MAp Journal
Mathematics & Applications
UIN IMAM BONJOL PADANG
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

KARAKTERISTIK SOLUSI KUADRAT TERKECIL

THE CHARACTERISTICS OF THE LEAST SQUARES SOLUTION

Refni Marchelina[1§], Nova Noliza Bakar[2], Ezhari Asfa'ani[3]

[1]Prodi Matematika, Universitas Andalas [Email:refnichel@gmail.com]
[2]Prodi Matematika, Universitas Andalas [Email: kieknova@gmail.com]
[3]Prodi Matematika UIN Imam Bonjol Padang[Email: ezhariasfaani@uinib.ac.id]
[§] *Corresponding Author*

Received 23rd Sept 2023; Accepted 6th Nov 2023; Published 1st Dec 2023;

Abstrak

Sistem persamaan linier $A\,\vec{x} = \vec{b}$ dengan A matriks $m \times n$ dimana $m > n$ dikatakan *overdetermined system*. Dalam tulisan ini dikaji karakteristik solusi kuadrat terkecil pada *overdetermined system* untuk memperoleh solusi aproksimasi *inconsistent system*.

Solusi kuadrat terkecil memenuhi $A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$, persamaan normal, bersifat tunggal jika $rank\ (A) = n$, dan jika $rank\ (A) < n$ maka himpunan semua solusi kuadrat terkecilnya yaitu $\mathcal{S} = \{\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \vec{z} \mid \vec{z} \in \mathcal{N}\ (A)\}$dengan $\mathcal{N}\ (A)$adalah ruang null dari A.

Kata Kunci: sistem persamaan linier, *overdetermined system*, *inconsistent system*, persamaan normal, rank, ruang null.

Abstract

The systems of linear equations $A\,\vec{x} = \vec{b}$ with A matrix $m \times n$ where $m > n$ is said to be an overdetermined system. In this paper we examine the characteristics of least squares solutions in overdetermined system to obtain inconsistent system approximation solutions.

The least squares solution satisfies $A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$, the normal equation is unique if $rank(A) = n$, and if $rank\ (A) < n$ so that all of least square solutions is $\mathcal{S} = \{\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \vec{z} \mid \vec{z} \in \mathcal{N}\ (A)\}$ where $\mathcal{N}\ (A)$ is the null space of A.

Keywords*: systems of linear equations, overdetermined system, inconsistent system, normal equations, rank, null space.*

1. Pendahuluan

Sistem persamaan linier merupakan teori dasar dalam aljabar linier. Sistem persamaan linier dikatakan konsisten (*consistent system*) jika sistem tersebut mempunyai solusi, sedangkan sistem persamaan linier yang tidak mempunyai solusi dikatakan tak consistent (*inconsisten sistem*).

Dalam kehidupan nyata sering muncul

kasus dimana beberapa permasalahan fisika menghasilkan sebuah sistem persamaan linier $A\ \vec{x} = \vec{b}$, yang seharusnya konsisten dalam tataran teoritis namun menjadi tidak demikian karena adanya kesalahan – kesalahan pengukuran pada entri – entri A dan $\vec{b}$ yang menyebabkan sistem menjadi tak konsisten. Sistem yang tak konsisten dapat dicari solusi aproksimasinya dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

Misalkan diberikan sistem persamaan linier dalam bentuk $A\ \vec{x} = \vec{b}$ yang tak konsisten, dengan $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ dan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Akan dicari vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sehingga $A\vec{x}$ adalah pendekatan terbaik untuk $\vec{b}$. Banyak cara yang mungkin dapat digunakan untuk menentukan solusi terbaik, salah satu caranya yaitu dengan memisalkan $\vec{x}$ menjadi sebuah solusi untuk masalah minimisasi:

$$\min_{\vec{x}} \left\| A\ \vec{x} - \vec{b} \right\|_2, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

dimana $\|.\|_2$ merupakan norm vektor Euclidean. Persamaan (1) disebut dengan masalah kuadrat terkecil linier, $\vec{x}$ merupakan solusi kuadrat terkecil dari sistem $A\vec{x} = \vec{b}$, dan $\vec{b} - A\vec{x} = \vec{r}$ disebut vektor residu.

Berdasarkan uraian diatas, permasalahan yang akan diangkat adalah bagaimana karakteristik solusi dari sistem persamaan linier yang diselesaikan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

Permasalahan hanya dibatasi pada solusi dan karakteristik solusi dari sistem persamaan linier untuk *overdetermined system* dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengetahui karakteristik dari solusi kuadrat terkecil pada *overdetermined system.*

2. LandasanTeori

Pada bagian ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan karakteristik solusi kuadrat terkecil.

2.1 Sistem Persamaan Linier

Persamaan linier dalam n peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ dimana $a_1 a_2 \dots, a_n$ dan b adalah konstanta – konstanta riil. Sebuah himpunan berhingga dari persamaan – persamaan linier dalam peubah $x_1, \mathrm{x}_2, \dots, x_n$ dinamakan sistem persamaan linier. Sebuah sistem persamaan linier mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

dan dapat ditulis sebagai $A\ \vec{x} = \vec{b}$ dengan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ & \vdots & & \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{dan } \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(2.1.2)

Jika *A* adalah matriks dengan *m* baris dan *n* kolom dimana $m > n$ maka sistem linier tersebut disebut *overdetermined system***[3]**.

2.2 Teori Matriks

Suatu **matriks** adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan – bilangan, bilangan ini disebut dengan entri matriks. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut dengan

matriks kolom (atau **vektor kolom**) dan suatu matriks yang terdiri dari satu baris disebut **matriks baris** (atau **vektor baris**). Sebuah matriks dengan *n* baris dan *n* kolom dinamakan **matriks kuadrat berorde *n***. Jika *A* adalah sebarang matriks kuadrat, ***rank*** dari *A*, ditulis *rank (A)* adalah jumlah baris tak nol dari bentuk eselon baris yang tereduksi dari *A*.

Suatu matriks *A* dikatakan berbentuk matriks eselon baris yang tereduksi jika matriks tersebut mempunyai sifat – sifat berikut :

a. Jika satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan tak nol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan 1 ini disebut sebagai 1 utama
b. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris – baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah pada matriks.
c. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
d. Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat – tempat lainnya.

Definisi 2.2.1. [3] *Jika A adalah matriks bujur sangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga AB = BA = I, maka A disebut dapat dibalik (invertible) dan B disebut sebagai invers dari A. jika matriks B tidak dapat diperoleh dengan cara demikian, maka A dikatakan sebagai matriks singular.*

Jika *A* dapat dibalik, maka inversnya dinyatakan dengan symbol A^{-1} dan berlaku $AA^{-1} = I$dan $A^{-1}A = I$.

Definisi 2.2.2[3] *Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A yang dinotasikan dengan A^T, didefinisikan menjadi matriks $n \times m$ yang dihasilkan dari pertukaran baris – baris dan kolom – kolom dari A; yaitu kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.*

Suatu matriks kuadrat *A* dikatakan matriks simetris jika $A^T = A$.

Teorema 2.2.3.[3] *Jika ukuran matriks sedemikian rupa sehingga operasi – operasi berikut dapat dilakukan, maka*

1. $((A)^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T \; dan \; (A-B)^T = A^T - B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Suatu matriks simetris *A* dikatakan definit positif jika $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$,dan semi definit positif jika $\vec{x}^T A\vec{x} \geq 0$ untuk semua $\vec{x}$ **[2]**.

2.3 Vektor, Ruang Vektor dan Subruang

Vektor dapat dinyatakan secara geometrik sebagai ruas garis terarah atau anak panah, arah anak panah menunjukkan arah vektor dan panjang anak panah menggambarkan besarannya. Suatu **ruang vektor** *V* atas lapangan $\mathbb{F}$ adalah himpunan tak kosong *V* yang memuat vektor $\vec{0}$ dan dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar sehingga dipenuhi **[4]** :

1. Untuk semua $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ berlaku
   a. $\vec{u} + \vec{v} \in V$

b. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
c. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
d. $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
e. Terdapat $-\vec{u} \in V$ sehingga $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

2. Untuk semua $\vec{u}, \vec{v} \in V$dan $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku:
   a. $\alpha\vec{u} \in V$
   b. $1\vec{u} = \vec{u}$
   c. $\alpha(\vec{u} + \vec{v})= \alpha\vec{u}+ \alpha\vec{v}$
   d. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
   e. $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$.

Definisi 2.3.4. [3] *Suatu subhimpunan W dari suatu ruang vektor V disebut subruang dari V jika W itu sendiri merupakan suatu ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.*

Definisi 2.3.5. [5] *Misalkan* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ *adalah vektor–vektor dan* $r_1, r_2, \dots, r_n$ *adalah skalar-skalar. Vektor* $\vec{w} = r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_n\vec{v}_n$ *dikatakan sebagai kombinasi linier dari* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. *Himpunan semua kombinasi linier dari* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ *disebut span dari* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ *dan ditulis* $span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

Definisi 2.3.6. [5] *Koleksi vektor–vektor* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ *dikatakan bebas linier jika* $r_1, r_2, \dots, r_n$ *adalah skalar–skalar dan* $r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_n\vec{v}_n = \vec{0}$, *hanya dipenuhi oleh* $r_1 = 0, r_2 = 0, \dots, r_n = 0$. *(Dengan kata lain, cara untuk mengungkapkan* $\vec{0}$ *sebagai kombinasi linier dari* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ *hanya dengan menggunakan* 0 *sebagai koefisien – koefisien skalar). Jika* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ *tak bebas linier, maka dikatakan* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ *bergantung linier.*

Definisi 2.3.7.[3] *Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan* $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ *adalah suatu himpunan vektor–vektor pada V, maka S disebut basis untuk V jika dua syarat berikut berlaku :*

a. S bebas linier
b. S membangun V

Definisi 2.3.8. [5]*Anggap bahwa V adalah suatu ruang vektor dan mempunyai baris dengan n elemen untuk n bilangan asli, maka V dikatakan berdimensi n. Jika ruang vektor V berdimensi n untuk suatu n, maka V dikatakan ruang vektor berdimensi hingga. Jika V tak berdimensi hingga, maka V dikatakan berdimensi tak hingga.*

Definisi 2.3.9. [3] *Jika A adalah suatu matriks* $m \times n$, *maka subruang dari* $\mathbb{R}^n$ *yang dibangun oleh vektor-vektor baris dari A disebut ruang baris dari A, dan subruang dari* $\mathbb{R}^m$ *yang dibangun oleh vektor–vektor kolom disebut ruang kolom dari A.*

Teorema 2.3.10. [3] *Jika A adalah matriks* $n \times n$, *pernyataan – pernyataan berikut ekuivalen*

1. *A dapat dibalik*
2. *A mempunyai rank n*
3. *Vektor–vektor kolom dari A adalah bebas linier*

Teorema 2.3.11. [3] *Jika A adalah sebuah matriks* $m \times n$ *maka pernyataan – pernyataan berikut ini adalah ekuivalen*

1. *A memiliki vektor–vektor kolom yang bebas linier*
2. $A^T A$ *dapat dibalik*

2.4 Hasil Kali Dalam, Normdan Norm Euclidean

Misalkan vektor $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ dengan

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n \right\},$$ maka hasil kali dalam Euclidean pada $\mathbb{R}^n$ adalah

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Definisi 2.4.12.[5] *Misalkan V suatu ruang vektor riil. Hasil kali dalam riil terhadap V adalah fungsi bernilai riil terhadap $V \times V$, biasanya ditunjukkan oleh $\langle , \rangle$ yang memenuhi:*

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ *untuk semua* $\vec{u}, \vec{v}, \in V$.
2. $\langle k\vec{v}, \vec{u} \rangle = k \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ *untuk semua* $k \in \mathbb{R}$ *dan* $\vec{u}, \vec{v}, \in V$.
3. $\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{u} \rangle$ *untuk semua* $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
4. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ *untuk semua* $\vec{v} \in V$ *dan* $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ *jika hanya* $\vec{v} = \vec{0}$.

Panjang dari suatu vektor $\vec{u}$ sering disebut sebagai norm dari $\vec{u}$ dan dinyatakan dengan $\|\vec{u}\|$. Secara umum sebuah norm pada $\mathbb{R}^n$ didefinisikan dengan

$$\|\vec{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{1/p} \qquad (2.4.1)$$

untuk setiap bilangan riil $p \geq 1$. Secara khusus, jika $p = 2$, maka persamaan (2.4.1) menjadi

$$\|\vec{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)^{1/2} \qquad (2.4.2)$$

Persamaan (2.4.2) disebut dengan norm Euclidean.

Teorema 2.4.13 [3]*Jika* $\vec{u}$ *dan* $\vec{v}$ *adalah vektor – vektor pada* $\mathbb{R}^n$*dan k adalah suatu skalar sebarang, maka*

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$
2. $\|\vec{u}\| = 0$ *jika dan hanya jika*$\vec{u} = \vec{0}$
3. $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *(Ketidaksamaan Segitiga).*

2.5 Transformasi Linier dari $\mathbb{R}^n$ **ke** $\mathbb{R}^m$

Jika domain dari suatu fungsi f adalah $\mathbb{R}^n$ dan kodomainnya adalah $\mathbb{R}^m$, maka $f$disebut sebagai transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ dan dinyatakan bahwa fungsi f memetakan $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ yang dinotasikan dengan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Jika $m = n$, transformasi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ disebut operator pada $\mathbb{R}^n$. Untuk mengilustrasikan suatu transformasi dapat terjadi, misalkan $f_1, f_2, \dots, f_m$ adalah fungsi – fungsi bernilai riil dari *n* variabel riil, dan

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

Sejumlah m persamaan ini menunjuk suatu titik tertentu $w_1, w_2, \dots, w_m$ pada $\mathbb{R}^m$ untuk setiap titik $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pada $\mathbb{R}^n$ dan kemudian mendefinisikan transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$. Jika transformasi ini dinotasikan dengan *T*, maka $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dan

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1, w_2, \dots, w_m) \quad (2.5.2)$$

Dalam kasus khusus dimana persamaan – persamaan pada (2.5.1) adalah linier, transformasi $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, yang didefinisikan oleh persamaan–persamaan tersebut disebut sebagai suatu transformasi linier (operator linier jika $m = n$). Jadi, suatu transformasi linier $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, didefinisikan oleh persamaan–persamaan yang berbentuk

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \qquad (2.5.3)$$

atau dalam notasi matriks

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.5.4)$$

sistem (2.5.4) ditulis lebih singkat dengan :

$$\vec{w} = A\vec{x}.$$

2.6 Subruang Ortogonal

Dua vektor tak nol tegak lurus (ortogonal) jika dan hanya jika hasil kali titiknya adalah nol.

Definisi 2.6.14 [7] *Dua subruang X dan Y dari* $\mathbb{R}^n$*dikatakan ortogonal jika* $\vec{x}^t\vec{y} = 0$ *untuk setiap* $\vec{x} \in X$*dan* $\vec{y} \in Y$. *Jika X dan Y ortogonal, ditulis X⊥Y.*

Definisi 2.6.15. [7]*Misalkan Y subruang dari* $\mathbb{R}^n$. *Himpunan semua vektor – vektor di* $\mathbb{R}^n$ *yang ortogonal pada setiap vektor di Y akan dinotasikan dengan* $Y^{\perp}$.

Jadi

$$Y^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x}^T\vec{y} = 0 \; untuk \; setiap \; \vec{y} \in Y\}$$

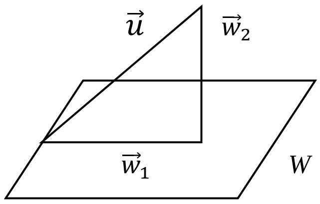
Himpunan $Y^{\perp}$ disebut komplemen ortogonal dari *Y*. .

2.7 Proyeksi Ortogonal

Pada ruang $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ yang memiliki hasil kali dalam Euclidean, secara geometrik dapat dibuktikan bahwa jika *W* adalah sebuah garis (pada ruang $\mathbb{R}^2$) atau bidang (pada ruang $\mathbb{R}^3$) yang melewati titik asal ruang, maka tiap-tiap vektor $\vec{u}$ di dalam ruang dapat dinyatakan sebagai jumlah

$$\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

dimana $\vec{w}_1$ terletak pada *W* dan $\vec{w}_2$ tegak lurus terhadap *W* yang diperlihatkan oleh Gambar 2.7.1



Gambar 2.7.1. Proyeksi Ortogonal $\vec{u}$ pada *W*

Vektor $\vec{w}_1$ pada Gambar 2.7.1 disebut sebagai proyeksi orthogonal $\vec{u}$ pada *W*.

3. Hasil Dan Pembahasan

Diberikan suatu model dengan fungsi $\vec{y}(t) = f(\vec{x}, t)$, dimana $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ merupakan vektor parameter yang akan ditentukan dari pengukuran $(y_i, t_i), i = 1,2, \dots, m, m > n$. Misalkan $f(\vec{x}, t)$ linier dalam $\vec{x}$:

$$f(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \Phi_j(t)$$

dengan $\Phi_j(t)$ merupakan koefisien dari variabel x_j. Kemudian persamaan

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \Phi_j(t_i), i = 1,2, \dots, m \quad (3.1)$$

membentuk sistem linier *overdetermined* $A\vec{x} = \vec{b}$ dimana $a_{ij} = \Phi_j(t_i)$ dan $b_i = y_i$. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

Persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\Phi_1(t_1) + x_2\Phi_2(t_1) + \cdots + x_n\Phi_n(t_1) \\ y_2 &= x_1\Phi_1(t_2) + x_2\Phi_2(t_2) + \cdots + x_n\Phi_n(t_2) \\ &\vdots \\ y_m &= x_1\Phi_1(t_m) + x_2\Phi_2(t_m) + \cdots + x_n\Phi_n(t_m) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(t_1) & \Phi_2(t_1) & \dots & \Phi_n(t_1) \\ \Phi_1(t_2) & \Phi_2(t_2) & \dots & \Phi_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(t_m) & \Phi_2(t_m) & \dots & \Phi_n(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

persamaan(3.2) menjadi

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

atau

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

dengan

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Banyak cara untuk memperoleh solusi dari sistem persamaanlinier $A\vec{x} = \vec{b}$ yang tak konsisten, salah satu caranya yaitu dengan mencari solusi $\vec{x}$ untuk masalah minimisasi

$$\min_{\vec{x}} \left\| A\,\vec{x} - \vec{b} \right\|_2, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$$

yang disebut masalah kuadrat terkecil linier. Himpunan semua solusi kuadrat terkecil memenuhi teorema berikut

Teorema 3.1[1]*Misalkan himpunan semua solusi dari*

$$\min_{\vec{x}} \left\| A\,\vec{x} - \vec{b} \right\|_2, \; A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \; \vec{b} \in \mathbb{R}^m \qquad (3.3)$$

adalah

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \left\| A\,\vec{x} - \vec{b} \right\|_2 = min \right\} \; (3.4)$$

Maka$\vec{x} \in \mathcal{S}$ jika dan hanya jika $\vec{x}$ memenuhi:

$$A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$$

Bukti.

(⇐) Misalkan $\hat{\vec{x}}$ solusi dari persamaan (3.3), untuk sebarang $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dengan vektor residu $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ asumsikan bahwa $\hat{\vec{x}}$ memenuhi $A^T\hat{\vec{r}} = \vec{0}$ dengan $\hat{\vec{r}} = \vec{b} - A\hat{\vec{x}}$. Maka

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \left(\hat{\vec{r}} + A\hat{\vec{x}}\right) - A\vec{x} \\ &= \hat{\vec{r}} + A\hat{\vec{x}} - A\vec{x} \\ &= \hat{\vec{r}} + (A\hat{\vec{x}} - A\vec{x}) \\ &= \hat{\vec{r}} + A\left(\hat{\vec{x}} - \vec{x}\right) \\ &. \equiv \hat{\vec{r}} + Ae \end{aligned}$$

Dengan mengkuadratkan $\vec{r} = \hat{\vec{r}} + Ae$ diperoleh

$\vec{r}^T r = (\hat{\vec{r}} + Ae\,)^{\;T}(\hat{\vec{r}} + Ae\,)$

$= (\hat{\vec{r}}^T + (Ae)^T\,)(\hat{\vec{r}} + Ae\,)$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} + \hat{\vec{r}}(Ae) + \; (Ae)^T\hat{\vec{r}} + (Ae)^T(Ae)$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} + ((Ae)^T\hat{\vec{r}})^T + \; (Ae)^T\hat{\vec{r}} + (Ae)^T(Ae)$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} + (e^TA^T\hat{\vec{r}})^T + \; (e^TA^T)\hat{\vec{r}} + (Ae)^T(Ae)$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} + (e^TA^T\hat{\vec{r}})^T + \; e^T(A^T\hat{\vec{r}}) + (Ae)^T(Ae)$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} + (e^T\vec{0})^T + \; e^T\vec{0} + (Ae)^T(Ae)$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} + \|Ae\|_2^2$

yang bernilai minimum ketika $\vec{x} = \hat{\vec{x}}$.

(⇒) Misalkan $\hat{\vec{x}}$ solusi dari persamaan (3.3) dan andaikan $A^T\hat{\vec{r}} = \vec{z} \neq \vec{0}$. Dengan mengambil $\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \epsilon\vec{z}$ untuk suatu scalar ϵ, diperoleh vektor residu

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{b} - A\vec{x} \\ &= \hat{\vec{r}} + A\hat{\vec{x}} - A\left(\hat{\vec{x}} + \epsilon\vec{z}\right) \\ &= \hat{\vec{r}} + A\hat{\vec{x}} - A\hat{\vec{x}} - A\epsilon\vec{z} \\ &= \hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengkuadratkan $\vec{r} = \hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z}$ diperoleh

$\vec{r}^T\vec{r} = (\hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z})^{\;T}(\hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z})$

$= (\hat{\vec{r}}^T - (\epsilon A\vec{z})^T(\hat{\vec{r}} - \epsilon A\vec{z})$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}^T\epsilon A\vec{z} - (\epsilon A\vec{z})^T\hat{\vec{r}} + (\epsilon A\vec{z})^T\epsilon A\vec{z}$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} - \epsilon\hat{\vec{r}}^T A\vec{z} - \epsilon(A\vec{z})^T\hat{\vec{r}} + \epsilon(A\vec{z})^T\epsilon A\vec{z}$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} - \epsilon((A\vec{z})^T\hat{\vec{r}})^T - \epsilon(A\vec{z})^T\hat{\vec{r}} + \epsilon(A\vec{z})^T\epsilon A\vec{z}$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} - \epsilon(\vec{z}^TA^T\hat{\vec{r}})^T - \epsilon\vec{z}^TA^T\hat{\vec{r}} + \epsilon(A\vec{z})^T\epsilon A\vec{z}$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} - \epsilon(\vec{z}^T\vec{z})^T - \epsilon\vec{z}^T\vec{z} + \epsilon(A\vec{z})^T\epsilon A\vec{z}$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} - \epsilon\vec{z}^T\vec{z} - \epsilon\vec{z}^T\vec{z} + \epsilon(A\vec{z})^T\epsilon A\vec{z}$

$= \hat{\vec{r}}^T\hat{\vec{r}} - 2\epsilon\vec{z}^T\vec{z} + \epsilon^2(A\vec{z})^TA\vec{z}$

$< \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}}$

Untuk ϵ yang cukup kecil. Jadi $\vec{r}^T \vec{r} < \hat{\vec{r}}^T \hat{\vec{r}}$, ini tak mungkin karena kontradiksi dengan $\hat{\vec{x}}$ solusi dari persamaan (3.3) yang berarti $\hat{\vec{r}}$ merupakan nilai terkecil. Jadi pengandaian salah, seharusnya $A^T \hat{\vec{r}} = \vec{0}$.□

Akibat3.2[1] S*olusi kuadrat terkecil memenuhi persamaan normal*

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}.$$

BUKTI. Misalkan$\vec{x}$solusi kuadrat terkecil. Dari Teorema 3.1 diperoleh

$$A^T (\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$$

atau

$$A^T \vec{b} - A^T A \vec{x} = \vec{0}$$

atau

$$A^T \vec{b} = A^T A \vec{x}$$

Jadi terbukti bahwa solusi kuadrat terkecil memenuhi persamaan normal.□

Matriks $(A^T A) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ adalah simetris dan semi definit positif. Kesimetrikannya dapat dilihat dari $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, sedangkan semi definit positif merupakan akibat dari teorema berikut:

Teorema3.3[1] M*isalkan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matriks $A^T A$ adalah definit positif jika dan hanya jika kolom–kolom dari A adalah bebas linier, yakni* $rank(A) = n$

BUKTI.

(⇐)Misalkan matriks A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$dengan $\vec{c}_i = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, i = 1,2, \ldots, n$ adalah kolom–kolom dari A yang bebas linier. Jika$\vec{x} \neq \vec{0}$ dengan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka terdapat $x_i \neq 0$. Karena $A\vec{x}$ dapat ditulis $A\vec{x} = x_1 \vec{c}_1 + x_2 \vec{c}_2 + \cdots + x_n \vec{c}_n$, dan $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n$ bebas linier, maka $x_1 \vec{c}_1 + x_2 \vec{c}_2 + \cdots + x_n \vec{c}_n \neq \vec{0}$ dengan perkataan lain $A\vec{x} \neq \vec{0}$. Akibatnya

$$\vec{x}^T (A^T A) \vec{x} = \vec{x}^T A^T A \vec{x} = (A\vec{x})^T (A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|_2^2 > 0$$

Sehingga $A^T A$ adalah definit positif.

(⇒) Misalkan matriks $A =$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$,dimana $\vec{c}_i = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, i = 1,2, \ldots, n$ adalah kolom – kolom yang bergantung linier. Maka untuk suatu $\vec{x}_0 \neq 0, A\vec{x}_0 = \vec{0}$. Akibatnya

$$\vec{x}_0{}^T A^T A \vec{x}_0 = (A\vec{x}_0)^T (A\vec{x}_0) = 0.$$

Dengan perkataan lain $A^T A$ bukan definit positif.□

Dari Teorema 3.3, jika kolom–kolom dari A bebas linier maka $A^T A$ adalah definit positif, sedangkan jika kolom – kolom dari A bergantung linier, maka $\vec{x}^T (A^T A) \vec{x} = 0$. Dapat disimpulkan bila $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$berlaku $\vec{x}^T (A^T A) \vec{x} \geq 0$, dengan perkataan lain

$A^T A$ semi definit positif. Karena $rank(A) = n$, maka berdasarkan Teorema 3.3 dan Teorema 2.3.11 $A^T A$punya invers. Akibatnya

$$A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T A\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

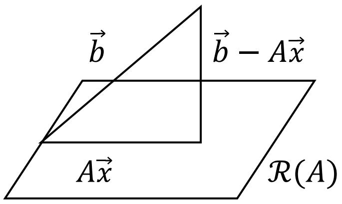
$$((A^T A)^{-1}(A^T A))\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

$$I\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b} \quad (3.5)$$

Jadi, solusi kuadrat terkecil tunggal, dan vektor residu $\vec{r} = \vec{b} - A((A^T A)^{-1} A^T \vec{b})$.

.



Gambar 3.1 Interpretasi Geometri dari Sifat Kuadrat Terkecil

Ruang kolom (*range*) dari matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ didefinisikan dengan

$$\mathcal{R}(A) = \{\vec{z} = A\vec{x} | \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad (3.6)$$

Himpunan solusi untuk $A^T \vec{y} = \vec{0}$ adalah subruang, yang disebut dengan ruang null (*nullspace*) dari A^T dan ditunjukkan oleh

$$\mathcal{N}(A^T) = \left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \middle| A^T \vec{y} = \vec{0}\right\} \quad (3.7)$$

dan merupakan komplemen ortogonal pada $\mathbb{R}^m$untuk ruang kolom $\mathcal{R}(A)$.Berdasarkan Teorema 3.1, vektor residu $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ dari solusi kuadrat terkecil anggota $\mathcal{N}(A^T)$ dan dari Gambar 3.1dapat ditulis

$$\vec{b} = A\vec{x} + \vec{r},\ A\vec{x} \in \mathcal{R}(A), \vec{r} \in \ \mathcal{N}(A^T).$$

Jika $rank(A) < n$ maka A mempunyai ruang null nontrivial dan solusi kuadrat terkecil yang tidak tunggal. Jika $\hat{\vec{x}}$ adalah solusi kuadrat terkecil tertentu maka himpunan dari semua solusi kuadrat terkecil adalah

$$\mathcal{S} = \left\{\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \vec{z} \middle| \vec{z} \in \mathcal{N}(A)\right\}$$

Jika $\hat{\vec{x}} \perp \mathcal{N}(A)$maka $\|\vec{x}\|_2^2 = \left\|\hat{\vec{x}}\right\|_2^2 + \|\vec{z}\|_2^2$, dan oleh karena itu $\hat{\vec{x}}$ adalah solusi kuadrat terkecil tunggal dengan norm minimum.

Contoh. Solusi terbaik untuk sistem persamaan linier

$$-x_1 + x_2 = -2$$

$$0 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 = 8$$

Dari sistem diatas, dengan memisalkan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$dan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Akan dicari $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ yang menyebabkan vektor $A\vec{x} = \vec{b}$ tegak lurus terhadap ruang kolom dari A yaitu

$$\mathcal{R}(A) = span\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$$

Berdasarkan Teorema 3.1 $\vec{x}$ memenuhi

$$A^T\left(A\vec{x} - \vec{b}\right) = \vec{0}$$

atau

$$A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}.$$

Diperoleh

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$$

dan

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 34 \end{bmatrix}$$

sehingga persamaan normalnya adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan normal diatas diperoleh solusi terbaik untuk sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Denganvektor residu:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Kesimpulan Dan Saran

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian diatas, $\vec{x}$adalah solusi kuadrat terkecil yang merupakan solusi dari masalah minimisasi

$$\min_{\vec{x}} \left\| A\,\vec{x} - \vec{b} \right\|_2, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m,$$

dimana $m > n$. Karakteristik solusi kuadrat terkecil yaitu:

1. Memenuhi

$$A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$$

dan memenuhi persamaan normal

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$$

2. Jika matriks $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definit positif $(rank(A) = n)$, maka solusi kuadrat terkecil $\vec{x}$ tunggal yaitu

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

3. Jika $rank(A) < n$, maka himpunan semua solusi kuadrat terkecil adalah

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{x} = \hat{\vec{x}} + \vec{z} \middle| \vec{z} \in \mathcal{N}(A) \right\}$$

Berdasarkan interpretasi geometri dari sifat kuadrat terkecil dapat disimpulkan bahwa $A\vec{x}$ merupakan proyeksi ortogonal dari $\vec{b}$ pada $\mathcal{R}(A)$.

4.2 Saran

Untuk selanjutnya, penulis menyarankan untuk membahas tentang karakteristik solusi kuadrat terkecil pada *underdetermined system.*

5. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih ya Allah untuk kesabaran dan kekuatan yang telah Engkau anugerahkan sehingga penulis dapat menyelesaikan tulisan ini.Untuk semua anggota keluarga yang senantiasa memberikan dukungan dan motivasi sehingga penulis dapat sampai ke titik ini.Terima kasih untuk semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan tulisan ini sampai akhir.

Daftar Pustaka

[1] Å. Björck. 1996. *Numerical Methods for Least Squares Problems.*Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelpia, PA, USA.

[2] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer* Edisi Lima. Terjemahan, Erlangga. Jakarta.

[3] Anton, H dan Rosses, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer* Versi Aplikasi. Terjemahan, Erlangga. Jakarta.

[4] Budhi, Wono Setya dan Irawati. 2005. *Aljabar II*. Universitas Terbuka, Jakarta.

[5] Jacob, B. 1990. *Linier Algebra*. W. H Freeman and Company, New York

[6] Laub, Alan J. 2005. *Matrix Analysis for Scientists and Engineers.*SIAM. USA.

[7] Leon, J Steven. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya* Edisi Lima. Erlangga, Jakarta.