptible population, and the infected population. The aims of this study were to determine a mathematical model for the spread of Dengue

Hemorrhagic Fever, to reconstruct the model, to determine the optimal control form for DBD, and to perform numerical simulations. The result of this study is the formation of the SIR-ASI model for DBD. Based on this model, two equilibrium points are obtained, namely a disease-free equilibrium point and an endemic equilibrium point. Then the basic reproduction number (R_0) is obtained through the Next Generation Matrix method.

Keywords: Dengue Fever, SIR-ASI Model, Basic Reproduction (R_0), *Aedes Aegypti*

1. Pendahuluan

Demam berdarah dengue (DBD) adalah penyakit yang disebabkan oleh infeksi virus dengue melalui gigitan nyamuk *Aedes*, khususnya *Aedes Aegypti*. Dengue adalah penyakit yang ditularkan oleh nyamuk dengan pertumbuhan tercepat di dunia. Gejala atau tanda pengenalan cepat infeksi dengue dapat menyebabkan infeksi tanpa gejala atau gejala, sekitar 20% di antaranya menimbulkan gejala.

Demam berdarah dengue sering terjadi di daerah tropis dan subtropis. Data dari seluruh dunia menunjukkan bahwa Asia menempati urutan pertama dalam jumlah penderita DBD setiap tahunnya. Sementara itu, terhitung sejak tahun 1968 hingga tahun 2009, World Health Organization (WHO) mencatat negara Indonesia sebagai negara dengan kasus DBD tertinggi di Asia Tenggara.

Penyakit Demam berdarah dengue (DBD) masih menjadi masalah Kesehatan masyarakat yang utama di Indonesia. Dengan meningkatnya mobilitas dan kepadatan penduduk, maka jumlah penderita dan luas daerah penyebarannya bertambah. Di Indonesia DBD pertama kali terdeteksi di Kota Surabaya pada tahun 1968, dimana sebanyak 58 orang terinfeksi dan 24 diantaranya meninggal dunia (tingkat kematian: 41,3%). Penyakit ini terus menyebar ke seluruh Indonesia sejak tahun itu. Peningkatan kasus DBD terus terjadi terutama saat musim hujan.

Kementerian Kesehatan mencatat bahwa kasus DBD di Indonesia hingga minggu ke-49 di tahun 2020 menginjak pada angka 95.893 dengan jumlah kematian sebanyak 661 kasus. Kemudian di tahun 2022, jumlah kumulatif kasus DBD di Indonesia sampai dengan minggu ke-22 dilaporkan terjadi 45.387 kasus dengan jumlah kematian akibat DBD mencapai 432 kasus [1].

Tingginya kasus DBD merupakan masalah yang harus diselesaikan, sehingga beberapa jurnal Review secara khusus membahas hal terkait DBD ini [2] dan [3]. Kajian demam berdarah ini juga dibahas dalam berbagai penelitian. Beberapa makalah tentang hal itu telah dijelaskan oleh [4], [5], [6], [7], dan [8].

Penyelesaian permasalahan penyebaran penyakit DBD dapat dimodelkan secara matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa dengan melibatkan kompartemen aquatic [2]. Pemodelan matematika telah banyak digunakan untuk mengidentifikasi dan menganalisis dinamika penyebaran penyakit. Salah satu diantaranya adalah penyakit DBD yang dapat dimodelkan melibatkan kompartemen host dan vector [4], [5], [6], dan [8]. Ada juga yang hanya membahas masalah DBD pada kompartemen host secara khusus pada sel tubuh manusia [9]

Selain itu, model matematika dapat memberikan peranan penting dalam menentukan

strategi yang tepat untuk pengendalian penyebaran penyakit tersebut. Permasalahan yang ada dalam lingkungan kehidupan dapat ditransformasikan dalam model matematika dengan menggunakan beberapa asumsi. Dari model matematika yang ada selanjutnya dapat dianalisis perilaku-perilaku di dalamnya yang kemudian dapat digunakan untuk menanggulangi resiko penyebaran penyakit DBD.

2. Landasan Teori

2.1. Persamaan Diferensial

Berikut diberikan definisi tentang persamaan diferensial [10]

Definisi 2.1.

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat suatu fungsi dari turunan-turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Definisi 2.2.

- Suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan biasa suatu fungsi terhadap satu variable bebasnya disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB).
- Suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial satu fungsi terhadap satu variable bebasnya disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Definisi 2.3.

Suatu persamaan diferensial biasa linear orde- n dengan y merupakan variable tak bebas dan x merupakan variable bebas, dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \quad (2.1)$$

Dengan $a_0(x) \neq 0$.

2.2. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan sistem yang terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dapat dikategorikan menjadi sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear.

2.3. Titik Ekuilibrium (Titik Kestimbangan)

Titik ekuilibrium merupakan titik yang menyatakan kestimbangan suatu model matematika. Sehingga titik ekuilibrium juga dapat dikenal sebagai titik kestimbangan. Titik kestimbangan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Misalkan suatu system persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

Suatu $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik ekuilibrium dari persamaan (2.2) jika $f(\hat{x}) = 0$

2.4. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menyatakan banyaknya jumlah bilangan rentan yang dapat terinfeksi penyakit akibat tertular oleh individu terinfeksi.

Definisi 2.4.

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai jumlah rata-rata kasus sekunder yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa terinfeksi dalam keseluruhan populasi rentan.

3. Hasil Dan Pembahasan

3.1. Pembentukan Model Penyakit Demam Berdarah Dengue

Model matematika penyebaran penyakit DBD merupakan suatu model matematika yang menggambarkan dinamika penyebaran penyakit DBD antara populasi manusia dan populasi

nyamuk. Pembentukan model matematika penyakit DBD dikelompokkan ke dalam dua populasi yaitu populasi nyamuk (*vector*) dan manusia (*host*).

Berdasarkan [8]. Populasi nyamuk dan populasi manusia dibagi menjadi kelompok-kelompok terpisah. Populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok dan populasi nyamuk juga terbagi menjadi tiga kelompok, sebagai berikut.

3.1.1. Populasi manusia

1. Subpopulasi *Susceptibles* dinotasikan dengan $S_h(t)$ menyatakan jumlah individu manusia yang sehat tetapi rentan terinfeksi virus DBD pada saat t .
2. Subpopulasi *Infected* atau *infectious* dinotasikan dengan $I_h(t)$ menyatakan jumlah individu manusia yang terinfeksi dan dapat menginfeksi pada saat t .
3. Subpopulasi *Recovered* dinotasikan dengan $R_h(t)$ menyatakan jumlah individu manusia yang sembuh dari terinfeksi DBD secara alami dan tidak dapat tertular penyakit lagi pada saat t .

3.1.2. Populasi nyamuk

1. Subpopulasi *Aquatic* dinotasikan dengan $A_m(t)$ menyatakan jumlah individu nyamuk dalam fase akuatik yang meliputi tahap telur, larva, dan kepompong pada saat t .
2. Subpopulasi *Susceptibles* dinotasikan dengan $S_m(t)$ menyatakan jumlah individu nyamuk yang sehat tetapi rentan terinfeksi virus pada saat t .
3. Subpopulasi *Infected* dinotasikan dengan $I_m(t)$ menyatakan jumlah individu nyamuk

yang telah terinfeksi virus dan dapat menularkannya pada saat t .

Berdasarkan pengelompokkan di atas, dapat disimpulkan bahwa total populasi manusia pada saat t merupakan jumlah dari subpopulasi *Subsceptible*, *Infected*, dan *Recovered* pada saat t . jika populasi manusia pada saat t dinotasikan dengan $N_h(t)$, maka secara matematis $N_h(t)$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$N_h(t) = S_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$$

Diperoleh model SIR-ASI untuk penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue, yaitu.

$$\frac{dS_h}{dt}(t) = \mu_h N_h - \left(\frac{B\beta_{mh}I_m(t)}{N_h} + \mu_h \right) S_h(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI_h}{dt}(t) = \frac{B\beta_{mh}I_m(t)}{N_h} S_h(t) - (\eta_h + \mu_h) I_h(t) \quad (2)$$

$$\frac{dR_h}{dt}(t) = \eta_h I_h(t) - \mu_h R_h(t) \quad (3)$$

$$\frac{dA_m}{dt}(t) = \varphi \left(1 - \frac{A_m(t)}{kN_h} \right) (S_m(t) + I_m(t)) - (\eta_A + \mu_A) A_m(t) \quad (4)$$

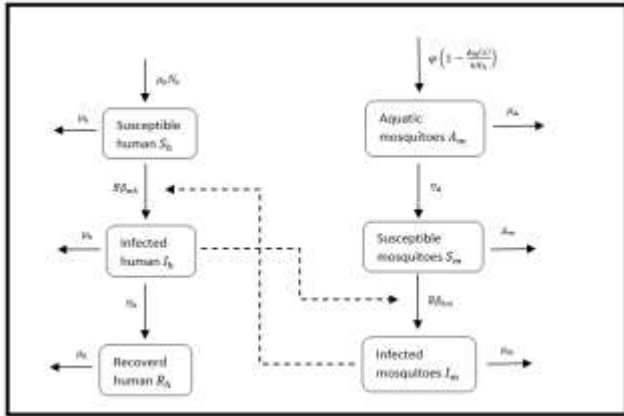
$$\frac{dS_m}{dt}(t) = \eta_A A_m(t) - \left(\frac{B\beta_{hm}I_h(t)}{N_h} + \mu_m \right) S_m(t) \quad (5)$$

$$\frac{dI_m}{dt}(t) = \frac{B\beta_{hm}I_h(t)}{N_h} S_m(t) - \mu_m I_m(t) \quad (6)$$

Adapun parameter yang digunakan dalam pembahasan ini adalah sebagai berikut.

- N_h : Total populasi manusia
 B : Rata-rata tingkat gigitan nyamuk per orang
 β_{mh} : Kemungkinan penularan dari nyamuk yang terinfeksi virus DBD ke manusia yang rentan
 β_{hm} : kemungkinan penularan dari manusia yang terinfeksi virus DBD ke nyamuk yang rentan
 μ_h : Tingkat kematian manusia
 μ_m : Tingkat kematian nyamuk
 η_h : Tingkat pemulihan alami manusia yang terinfeksi virus DBD
 φ : Jumlah pertumbuhan telur dari nyamuk

- μ_A : Tingkat kematian alami larva/telur nyamuk
- η_A : Laju pematangan dari larva menjadi nyamuk dewasa
- k : Jumlah larva per



Gambar 1. Diagram Model SIR-ASI Penyakit DBD

3.2. Analisis Kestabilan Model Penyakit Demam Berdarah Dengue

3.2.1. Titik Ekuilibrium bebas penyakit

Model penyakit Demam Berdarah Dengue memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Untuk menemukan titik ekuilibrium harus memenuhi kondisi,

$$\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dI_h}{dt} = 0, \frac{dR_h}{dt} = 0, \frac{dA_m}{dt} = 0, \frac{dS_m}{dt} = 0, \frac{dI_m}{dt} = 0$$

Sehingga dari persamaan (1), (2), (3), (4), (5), dan (6) diperoleh.

$$\mu_h N_h - \left(\frac{B\beta_{mh} I_m}{N_h} + \mu_h \right) S_h = 0 \tag{7}$$

$$\frac{B\beta_{mh} I_m}{N_h} S_h - (\eta_h + \mu_h) I_h = 0 \tag{8}$$

$$\eta_h I_h - \mu_h R_h = 0 \tag{9}$$

$$\varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_h} \right) (S_m + I_m) - (\eta_A + \mu_A) A_m = 0 \tag{10}$$

$$\eta_A A_m - \left(\frac{B\beta_{hm} I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m = 0 \tag{11}$$

$$\frac{B\beta_{hm} I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m = 0 \tag{12}$$

dengan menyelesaikan Persamaan (7) sampai (12)

maka akan didapatkan titik-titik yang disebut titik ekuilibrium.

3.2.2. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit (E_0)

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah suatu kondisi tidak ada penyakit yang menyerang atau tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sehingga

$$I_h = I_m = 0 \tag{13}$$

kemudian dari persamaan (7) diperoleh

$$\mu_h N_h - \left(\frac{B\beta_{mh} I_m}{N_h} + \mu_h \right) S_h = 0$$

$$\mu_h N_h - \mu_h S_h = 0$$

$$\mu_h S_h = \mu_h N_h$$

$$S_h = \frac{\mu_h N_h}{\mu_h}$$

$$S_h = N_h \tag{14}$$

lalu dari persamaan (9) diperoleh

$$\eta_h I_h - \mu_h R_h = 0$$

$$\mu_h R_h = 0$$

$$R_h = 0 \tag{15}$$

lalu dari persamaan (10) diperoleh

$$\varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_h} \right) (S_m + I_m) - (\eta_A + \mu_A) A_m = 0$$

$$\varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_h} \right) \left(\frac{\eta_A}{\mu_m} A_m \right) - (\eta_A + \mu_A) A_m = 0$$

$$\left(\varphi \frac{\eta_A}{\mu_m} A_m - \frac{\varphi A_m \eta_A}{kN_h \mu_m} A_m \right) = (\eta_A + \mu_A) A_m$$

$$\left(\varphi \frac{\eta_A}{\mu_m} A_m - \frac{\varphi A_m \eta_A}{kN_h \mu_m} A_m \right) = (\eta_A + \mu_A) A_m$$

$$\left(\varphi \frac{\eta_A}{\mu_m} A_m \right) = \left((\eta_A + \mu_A) + \frac{\varphi}{kN_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} A_m \right) A_m$$

$$\left(\frac{\varphi \eta_A}{\mu_m} \right) = \left((\eta_A + \mu_A) + \frac{\varphi}{kN_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} A_m \right)$$

$$\left(\frac{\varphi \eta_A}{\mu_m} \right) - (\eta_A + \mu_A) = \left(\frac{\varphi}{kN_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} A_m \right)$$

$$\left(\frac{\varphi \eta_A}{\mu_m} \right) - (\eta_A + \mu_A) = \left(\frac{\varphi}{kN_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} A_m \right)$$

$$\left(\left(\frac{\varphi \eta_A}{\mu_m} \right) - (\eta_A + \mu_A) \right) \frac{kN_h \mu_m}{\varphi \eta_A} = A_m$$

$$\left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A) \mu_m}{\varphi \eta_A} \right) kN_h = A_m$$

$$A_m = \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h \quad (16)$$

selanjutnya pada persamaan (11) diperoleh

$$\frac{dS_m}{dt} = 0$$

$$\eta_A A_m - \left(\frac{B\beta_{hm}I_h}{N_h} + \mu_m\right) S_m = 0$$

$$S_m = \frac{\eta_A}{\mu_m} A_m$$

$$S_m = \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h \quad (17)$$

Sehingga dari persamaan (1), (2), (3), (4), (5), dan (6) diperoleh

$$S_h = N_h, \quad R_h = 0, \quad A_m = \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h$$

$$S_m = \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, \quad I_h = I_m = 0$$

$$E_0 = (S_h, V_h, I_h, R_h, A_v, S_v, I_v)$$

$$E_0 = (N_h, pN_h, 0, 0, \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, 0)$$

yang disebut sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit.

3.2.3. Titik Ekuilibrium dengan penyakit (Endemik)

Titik ekuilibrium endemik dinotasikan dengan

$E_1 = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$ sehingga dari persamaan (1), (2), (3), (4), (5), dan (6) diperoleh.

$$\mu_h N_h - \left(\frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} + \mu_h\right) S_h^* = 0 \quad (18)$$

$$\frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} S_h^* - (\eta_h + \mu_h) I_h^* = 0 \quad (19)$$

$$\eta_h I_h^* - \mu_h R_h^* = 0 \quad (20)$$

$$\varphi \left(1 - \frac{A_m^*}{kN_h}\right) (S_m^* + I_m^*) - (\eta_A + \mu_A) A_m^* = 0 \quad (21)$$

$$\eta_A A_m^* - \left(\frac{B\beta_{hm}I_h^*}{N_h} + \mu_m\right) S_m^* = 0 \quad (22)$$

$$\frac{B\beta_{hm}I_h^*}{N_h} S_m^* - \mu_m I_m^* = 0 \quad (23)$$

Dari persamaan (18) diperoleh

$$\mu_h N_h - \left(\frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} + \mu_h\right) S_h^* = 0$$

$$\left(\frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} + \mu_h\right) S_h^* = \mu_h N_h$$

$$S_h^* = \frac{\mu_h N_h}{\left(\frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} + \mu_h\right)}$$

$$\text{misalkan } \varphi_h^* = \frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h}$$

$$S_h^* = \frac{\mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h} \quad (24)$$

Kemudian dari persamaan (19) diperoleh

$$\frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} S_h^* - (\eta_h + \mu_h) I_h^* = 0$$

$$(\eta_h + \mu_h) I_h^* = \frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} S_h^*$$

$$(\eta_h + \mu_h) I_h^* = \frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} \left(\frac{\mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}\right)$$

$$(\eta_h + \mu_h) I_h^* = \frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} \left(\frac{\mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}\right)$$

$$I_h^* = \frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h} \left(\frac{\mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}\right) \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h}\right)$$

$$\text{misalkan } \varphi_h^* = \frac{B\beta_{mh}I_m^*}{N_h}$$

$$I_h^* = \varphi_h^* \left(\frac{\mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}\right) \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h}\right)$$

$$I_h^* = \left(\frac{\varphi_h^* \mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}\right) \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h}\right) \quad (25)$$

Dari persamaan (20) diperoleh

$$\eta_h I_h^* - \mu_h R_h^* = 0$$

$$\mu_h R_h^* = \eta_h I_h^*$$

$$R_h^* = \frac{\eta_h I_h^*}{\mu_h}$$

$$R_h^* = \frac{\eta_h \left(\frac{\varphi_h^* \mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}\right) \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h}\right)}{\mu_h}$$

$$R_h^* = \frac{\eta_h \varphi_h^* N_h}{(\varphi_h^* + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)} \quad (26)$$

Selanjutnya dari persamaan (21) diperoleh

$$\varphi \left(1 - \frac{A_m^*}{kN_h}\right) (S_m^* + I_m^*) - (\eta_A + \mu_A) A_m^* = 0$$

$$\left(\varphi - \frac{\varphi A_m^*}{kN_h}\right) (S_m^* + I_m^*) - (\eta_A + \mu_A) A_m^* = 0$$

$$\varphi (S_m^* + I_m^*) - \frac{\varphi A_m^*}{kN_h} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_A + \mu_A) A_m^* = 0$$

$$\left(\frac{\varphi}{kN_h} (S_m^* + I_m^*) + (\eta_A + \mu_A)\right) A_m^* = \varphi (S_m^* + I_m^*)$$

$$\left(\frac{\varphi (S_m^* + I_m^*) + (\eta_A + \mu_A) kN_h}{kN_h}\right) A_m^* = \varphi (S_m^* + I_m^*)$$

$$A_m^* = \frac{\varphi (S_m^* + I_m^*) kN_h}{\varphi (S_m^* + I_m^*) + (\eta_A + \mu_A) kN_h} \quad (27)$$

lalu pada persamaan (22) diperoleh

$$\eta_A A_m^* - \left(\frac{B\beta_{hm} I_h^*}{N_h} + \mu_m \right) S_m^* = 0$$

$$\left(\frac{B\beta_{hm} I_h^*}{N_h} + \mu_m \right) S_m^* = \eta_A A_m^*$$

$$S_m^* = \frac{\eta_A A_m^*}{\frac{B\beta_{hm} I_h^*}{N_h} + \mu_m}$$

Misalkan $\varphi_m^* = \frac{B\beta_{hm} I_h^*}{N_h}$ didapat

$$S_m^* = \frac{\eta_A A_m^*}{\varphi_m^* + \mu_m} \quad (28)$$

Kemudian pada persamaan (23) diperoleh

$$\frac{B\beta_{hm} I_h^*}{N_h} S_m^* - \mu_m I_m^* = 0$$

$$\mu_m I_m^* = \frac{B\beta_{hm} I_h^*}{N_h} S_m^*$$

$$\mu_m I_m^* = \frac{B\beta_{hm} I_h^*}{N_h} \frac{\eta_A A_m^*}{\varphi_m^* + \mu_m}$$

$$I_m^* = \frac{B\beta_{hm} I_h^*}{\mu_m N_h} \frac{\eta_A A_m^*}{\varphi_m^* + \mu_m} \text{ dimana}$$

Misalkan $\varphi_m^* = \frac{B\beta_{hm} I_h^*}{N_h}$ didapat

$$I_m^* = \frac{\varphi_m^*}{\mu_m} \frac{\eta_A A_m^*}{(\varphi_m^* + \mu_m)} \quad (29)$$

$$E_1 = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$$

dimana

$$S_h^* = \frac{\mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}, \quad I_h^* = \left(\frac{\varphi_h^* \mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h} \right) \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h} \right), \quad R_h^* = \frac{\eta_h \varphi_h^* N_h}{(\varphi_h^* + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)}$$

$$A_m^* = \frac{\varphi(S_m^* + I_m^*) k N_h}{\varphi(S_m^* + I_m^*) + (\eta_A + \mu_A) k N_h}, \quad S_m^* = \frac{\eta_A A_m^*}{\varphi_m^* + \mu_m}, \quad I_m^* = \frac{\varphi_m^*}{\mu_m} \frac{\eta_A A_m^*}{(\varphi_m^* + \mu_m)}$$

dengan

$$\varphi_h^* = \frac{B\beta_{mh} I_m^*}{N_h}, \quad \varphi_m^* = \frac{B\beta_{hm} I_h}{N_h}$$

Selanjutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit.

3.2.4. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar atau yang biasa dinotasikan dengan R_0 merupakan suatu besaran yang menyatakan tingkat penularan atau penyebaran infeksi penyakit. Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) digunakan titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (N_h, pN_h, 0, 0, \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, 0)$$

Bilangan reproduksi dasar akan dicari dengan menggunakan metode matriks generasi mendatang (*next generation*). Pada model ini sistem persamaan yang digunakan adalah subpopulasi kelas terinfeksi

$$\frac{dI_h}{dt}(t) = \frac{B\beta_{mh} I_m(t)}{N_h} S_h(t) - (\eta_h + \mu_h) I_h(t)$$

$$\frac{dI_m}{dt}(t) = \frac{B\beta_{hm} I_h(t)}{N_h} S_m(t) - \mu_m I_m(t)$$

Akan digunakan simbol φ sebagai matriks dari laju infeksi yang mengakibatkan bertambahnya infeksi dan ϕ sebagai laju infeksi yang mengakibatkan berkurangnya infeksi sebagai berikut

$$\varphi = \begin{pmatrix} \frac{B\beta_{mh} I_m}{N_h} S_h \\ \frac{B\beta_{hm} I_h}{N_h} S_m \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} (\eta_h + \mu_h) I_h \\ \mu_m I_m \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dibentuk matriks jacobian untuk persamaan matriks di atas, sehingga hasil matriks jacobiani adalah :

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi I_i}{\partial \varphi I_i} & \frac{\partial \varphi I_i}{\partial \varphi I_v} \\ \frac{\partial \varphi I_v}{\partial \varphi I_i} & \frac{\partial \varphi I_v}{\partial \varphi I_v} \end{pmatrix}, \quad J(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi I_i}{\partial \phi I_i} & \frac{\partial \phi I_i}{\partial \phi I_v} \\ \frac{\partial \phi I_v}{\partial \phi I_i} & \frac{\partial \phi I_v}{\partial \phi I_v} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B\beta_{mh}}{N_h} S_h \\ \frac{B\beta_{hm}}{N_h} S_m & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \eta_h + \mu_h & 0 \\ 0 & \mu_m \end{pmatrix}$$

Kemudian dilakukan substitusi ke matriks F dan V di titik tetap bebas penyakitnya

$$E_0 = (N_h, pN_h, 0, 0, \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, 0)$$

Sehingga diperoleh :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B\beta_{mh} N_h}{N_h} \\ \frac{B\beta_{hm}}{N_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h & 0 \end{pmatrix}$$

Mencari nilai V^{-1} , diperoleh :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta_h + \mu_h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_m} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh bentuk matriks next

Anjel Agustina dan Pardi Affandi
generation sebagai berikut :

$$K = FV^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{B\beta_{mh}N_h}{N_h} \\ \frac{B\beta_{hm}}{N_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta_h + \mu_h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_m} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B\beta_{mh}}{\mu_m} \\ \frac{B\beta_{hm}}{N_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian kita acari nilai eigen dari matriks
berkut dengan $\det(A - \lambda I) = 0$

$$K = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & \frac{B\beta_{mh}}{\mu_m} \\ \frac{B\beta_{hm}}{N_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h}\right) & 0 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(-\lambda)(-\lambda) - \left(\frac{B\beta_{mh}}{\mu_m}\right) \left(\frac{B\beta_{hm}}{N_h} \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h}\right)\right) = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{kB^2\beta_{mh}\beta_{hm}(\varphi\eta_A - \eta_A\mu_m - \mu_A\mu_m)}{\varphi\mu_m^2(\eta_h + \mu_h)} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{kB^2\beta_{mh}\beta_{hm}(\varphi\eta_A - \eta_A\mu_m - \mu_A\mu_m)}{\varphi\mu_m^2(\eta_h + \mu_h)}$$

Karena bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah
nilai eigen dominan dari matriks K, maka bilangan
reproduksi dasar dari persamaan tersebut adalah
sebagai berikut

$$R_0^2 = \frac{kB^2\beta_{mh}\beta_{hm}(\varphi\eta_A - \eta_A\mu_m - \mu_A\mu_m)}{\varphi\mu_m^2(\eta_h + \mu_h)}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{kB^2\beta_{mh}\beta_{hm}(\varphi\eta_A - \eta_A\mu_m - \mu_A\mu_m)}{\varphi\mu_m^2(\eta_h + \mu_h)}} \quad (30)$$

4. Kesimpulan Dan Saran

Berdasarkan pembahasan diperoleh
kesimpulan, sebagai berikut.

1. Model matematika yang digunakan dalam
dinamika penyebaran penyakit Demam
Berdarah Dengue adalah dengan menggunakan
metode SIR-ASI. Sebagai berikut :

$$\frac{dS_h}{dt}(t) = \mu_h N_h - \left(\frac{B\beta_{mh}I_m(t)}{N_h} + \mu_h\right) S_h(t)$$

$$\frac{dI_h}{dt}(t) = \frac{B\beta_{mh}I_m(t)}{N_h} S_h(t) - (\eta_h + \mu_h) I_h(t)$$

$$\frac{dR_h}{dt}(t) = \eta_h I_h(t) - \mu_h R_h(t)$$

$$\frac{dA_m}{dt}(t) = \varphi \left(1 - \frac{A_m(t)}{kN_h}\right) (S_m(t) + I_m(t)) - (\eta_A + \mu_A) A_m(t)$$

$$\frac{dS_m}{dt}(t) = \eta_A A_m(t) - \left(\frac{B\beta_{hm}I_h(t)}{N_h} + \mu_m\right) S_m(t)$$

$$\frac{dI_m}{dt}(t) = \frac{B\beta_{hm}I_h(t)}{N_h} S_m(t) - \mu_m I_m(t)$$

2. Dari model penyakit DBD SIR-ASI
diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 yaitu
 $E_0 = (N_h, pN_h, 0, 0, \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, \frac{\eta_A}{\mu_m} \left(1 - \frac{(\eta_A + \mu_A)\mu_m}{\varphi\eta_A}\right) kN_h, 0)$ dan titik ekuilibrium endemic
 E_1 yaitu

$$E_1 = \left(\frac{\mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}, \left(\frac{\varphi_h^* \mu_h N_h}{\varphi_h^* + \mu_h}\right) \left(\frac{1}{\eta_h + \mu_h}\right), \frac{\eta_h \varphi_h^* N_h}{(\varphi_h^* + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)}, \frac{\varphi(S_m^* + I_m^*) kN_h}{\varphi(S_m^* + I_m^*) + (\eta_A + \mu_A) kN_h}, \frac{\eta_A A_m^*}{\varphi_m^* + \mu_m}, \frac{\varphi_m^*}{\mu_m} \frac{\eta_A A_m^*}{(\varphi_m^* + \mu_m)}\right)$$

Selain itu diperoleh juga bilangan reproduksi dasar
(R_0) dengan menggunakan metode *Next
Generation Matrix* diperoleh

$$R_0 = \sqrt{\frac{kB^2\beta_{mh}\beta_{hm}(\varphi\eta_A - \eta_A\mu_m - \mu_A\mu_m)}{\varphi\mu_m^2(\eta_h + \mu_h)}}$$

5. Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih kepada FMIPA dan
Prodi matematika yang telah membantu
sehingga penulis dapat menyelesaikan artikel
ini dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Kementerian Kesehatan RI, "Infodatin
Situasi Gizi," *Kementerian Kesehatan RI*,
vol. 7, no. 1. pp. 37–72, 2016.
- [2] P. Affandi, M. K. Ahsar, E. Suhartono, and
J. Dalle, "Systematic Review: Mathematics
Model Epidemiology of Dengue Fever,"
Univers. J. Public Heal., vol. 10, no. 4, pp.
419–429, 2022, doi:
10.13189/ujph.2022.100415.
- [3] M. Aguiar *et al.*, "Mathematical Models
For Dengue Fever Epidemiology: A 10-
Year Systematic Review," *Phys. Life Rev.*,
vol. 40, pp. 65–92, 2022, doi:

- [4] H. M. Yang and C. P. Ferreira, “Assessing The Effects Of Vector Control On Dengue Transmission,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 198, no. 1, pp. 401–413, 2008, doi: 10.1016/j.amc.2007.08.046.
- [5] L. Cai, S. Guo, X. Z. Li, and M. Ghosh, “Global Dynamics Of A Dengue Epidemic Mathematical Model,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 42, no. 4, pp. 2297–2304, 2009, doi: 10.1016/j.chaos.2009.03.130.
- [6] D. Aldila, T. Götz, and E. Soewono, “An Optimal Control Problem Arising From A Dengue Disease Transmission Model,” *Math. Biosci.*, vol. 242, no. 1, pp. 9–16, 2013, doi: 10.1016/j.mbs.2012.11.014.
- [7] M. Derouich and A. Boutayeb, “Dengue fever: Mathematical modelling and computer simulation,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 177, no. 2, pp. 528–544, 2006, doi: 10.1016/j.amc.2005.11.031.
- [8] H. S. Rodrigues, M. T. T. Monteiro, and D. F. M. Torres, “Vaccination Models and Optimal Control Strategies To Dengue,” *Math. Biosci.*, vol. 247, no. 1, pp. 1–12, 2014, doi: 10.1016/j.mbs.2013.10.006.
- [9] P. AFFANDI, M. M. S, O. A.B, and A. Rahim, “Optimum Control In The Model of Blood Fever Disease With Vaccines and Treatment,” *SCIREA J. Math.*, vol. 6, no. 6, pp. 87–100, 2021, doi: 10.54647/mathematics11303.
- [10] S. L. Ross,
“Shepley_L_Ross_Differential_Equations_