MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id
UIN IMAM BONJOL PADANG

PENERAPAN METODE REDUKSI VARIABEL DALAM PENGOTIMALAN PENDAPATAN MINIMUM HASIL PRODUKSI BINGKAI FOTO

APPLICATION OF VARIABLE REDUCTION METHOD IN OPTIMIZING MINIMUM INCOME FROM PHOTO FRAME PRODUCTION

Elfira Safitri[1§], Sri Basriati[2], Dhea Rizki Octavia[3], Mohammad Soleh[4]
[1]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau [elfira.safitri@uin-suska.ac.id]
[2]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau [sribasriati@uin-suska.ac.id]
[3]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau [dhearizkioktavia24@gmail.com]
[4]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau [msoleh@uin-suska.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

Received 10th Dec 2023; Accepted 12th Jun 2024; Published 14th Jun 2024;

Abstrak

Produksi merupakan kegiatan yang menghasilkan suatu benda sehingga lebih bermanfaat dalam memenuhi kebutuhan. Salah satu toko yang memproduksi bingkai foto dengan berbagai ukuran adalah Terminal Photo Giant. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui pendapatan minimum per hari hasil produksi bingkai foto menggunakan metode reduksi variabel. Adapun Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode reduksi variabel. Metode reduksi variabel menghasilkan solusi optimal dengan semua variabel keputusan berupa bilangan bulat tanpa harus melakukan percabangan atau menambahkan kendala *gomory*. Berdasarkan hasil penelitian menggunakan metode reduksi variabel, maka Terminal Photo Giant setiap harinya memproduksi bingkai foto ukuran 16R minimal 4 unit dan ukuran 18R minimal 3 unit dengan pendapatan minimal perhari sebesar Rp. 570.000.

Kata Kunci : Integer linear programming, Kendala *gomory*, Percabangan, Produksi, Reduksi variabel

Abstract

Production is an activity that produces an object so that it is more useful in meeting needs. One shop that produces photo frame of various sizes is Terminal Photo Giant. The aim of this research is to determine the minimum income per day from photo frame production using the variable reduction method. The method used in this research is the variable reduction method. The variable reduction method produces an optimal solution with all decision variables in the form of integers without having to branch or add gomory constraints. Based on the result of research using the variable reduction method, Giant Photo Terminal produces a minimum of 4 units of 16 R size photo frames and a minimum of 3 units of 18 R size photo frames every day with a minimum daily income of IDR. 570.000.

Keywords: *Branch, Gomory constraints, Integer linear programming, Production, Variable reduction method*

1. Pendahuluan

Linear Programming merupakan teknik penyelesaian optimal terhadap suatu masalah keputusan dengan menentukan fungsi tujuan yaitu memaksimumkan atau meminimumkan dari kendala yang ada dalam model matematis. Suatu permasalahan *Linear Programming* dimana variabel keputusan dan kendala dibatasi dengan bilangan riil, namun sering kali suatu keputasan menginginkan variabel berupa bilangan bulat agar keputusan menjadi realistik yang disebut dengan *Integer Linear Programming* [5].

Integer Linear Programming merupakan suatu model program linier yang khusus digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah dimana nilai variabel-variabel keputusan dalam penyelesaian optimal haruslah merupakan bilangan bilangan bulat. Metode yang umum digunakan dalam penyelesaian *Integer Linear Programming* adalah metode *Branch and Bound* dan metode *Cutting Plane* [2].

Metode *Branch and Bound* merupakan suatu teknik untuk mencari solusi dari persoalan *Integer Linear Progamming* dengan mengenumerasi titik-titik dalam daerah fisibel dari suatu subpersoalan [6]. Apabila solusi belum bilangan bulat maka dilakukan percabangan masalah menjadi dua sub masalah.

Sedangkan metode *Cutting Plane* merupakan metode penyelesaian optimal *Linear Programming* dimana variabel keputusan berupa bilangan bulat dengan penambahan batasan baru yang disebut dengan *gomory* [7].

Karena terdapat beberapa keterbatasan dari metode *Branch and Bound* dan metode *Cutting Plane* maka berkembanglah metode baru yaitu metode reduksi variabel. Metode reduksi variabel adalah metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi untuk bilangan bulat murni [7].

Metode Reduksi Variabel lebih sederhana daripada metode *Branch and Bound* dan *Cutting Plane*, karena tidak perlu menggunakan metode simpleks atau dual simpleks, tidak perlu menambahkan kendala baru dan sub masalah dan perhitungannya lebih sederhana dan mudah [7].

Beberapa penelitian yang berkaitan dengan metode reduksi variabel yaitu penelitian yang dilakukan oleh [4] yang berjudul "*A New Approach for Solving a Class of Pure Integer Linear Programming Problems*", memperkenalkan metode baru untuk masalah program linear bilangan bulat murni yaitu metode reduksi variabel yang memiliki dua variabel dan dua kendala. Dalam penelitian ini menyimpulkan bahwa metode reduksi variabel lebih baik daripada metode *Branch and Bound* dan *Cutting Plane*.

Selanjutnya, penelitian yang dilakukan oleh [3] yang berjudul "*Penyelesaian Masalah Pemrograman Linier Bilangan Bulat Murni dengan Metode Reduksi Variabel"* menyimpulkan bahwa pemograman linier bilangan bulat murni dua variabel pada kasus maksimisasi dengan metode reduksi variabel menghasilkan solusi yang optimal dengan variabel keputusan bilangan bulat murni yang perhitungannya lebih mudah dan sederhana.

Selanjutnya penelitian [7] yang berjudul "Penyelesaian *Integer Linear Programming* menggunakan Reduksi Variabel" menyimpulkan bahwa metode reduksi variabel lebih efisien daripada metode *Cutting Plane* dan *Branch and Bound*, hal ini dilihat dari jumlah iterasi yang dilakukan. Pada penelitian ini menggunakan kasus maksimasi.

Berdasarkan penelitian [7], maka penulis tertarik melakukan penelitian menggunakan metode reduksi variabel dengan kasus minimasi. Adapun tujuan penelitian adalah untuk mengetahui untuk mengetahui solusi optimal dalam menentukan jumlah produksi bingkai foto minimum dan pendapatan minimum perharinya dengan menggunakan Metode Reduksi Variabel.

2. Landasan Teori

Integer Linear Programming

Integer linear programming merupakan bentuk perluasan dari metode *Linear Programming* yang menginginkan solusi yang didapat berupa bilangan bulat bukan bilangan pecahan [6]

Secara umum, model persoalan *Linear Programming* bilangan bulat dapat diformulasikan sebagai berikut [1]:

$$maks/\,min\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$kendala$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq / \geq / = b_i; i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0; j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_j\ int; j = 1,2,\cdots,p(p \leq n) \qquad (1)$$

Metode Reduksi Variabel

Metode reduksi variabel merupakan suatu metode baru yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah *Integer Linear Programming*. Metode ini melibatkan pemindahan suatu variabel keputusan ke sisi lain dari sebuah fungsi kendala [4].

Adapun Langkah-Langkah penyelesaian metode reduksi variabel untuk n variabel kasus minimasi sebagai berikut:

1. Menentukan nilai maksimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_j yang disimbolkan dengan x_j^* dengan rumus berikut:

   $$x_j^* = maks\left\{\left[\frac{b_i}{a_{ij}}\right]\right\}; i = 1,2,\cdots,5;\ j = 1,2,\cdots,5 \qquad (2)$$

   Jika nilai maksimum dari x_j^* memiliki nilai yang sama maka pilih salah satu nilai yang positif dan jika terdapat hasil yang bernilai 0 maka tidak perlu dipilih. $\overline{x_r} \in \{0,1,2,\cdots,U_r\}$, U_r berhubungan dengan x_j^*, dimana U_r adalah nilai bilangan bulat terbesar dari $\overline{x_r}$ yaitu x_j^*.
2. Untuk setiap $\overline{x_r} \in \{0,1,2,\cdots,U_r\}$ yang melibatkan $n-1$ pada variabel x_j dimana $j \neq r$. Sehingga permasalahan *Integer Linear Programming* dengan fungsi tujuan meminimumkan dapat dibentuk menjadi:

   $$min\, z = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} c_j x_j$$

   $$kendala$$

   $$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i - a_r\overline{x_r}, i = 1,2,\cdots,5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,5; j \neq r \; dan \; int \qquad (3)$$

3. Menentukan nilai maksimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_j yang disimbolkan dengan x_j^* dan $j \neq r$ pada masalah $\left(P(\overline{x_r})\right)$, untuk setiap $\overline{x_r} \in \{0,1,2,\cdots,U_r\}$. Kemudian substitusi nilai ke persamaan berikut:

$$x_j^* = \left\{\left[\frac{b_i - a_r\overline{x_r}}{a_{ij}}\right]\right\}; i = 1,2,\cdots,5 dan j = 1,2,\cdots,5 \quad (4)$$

jika nilai maksimum dari x_j^* memiliki nilai yang sama maka pilih salah satu nilai yang positif dan jika terdapat hasil yang bernilai 0 maka tidak perlu dipilih. $\overline{x_t} \in \{0,1,2,\cdots,U_t\}$, U_t berhubungan dengan x_j^* dimana U_t adalah nilai bilangan bulat terbesar dari $\overline{x_t}$ yaitu x_j^*. Nilai U_t berhubungan dengan x_t.

4. Untuk setiap $\overline{x_t} \in \{0,1,2,\cdots,U_t\}$ dengan persoalan *Linear Programming* bilangan bulat murni $\left(P(\overline{x_r},\overline{x_t})\right)$ yang memuat $n-2$ variabel x_j, $j = 1,2,\cdots,n$ dan $j \neq r,t$ Dimana bentuk model menjadi:

$$min\, z = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r,t}}^{n} c_j x_j$$

$$kendala \qquad (5)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r,t}}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i - a_r\overline{x_r} - a_t\overline{x_t}, i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n; j \neq r,t \; dan \; int$$

5. Melakukan Langkah 3 dan Langkah 4 sampai himpunan dari masalah *Linear Programming* bilangan bulat $\left(P(\overline{x_r},\overline{x_t},\cdots,\overline{x_k})\right)$, $\overline{x_k} \in \{0,1,2,\cdots,U_k\}$ yang memuat dua variabel.

6. Menyelesaikan sebuah set dari permasalahan *Integer Linear Programming* yang ada pada Langkah 5 dengan cara:

$$min\, z = \left\{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r,t,\cdots,k}}^{n} c_j x_j ; (\overline{x_r},\overline{x_t},\cdots,\overline{x_k}) \in W\right\} \qquad (6)$$

Dimana

$$W = \{(\overline{x_r},\overline{x_t},\cdots,\overline{x_k}); \overline{x_k} \in \{0,1,2,\cdots,U_k\}\} \; dan \; x_j^* = maks\left\{\frac{b_i - a_k\overline{x_k}}{a_{ij}}\right\}$$

Subtitusi $\overline{x_k} \in \{0,1,2,\cdots,U_k\}$ ke dalam Persamaan berikut:

$$x_j^* = maks\left\{\frac{b_i - a_k\overline{x_k}}{a_{ij}}\right\}; i = 1,2,\cdots,5; j = 1,2,\cdots,5 \qquad (7)$$

7. Menentukan calon solusi optimum z. Solusi optimum untuk kasus minimum diperoleh dengan cara memilih z yang bernilai positif terkecil [7].

3. Hasil Dan Pembahasan

3.1 Gambaran Data

Penelitian ini dilakukan disalah satu studio foto yang memproduksi bingkai foto yaitu Terminal Photo Giant, Pekanbaru. Penelitian ini menggunakan lima bahan utama yang dibutuhkan untuk pembuatan bingkai foto yaitu kayu, mdf, kaca, paku flexi dan paku siku.

Bahan Baku	Ukuran Bingkai Foto			
	16R	18R	20R	20RS
Kayu (cm)	180	200	230	250
Mdf (cm^2)	1000	2000	2600	3000
Kaca(cm^2)	1000	2000	2600	3000
Paku Flexi (pcs)	12	14	16	16
Paku Siku (pcs)	8	10	12	12
Harga Bingkai Foto (Rp)	75.000	90.000	120.000	150.000

Setiap hari pembuatan bingkai foto memerlukan bahan baku, kapasitas dan harga yang dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2 berikut:

Tabel 1. Bahan Baku Pembuatan Bingkai Foto
(Sumber: Terminal Photo Giant, 2020)

Tabel 2. Kapasitas Bahan Baku / Hari

Bahan Baku	Kapasitas Bahan Baku / Hari
Kayu (cm)	950
Mdf (cm^2)	9800
Kaca(cm^2)	9800
Paku Flexi (pcs)	90
Paku Siku (pcs)	50

(Sumber: Terminal Photo Giant, 2020)

3.2 Penyelesaian menggunakan Metode Reduksi Variabel

Berdasarkan Tabel 1 dan Tabel 2 di atas, maka dapat dibentuk model *Integer Linear Programming* sebagai berikut:

$$min\, z = 75000x_1 + 90000x_2 + 120000x_3 + 150000x_4 \quad (8)$$

kendala

$$\begin{aligned} &180x_1 + 200x_2 + 230x_3 + 250x_4 \geq 950;\\ &1000x_1 + 2000x_2 + 2600x_3 + 3000x_4 \geq 9800;\\ &1000x_1 + 2000x_2 + 2600x_3 + 3000x_4 \geq 9800;\\ &12x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 16x_4 \geq 90;\\ &8x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 12x_4 \geq 50;\\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;\\ &x_1, x_2, x_3, x_4\ int. \end{aligned}$$

dengan:

x_1 : Jumlah bingkai foto ukuran 16R yang diproduksi;

x_2 : Jumlah bingkai foto ukuran 18R yang diproduksi;

x_3 : Jumlah bingkai foto ukuran 20R yang diproduksi;

x_4 : Jumlah bingkai foto ukuran 20RS yang diproduksi.

Langkah-Langkah penyelesaian metode reduksi variabel sebagai berikut:

Langkah 1: Menentukan nilai maksimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar x_j yang dinotasikan dengan x_j^* menggunakan Persamaan (8):

a. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_1 adalah:

$$\begin{aligned} x_1^* &= maks\left\{\left[\frac{950}{180}\right], \left[\frac{9800}{1000}\right], \left[\frac{9800}{1000}\right], \left[\frac{90}{12}\right], \left[\frac{50}{8}\right]\right\}\\ &= maks\ \{5,10,10,8,6\}\\ &= 10. \end{aligned}$$

b. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_2^* adalah:

$$\begin{aligned} x_2^* &= maks\left\{20\left[\frac{950}{180}\right], \left[\frac{9800}{2000}\right], \left[\frac{9800}{2000}\right], \left[\frac{90}{14}\right], \left[\frac{50}{10}\right]\right\}\\ &= maks\ \{5,5,5,6,5\}\\ &= 6. \end{aligned}$$

Perhitungan yang sama dilakukan untuk x_3^* dan x_4^*, sehingga diperoleh $x_3^* = 6\ dan\ x_4^* = 6$.

Berdasarkan nilai maksimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang dipilih yaitu $x_1^* = 10, \overline{x_r} = x_1 \in \{0,1,2,\cdots,10\}$.

Langkah 2: Setelah nilai maksimum didapat yaitu nilai $x_1^* = 10$, maka Persamaan (8) dapat diubah menjadi Persamaan (3) di atas. Sehingga diperoleh bentuk model matematis sebagai berikut:

$$min\, z = 75000x_1 + 90000x_2 + 120000x_3 + 150000x_4 \quad (9)$$

kendala

$$\begin{aligned} &200x_2 + 230x_3 + 250x_4 \geq 950 - 180x_1;\\ &2000x_2 + 2600x_3 + 3000x_4 \geq 9800 - 1000x_1;\\ &2000x_2 + 2600x_3 + 3000x_4 \geq 9800 - 1000x_1;\\ &14x_2 + 16x_3 + 16x_4 \geq 90 - 12x_1;\\ &10x_2 + 12x_3 + 12x_4 \geq 50 - 8x_1;\\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;\\ &x_1, x_2, x_3, x_4\ int. \end{aligned}$$

Langkah 3: Menentukan nilai maksimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar x_j yang dinotasikan dengan x_j^*. Subtitusi nilai $\overline{x_r} = x_1 \in \{0,1,2,\cdots,10\}$ dimana $\overline{x_r}$ adalah nilai $x_1^* = 10$ maka dituliskan $\overline{x_r} = x_1^* \in \{0,1,2,\cdots,10\}$ dan substitusi ke Persamaan (4):

a. Nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_2 adalah:

$$x_2^* = maks\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{950-180x_1}{200}\right],\left[\frac{9800-1000x_1}{2000}\right],\\ \left[\frac{9800-1000x_1}{2000}\right],\left[\frac{90-12x_1}{14}\right],\left[\frac{50-8x_1}{10}\right]\end{array}\right\}$$

Jika $x_1^* = 0$, maka:

$$x_2^* = maks\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{950-180(0)}{200}\right],\left[\frac{9800-1000(0)}{2000}\right],\\ \left[\frac{9800-1000(0)}{2000}\right],\left[\frac{90-12(0)}{14}\right],\left[\frac{50-8(0)}{10}\right]\end{array}\right\}$$

$= maks\{5,5,5,6,5\} = 6,$

Perhitungan yang sama dilakukan, maka diperoleh:

Jika $x_1^* = 1$ maka $x_2^* = maks\{4,4,4,6,4\} = 6;$

Jika $x_1^* = 2$ maka $x_2^* = maks\{3,4,4,5,3\} = 5;$

Jika $x_1^* = 3$ maka $x_2^* = maks\{2,3,3,4,3\} = 4;$

$\vdots \qquad \vdots$

Jika $x_1^* = 10$ maka $x_2^* = maks\{-4,0,0,-2,-3\} = 0.$

b. Nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_3 adalah:

$$x_3^* = maks\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{950-180x_1}{230}\right],\left[\frac{9800-1000x_1}{2600}\right],\\ \left[\frac{9800-1000x_1}{2600}\right],\left[\frac{90-12x_1}{16}\right],\left[\frac{50-8x_1}{12}\right]\end{array}\right\}$$

Jika $x_1^* = 0$, maka:

$$x_3^* = maks\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{950-180(0)}{230}\right],\left[\frac{9800-1000(0)}{2600}\right],\\ \left[\frac{9800-1000(0)}{2600}\right],\left[\frac{90-12(0)}{16}\right],\left[\frac{50-8(0)}{12}\right]\end{array}\right\}$$

$= maks\ \{4,4,4,6,4\} = 6.$

Perhitungan yang sama dilakukan, maka diperoleh:

Jika $x_1^* = 1$ maka $x_3^* = maks\{3,3,3,5,3\} = 5;$

Jika $x_1^* = 2$ maka $x_3^* = maks\{3,3,3,4,3\} = 4;$

Jika $x_1^* = 3$ maka $x_3^* = maks\{2,3,3,3,2\} = 3;$

$\vdots \qquad \vdots$

Jika $x_1^* = 10$ maka $x_3^* = maks\{-4,0,0,-2,-2\} = 0.$

c. Nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_4 adalah:

$$x_4^* = maks\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{950-180x_1}{250}\right],\left[\frac{9800-1000x_1}{3000}\right],\\ \left[\frac{9800-1000x_1}{3000}\right],\left[\frac{90-12x_1}{16}\right],\left[\frac{50-8x_1}{12}\right]\end{array}\right\}$$

Jika $x_1^* = 0$, maka:

$$x_4^* = maks\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{950-180(0)}{250}\right],\left[\frac{9800-1000(0)}{3000}\right],\\ \left[\frac{9800-1000(0)}{3000}\right],\left[\frac{90-12(0)}{16}\right],\\ \left[\frac{50-8(0)}{12}\right]\end{array}\right\}$$

$= maks\{4,3,3,6,4\} = 6,$

Perhitungan yang sama dilakukan, maka diperoleh:

Jika $x_1^* = 1$ maka $x_4^* = maks\{3,3,3,5,3\} = 5;$

Jika $x_1^* = 2$ maka $x_4^* = maks\{2,3,3,4,3\} = 4;$

Jika $x_1^* = 3$ maka $x_4^* = maks\{2,2,2,3,2\} = 3;$

$\vdots \qquad \vdots$

Jika $x_1^* = 10$ maka $x_4^* = maks\{-3,0,0,-2,-2\} = 0.$

Berdasarkan perhitungan diperoleh nilai maks $x_2^* = 6, x_3^* = 6, x_4^* = 6.$ Karena memiliki nilai maks yang sama, maka pilih salah satu yaitu $x_2^* = 6.$ Diambil $x_1 \in \{0,1,2,\cdots,10\}\ dan\ x_2 \in \{0,1,2,\cdots,6\}.$

Langkah 4: Untuk setiap $\overline{x_r} \in \{0,1,2,\cdots,U_r\}$ dan $\overline{x_t} \in \{0,1,2,\cdots,U_t\}$ yang dimana $\overline{x_r}$ adalah $x_1^* \in \{0,1,2,\cdots,10\}$ dan $\overline{x_t}$ adalah $x_2^* \in \{0,1,2,\cdots,6\}$, sehingga permasalahan *integer linear programming* dengan fungsi tujuan meminimumkan dapat dibentuk menggunakan Persamaan (5):

$$min\, z = 75000x_1 + 90000x_2 + 120000x_3 + 150000x_4 \qquad (10)$$

kendala

$230x_3 + 250x_4 \geq 950 - 180x_1 - 200x_2;$

$2600x_3 + 3000x_4 \geq 9800 - 1000x_1 - 2000x_2;$

$2600x_3 + 3000x_4 \geq 9800 - 1000x_1 - 2000x_2;$

$16x_3 + 16x_4 \geq 90 - 12x_1 - 14x_2;$

$12x_3 + 12x_4 \geq 50 - 8x_1 - 10x_2;$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$

$x_1, x_2, x_3, x_4\ int.$

a. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_3 adalah

$$x_3^* = maks\left\{\begin{array}{c} \left\lceil\frac{950 - 180x_1 - 200x_2}{230}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{9800 - 1000x_1 - 2000x_2}{2600}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{9800 - 1000x_1 - 2000x_2}{2600}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{90 - 12x_1 - 14x_2}{16}\right\rceil, \left\lceil\frac{50 - 8x_1 - 12x_2}{12}\right\rceil \end{array}\right\}$$

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0,$ maka:

$$x_3^* = maks\left\{\begin{array}{c} \left\lceil\frac{950 - 180(0) - 200(0)}{230}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{9800 - 1000(0) - 2000(0)}{2600}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{9800 - 1000(0) - 2000(0)}{2600}\right\rceil \\ \left\lceil\frac{90 - 12(0) - 14(0)}{16}\right\rceil, \left\lceil\frac{50 - 8(0) - 12(0)}{12}\right\rceil \end{array}\right\}$$

$= maks\{4,4,4,6,4\} = 6,$

Perhitungan yang sama dilakukan, sehingga diperoleh:

Jika $x_1^* = 1, x_2^* = 0,$ maka $x_3^* = maks\{3,3,3,5,3\} = 5;$

Jika $x_1^* = 2, x_2^* = 0,$ maka $x_3^* = maks\{2,3,3,4,3\} = 4;$

Jika $x_1^* = 3, x_2^* = 0,$ maka $x_3^* = maks\{2,3,3,3,2\} = 3;$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$

Jika $x_1^* = 10, x_2^* = 0,$ maka

$x_3^* = maks\{-4,0,0,-2,-2\} = 0.$

a. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_4 adalah

$$x_4^* = maks\left\{\begin{array}{c} \left\lceil\frac{950 - 180x_1 - 200x_2}{250}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{9800 - 1000x_1 - 2000x_2}{3000}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{9800 - 1000x_1 - 2000x_2}{3000}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{90 - 12x_1 - 14x_2}{16}\right\rceil, \left\lceil\frac{50 - 8x_1 - 120}{12}\right\rceil \end{array}\right\}$$

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0,$ maka

$$x_4^* = maks\left\{\begin{array}{c} \left\lceil\frac{950 - 180(0) - 200(0)}{250}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{9800 - 1000(0) - 2000(0)}{3000}\right\rceil, \\ \left\lceil\frac{9800 - 1000(0) - 2000(0)}{3000}\right\rceil \\ \left\lceil\frac{90 - 12(0) - 14(0)}{16}\right\rceil, \left\lceil\frac{50 - 8(0) - 10(0)}{12}\right\rceil \end{array}\right\}$$

$= maks\{4,3,3,6,4\} = 6,$

Perhitungan yang sama dilakukan, sehingga diperoleh:

Jika $x_1^* = 1, x_2^* = 1,$ maka $x_4^* = maks\{2,2,2,4,3\} = 4;$

Jika $x_1^* = 2, x_2^* = 2,$ maka $x_4^* = maks\{1,1,1,2,1\} = 2;$

Jika $x_1^* = 3, x_2^* = 3,$ maka $x_4^* = maks\{-1,0,0,0,0\} = 0;$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$

Jika $x_1^* = 10, x_2^* = 6,$ maka

$x_4^* = maks\{-9,-5,-5,-7,-7\} = -5.$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai maks $x_2 = 6, x_3 = 6, x_4 = 6$. Karena memiliki nilai maksimum yang sama, maka pilih salah satu yaitu $x_3^* = 6$. Sehingga diperoleh $x_1 \in \{0,1,2,3,\cdots,10\}, x_2 \in \{0,1,2,3,\cdots,6\}, x_3 \in \{0,1,2,3,\cdots,6\}$.

Langkah 5: Melakukan Langkah ke-3 dan Langkah ke-4, sehingga terbentuk sebuah set dari permasalahan *Integer Linear Programming* yaitu $\left(P(\overline{x_r}, \overline{x_t}, \overline{x_u}, \overline{x_k})\right) = \left(P(x_1, x_2, x_3, x_4)\right)$ untuk setiap $\overline{x_k} \in \{0,1,2,\cdots,U_z\}$. Dimana $\overline{x_k}$ itu adalah x_4^* yang akan kita cari nilainya. Diketahui $P = \{x_1, x_2, x_3\};\ x_1 \in \{0,1,2,3,\cdots,10\},\ x_2 \in \{0,1,2,3,\cdots,6\}, x_3 \in \{0,1,2,3,\cdots,6\}$ maka

$$x_4^* = \left\{\begin{array}{c} \frac{950 - 180x_1 - 200x_2 - 230x_3}{250}, \\ \frac{9800 - 1000x_1 - 2000x_2 - 2600x_3}{3000}, \\ \frac{9800 - 1000x_1 - 2000x_2 - 2600x_3}{3000}, \\ \frac{90 - 12x_1 - 14x_2 - 16x_3}{16}, \frac{50 - 8x_1 - 10x_2 - 12x_3}{12} \end{array}\right\} \quad (11)$$

Langkah 6: Menyelesaikan sebuah set dari permasalahan *Integer Linear Programming* yang ada pada Persamaan (11).

Substitusi $x_1 \in \{0,1,2,3,\cdots,10\}, x_2 \in \{0,1,2,3,\cdots,6\}, x_3 \in \{0,1,2,3,\cdots,6\}$ ke Persamaan (11), sehingga diperoleh:

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 0$, maka

$$x_4^* = maks\{4,3,3,6,4\} = 6;$$

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 1$, maka

$$x_4^* = maks\{3,2,2,5,3\} = 5;$$

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 2$, maka

$$x_4^* = maks\{2,2,2,4,2\} = 4;$$

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 3$, maka

$$x_4^* = maks\{1,1,1,3,1\} = 3;$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Jika $x_1^* = 10, x_2^* = 6, x_3^* = 6$, maka

$$x_4^* = maks\{-15,-10,-10,-12,-8\} = -8.$$

Berdasarkan perhitungan di atas, maka diperoleh nilai maksimum $x_4^* = 4$. Sehingga diperoleh $\overline{x_k} \in \{0,1,2,3,\cdots,6\}$. Lanjut ke Langkah-7.

Langkah 7: Menentukan calon solusi optimal dari $\{z(P(\overline{x_r}, \overline{x_t}, \overline{x_u}, \overline{x_k}))\}$.

Solusi dikatakan optimal untuk kasus minimum dengan cara memiliki $\{z(P(\overline{x_r}, \overline{x_t}, \overline{x_u}, \overline{x_k}))\}$ yang bernilai positif terkecil.

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 6$, maka

$$z^* = 75.000(0) + 90.000(0) + 120.000(0) + 150.000(6) = 900.000;$$

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 5$, maka

$$z^* = 75.000(0) + 90.000(0) + 120.000(1) + 150.000(5) = 870.000;$$

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 2, x_4^* = 4$, maka

$$z^* = 75.000(0) + 90.000(0) + 120.000(2) + 150.000(4) = 840.000;$$

Jika $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 3, x_4^* = 3$, maka

$$z^* = 75.000(0) + 90.000(0) + 120.000(3) + 150.000(3) = 810.000;$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Jika $x_1^* = 4, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 0$, maka

$$z^* = 75.000(4) + 90.000(3) + 120.000(0) + 150.000(0) = 570.000.$$

Solusi dikatakan optimal untuk kasus minimum adalah dengan cara memilih z^* yang bernilai positif terkecil. Sehingga dipilih $z^* = 570.000$ dengan $x_1^* = 4, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 0$. Artinya Terminal Photo Giant memproduksi bingkai foto ukuran 16R sebanyak 4 unit, bingkai foto ukuran 18R sebanyak 3 unit tetapi tidak memproduksi bingkai foto ukuran 20R dan 20RS dengan pendapatan minimum sebesar 570.000.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian menggunakan metode reduksi variabel diperoleh solusi optimum yaitu $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 0$ dengan $z = 570.000$. Artinya Terminal Photo Giant memperoleh pendapatan minimum per hari sebesar Rp.570.000 dengan memproduksi 4 bingkai foto ukuran 16R dan 3 bingkai foto ukuran 18R tetapi tidak memproduksi bingkai foto ukuran 20R dan 20RS.

Daftar Pustaka

[1] Dimyati T.T, Dimyati A. *Operation Research : Model-Model Pengambilan Keputusan*, CV. Sinar Baru Bandung, Bandung, 2009.

[2] Hayati, Enty Nur. "Aplikasi Algoritma *Branch and Bound* untuk Menyelesaikan *Integer Programming*". *Dinamika Teknik*, vol. 4, no.1, pp. 13-23, 2010.

[3] Novtaria. P dan Bahri. S. "Penyelesaian Masalah Pemograman Linear Bilangan Bulat Murni Dengan Metode Reduksi Variabel". *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 3, no. 3, pp.17-25, 2014.

[4] Pandian. P dan Jayalakshmi. M. "A New Approach for Solving A Class Of Pure Integer Linear Programming Problems". *International Journal Of Advanced Engineering Technology*, vol. III, no. 1, pp: 248-251, 2012.

[5] Safitri. E, Basriati, S dan Najmi. H. "Penerapan Metode *Branch and Bound* dalam Optimalisasi Produk Mebel (Studi Kasus: Toko Mebel di Jalan Marsan Panam)". *KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, vol. 5, no. 1, 2020.

[6] Safitri. E, Basriati, S dan Ulya. W. "Penerapan Metode *Cutting Plane* untuk Optimasi Biaya Pemupukan pada Tanaman Cabai (Studi Kasus: Kelompok Wanita Tani Sentosa Santul)". *Jurnal Sains Matematika dan Statistika,* vol. 6, no. 1, 2020.

[7] Safitri. E, Basriati, S dan Ramadhania C. "Penyelesaian Integer Linear Programming menggunakan Metode Reduksi Variabel (Studi Kasus: Zee Studio Photography)". *Jurnal Sains Matematika dan Statistika,* vol. 6, no. 2, 2020.

[8] Siswanto. *Operation Research,* Penerbit Erlangga, Bogor, 2007.

[9] Taha, H.A. *Operation Research An Introduction* ,Ed. 8. United States : Pearson Education, Inc, 2007.