

PENINGKONSTRUKSIAN m - k -IDEAL DI BG -ALJABAR

Sri Gemawati^{1✉}, Meivy Andhika Beauty², Leli Deswita³, and Elsi Fitria⁴

^{1,2,3,4}Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau,
Pekanbaru, Indonesia

email: sri.gemawati@lecturer.unri.ac.id

Received 16 November 2024, Accepted 30 September 2025, Published 30 September 2025

Abstrak

Suatu himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang memenuhi aksioma-aksioma berikut: $(BG1) x * x = 0$, $(BG2) x * 0 = x$, dan $(BG3) (x * y) * (0 * y) = x$ untuk setiap $x, y, z \in G$ disebut BG -aljabar. Subset tak kosong I dari G dikatakan ideal di G jika memenuhi: (i) $0 \in I$ dan (ii) $x * y \in I$ dan $y \in I$ mengakibatkan $x \in I$ untuk setiap $x, y \in G$. Artikel ini memperkenalkan pengembangan konsep ideal di BG -aljabar yang disebut m - k -ideal. Metode yang digunakan adalah konstruksi matematis melalui pendekatan aksiomatis, dengan mengadaptasi konsep m - k -ideal di BN -aljabar dan kemudian melakukan reduksi serta analisis sifat pada subset tak kosong I dari G tanpa harus memenuhi syarat ideal di G . Dengan pendekatan ini diperoleh beberapa hasil, yaitu karakterisasi sifat-sifat dari m - k -ideal di BG -aljabar, hubungan m - k -ideal dengan subaljabar, normal, dan ideal, serta kondisi perlu dan cukup untuk keberadaannya. Jadi, konsep m - k -ideal memperluas cakupan struktur ideal dalam BG -aljabar dan memberikan dasar untuk kajian lebih lanjut mengenai hubungan antar-substruktur pada BG -aljabar.

Kata Kunci: BG -aljabar; m - k -ideal BG -aljabar; normal; subaljabar.

Abstract

A non-empty set G with a binary operation $*$ and a constant 0 that satisfies the following axioms: $(BG1) x * x = 0$, $(BG2) x * 0 = x$, dan $(BG3) (x * y) * (0 * y) = x$ for all $x, y, z \in G$, is called a BG -algebra. A non-empty subset I of G is said to be an ideal in G if it satisfies: (i) $0 \in I$ and (ii) $x * y \in I$ and $y \in I$ imply $x \in I$ for all $x, y \in G$. This article introduces an extension of the ideal concept in BG -algebra called the m - k -ideal. The method employed is a mathematical construction through an axiomatic approach, by adapting the concept of m - k -ideals in BN -algebras and then performing reduction and property analysis on a nonempty subset I of G without requiring it to be an ideal in G . Using this approach, several results are obtained, namely the characterization of the properties of m - k -ideals in BG -algebras, the relationships of m - k -ideals with subalgebras, normal subsets, and ideals, as well as the necessary and sufficient conditions for their existence. Thus, the concept of m - k -ideals extends the scope of ideal structures in BG -algebras and provides a foundation for further studies on the relationships among substructures in BG -algebras.

Keywords: BG -algebra; m - k -ideal BG -algebra; normal; subalgebra.

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

BG -aljabar [1] adalah salah satu struktur aljabar yang berhubungan dengan teori logika dengan operasi biner tertentu. Konsep ini berkembang dari penggabungan beberapa ide dalam logika matematis dan teori aljabar, khususnya yang berfokus pada studi struktur yang lebih kompleks daripada aljabar klasik. BG -aljabar merupakan perluasan dari konsep B -aljabar. Seiring dengan ditemukannya BG -aljabar, penelitian tentang sifat-sifatnya pun terus berkembang. Diantaranya membahas tentang karakteristik derivasi, *direct product*, fuzzy ideal, bahkan *pseudo* BG -aljabar yang dimuat dalam paper [2], [3], [4], [5].

Konsep BG -aljabar dapat memperluas pemahaman tentang struktur logika dan operasinya dalam konteks yang lebih umum. Hal ini penting dalam berbagai bidang, seperti Logika Matematis: untuk menyederhanakan dan menganalisis berbagai sistem logika yang kompleks, Teori Informasi: untuk memodelkan dan memecahkan masalah dalam pengkodean dan pengolahan informasi, Komputasi: untuk mengembangkan algoritma dan struktur data yang lebih efisien dalam pemrosesan data logis dan numerik. Penelitian dan eksplorasi lebih lanjut dalam BG -aljabar diharapkan dapat membuka pintu bagi penemuan-penemuan baru dalam matematika dan ilmu komputer.

Dalam teori aljabar, ideal adalah subhimpunan dari sebuah aljabar yang memiliki sifat-sifat tertentu sehingga memungkinkan untuk membagi aljabar menjadi kelas-kelas ekuivalen yang lebih mudah dianalisis. Konsep ideal pertama kali diperkenalkan dalam konteks teori ring dan telah terbukti sangat berguna dalam analisis struktur aljabar. Konsep ini sangat berguna dalam analisis struktur aljabar dan dalam memahami bagaimana operasi-operasi dalam aljabar berinteraksi.

Ideal dalam BG -aljabar memiliki peran yang penting dalam memahami struktur internal aljabar tersebut. Konsep ideal dalam BG -aljabar memberi peluang untuk mengidentifikasi subhimpunan khusus dengan sifat-sifatnya, sehingga dapat dipahami lebih dalam tentang bagaimana hubungan antar elemennya dan bagaimana subhimpunan tersebut dapat digunakan untuk membangun teori yang lebih kompleks, seperti analisis sifat-sifat homomorfisma dalam aljabar tersebut. Studi tentang ideal di BG -aljabar juga membuka jalan bagi penerapan konsep-konsep ini dalam bidang lain, seperti teori graf, logika fuzzy, dan aplikasi komputasional lainnya. Pemahaman yang mendalam tentang ideal di BG -aljabar dapat memberikan wawasan baru tentang bagaimana struktur aljabar ini dapat diterapkan dalam konteks praktis yang lebih luas.

Walaupun demikian, pembahasan mendalam tentang kajian ideal atau pun jenis ideal

lainnya di BG -aljabar belum banyak dilakukan oleh para peneliti. Berbeda dengan B -aljabar dan BN -aljabar yang sudah memiliki konsep lengkap tentang idealnya, misalnya pada paper [6], [7], [8], [9]. Terlebih lagi diperkenalkannya jenis-jenis ideal baru yang dikonstruksi dari beberapa jenis ideal pada *incline* [10], yaitu r -ideal, k -ideal, dan m - k -ideal yang lengkap pada BN -aljabar [11], [12].

Berdasarkan uraian di atas, dalam penelitian ini dikonstruksi konsep m - k -ideal pada BG -aljabar. Metode yang digunakan mengacu pada pengkonstruksian konsep m - k -ideal di BN -aljabar, tetapi dengan membentuk suatu subset yang berbeda. Perbedaannya adalah dalam pendefinisian m - k -ideal di BN -aljabar, subset yang dibentuk harus merupakan ideal di BN -aljabar, sedangkan dalam penelitian ini, cukup membentuk suatu subset tak kosong dari BG -aljabar tanpa harus menjadikannya sebagai ideal. Berdasarkan konsep m - k -ideal di BG -aljabar, diperoleh sifat-sifat dari elemennya, serta hubungannya dengan subaljabar, normal, dan ideal di BG -aljabar.

METODOLOGI

Metode yang digunakan adalah konstruksi matematis melalui pendekatan aksiomatis. Langkah-langkah yang ditempuh dalam mengkonstruksi m - k -ideal di BG -aljabar adalah sebagai berikut:

1. **Analisis definisi dasar:** Meninjau kembali definisi ideal pada BG -aljabar serta konsep m - k -ideal pada BN -aljabar sebagai dasar acuan.
2. **Adaptasi konsep:** Mengadaptasi struktur m - k -ideal dari BN -aljabar ke BG -aljabar dengan memodifikasi syarat pembentukan subset I , yaitu cukup berupa subset tak kosong dari G tanpa harus memenuhi syarat ideal.
3. **Formulasi aksiomatis:** Menyusun definisi formal m - k -ideal di BG -aljabar dengan merujuk pada aksioma BG -aljabar ($BG1$) dan ($BG3$)).
4. **Reduksi dan analisis sifat:** Melakukan analisis terhadap elemen-elemen dalam subset I untuk menentukan sifat-sifat yang khas dari m - k -ideal.
5. **Hubungan dengan substruktur lain:** Menyelidiki hubungan antara m - k -ideal dengan subaljabar, normal, dan ideal di BG -aljabar, serta menetapkan kondisi perlu dan cukup bagi keberadaan m - k -ideal.
6. **Penarikan kesimpulan:** Merumuskan hasil berupa karakterisasi m - k -ideal di BG -aljabar dan mempertegas kontribusinya sebagai perluasan dari konsep ideal yang telah ada.

Berikut ini diberikan teori dasar yang diperlukan dalam pengkonstruksian m - k -ideal di BG -aljabar.

Definisi 2.1. [1] Suatu aljabar $(G; *, 0)$ dikatakan BG -aljabar jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(BG1) \quad x * x = 0,$$

$$(BG2) \ x * 0 = x,$$

$$(BG3) \ (x * y) * (0 * y) = x,$$

untuk setiap $x, y \in G$.

Misalkan $(G; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Didefinisikan relasi $\leq$ pada G sebagai $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$ untuk setiap $x, y \in G$.

Teorema 2.2. [1] Jika $(G; *, 0)$ adalah BG -aljabar, maka

- (i) $(x * (0 * x)) * x = x,$
 - (ii) Jika $x * y = z * y$, maka $x = z,$
 - (iii) $0 * (0 * x) = x,$
 - (iv) Jika $x * y = 0$, maka $x = y,$
 - (v) Jika $0 * x = 0 * y$ maka $x = y,$
- untuk setiap $x, y, z \in G$.

Misalkan $(G; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Suatu himpunan tak kosong S disebut **subaljabar** dari G jika memenuhi $a * b \in S$ untuk setiap $a, b \in S$. Suatu himpunan tak kosong N dari G disebut **normal** di G jika memenuhi $(x * a) * (y * b) \in N$ untuk setiap $x * y, a * b \in G$.

Teorema 2.3. [1] Misalkan $(G; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Jika N adalah subset normal dari G , maka N adalah subaljabar.

Definisi 2.4. Suatu aljabar $(B; *, 0)$ dikatakan B -aljabar jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(B1) \ x * x = 0,$$

$$(B2) \ x * 0 = x,$$

$$(B3) \ (x * y) * z = x * (z * (0 * y)),$$

untuk setiap $x, y, z \in B$.

Suatu B -aljabar $(B; *, 0)$ dikatakan B -aljabar 0-komutatif jika memenuhi $x * (0 * y) = y * (0 * x)$ untuk setiap $x, y \in B$.

Teorema 2.5. Jika $(B; *, 0)$ adalah B -aljabar 0-komutatif, maka

- (i) $(0 * x) * (0 * y) = y * x$ untuk setiap $x, y \in B,$
- (ii) $x * (x * y) = y$ untuk setiap $x, y \in B.$

Teorema 2.6. [1] Jika $(G; *, 0)$ adalah B -aljabar, maka $(G; *, 0)$ adalah BG -aljabar.

Definisi 2.7. Suatu himpunan bagian (subset) tak kosong I dari BG -aljabar G disebut ideal di G jika memenuhi

- (i). $0 \in I$, dan

(ii). $b \in I$ dan $a * b \in I$, mengakibatkan $a \in I$, untuk setiap $a, b \in G$.

Definisi 2.8. [11] BN -aljabar adalah suatu himpunan tak kosong P dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma berikut:

$$(BN1) \quad x * x = 0,$$

$$(BN2) \quad x * 0 = x,$$

$$(BN3) \quad (x * y) * z = x * (z * (0 * y)),$$

untuk setiap $x, y, z \in P$.

Teorema 2.9. [11] Misalkan $(P; *, 0)$ adalah BN -aljabar, maka

$$(i) \quad 0 * (0 * x) = x,$$

$$(ii) \quad y * x = (0 * x) * (0 * y),$$

$$(iii) \quad (0 * x) * y = (0 * y) * x,$$

$$(iv) \quad \text{Jika } x * y = 0, \text{ maka } y * x = 0,$$

$$(v) \quad \text{Jika } 0 * x = 0 * y, \text{ maka } x = y,$$

$$(vi) \quad (x * z) * (y * z) = (z * y) * (z * x).$$

untuk setiap $x, y, z \in P$.

Definisi 2.10. [12] Misalkan $(P; *, 0)$ adalah BN -aljabar dan I adalah ideal sejati dari P . I disebut m - k -ideal dari P jika $x \in I$, $0 \neq y \in P$, $x * y \in I$ mengakibatkan $y \in I$ untuk setiap $x, y \in P$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian yang diperoleh adalah definisi m - k -ideal di BG -aljabar dan sifat-sifatnya.

Definisi 3.1. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Suatu subset tak kosong I dari R disebut m - k -ideal dari R jika memenuhi

(i) $0 \in I$, dan

(ii) $x \in I$, $y \neq 0$, dan $x * y \in I$ mengakibatkan $y \in I$, untuk setiap $x, y \in R$.

Contoh 1. Misalkan $R = \{0, a, b, c\}$. Didefinisikan operasi $*$ pada R sebagai berikut:

Tabel 1: Tabel Cayley untuk $(R; *, 0)$

$*$	0	a	b	c
0	0	c	b	a
a	a	0	c	b
b	b	a	0	c
c	c	b	a	0

Dapat ditunjukkan bahwa $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Semua subset tak kosong dari R yang memuat elemen 0 adalah $\{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, c\}, \{0, a, b\}, \{0, a, c\}, \{0, b, c\}$. Dapat ditunjukkan bahwa subset yang merupakan ideal di R hanya $\{0\}$ dan $\{0, b\}$, subset yang merupakan subaljabar di R juga $\{0\}$ dan $\{0, b\}$, dan subset yang merupakan m - k -ideal di R hanya $\{0, b\}$.

Berdasarkan contoh di atas, diperoleh bahwa subset yang merupakan m - k -ideal di BG -aljabar juga merupakan subaljabar. Namun, ada subaljabar yang bukan merupakan m - k -ideal di BG -aljabar, seperti pada Contoh 2 berikut ini.

Contoh 2. Misalkan $Y = \{0, 1, 2\}$. Didefinisikan operasi $*$ pada Y sebagai berikut:

Tabel 2: Tabel Cayley untuk $(Y; *, 0)$

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0
2	2	2

Subset $\{0, 1\}$ dan $\{0, 2\}$ adalah subaljabar di Y . Namun, $\{0, 1\}$ bukan m - k -ideal di Y , karena $1 \in I$ dan $1 * 2 = 1 \in I$, tetapi $2 \notin I$. $\{0, 2\}$ juga bukan m - k -ideal di Y , karena $2 \in I$ dan $2 * 1 = 2 \in I$, tetapi $1 \notin I$.

Berikut ini diberikan sifat-sifat m - k -ideal di BG -aljabar yang diperoleh dari hubungan elemen-elemennya dan keterkaitannya dengan subaljabar, normal, dan ideal di BG -aljabar.

Teorema 3.2. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar dan I adalah m - k -ideal di R . Jika $x \in I$, $x \leq y$, dan $y \neq 0$, maka $y \in I$ untuk setiap $x, y \in R$.

Bukti. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar dan I subset dari R . Misalkan $x \in I$, $x \leq y$, dan $y \neq 0$, artinya $x * y = 0$. Karena I adalah m - k -ideal di R , maka $x * y = 0 \in I$, sehingga $y \in I$.

Teorema 3.3. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Jika I adalah subaljabar dari R dan $0 \leq x$ untuk setiap $x \in I$, maka I adalah m - k -ideal di R .

Bukti. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar dan I adalah subset dari R . Misalkan $x \in I$ dan $0 \leq x$, artinya $0 * x = 0$. Dengan menggunakan Teorema 2.2(iii) dan Aksioma $BG1$ diperoleh $0 * (0 * x) = 0 * 0$, sehingga $x = 0 \in I$. Misalkan $0 \neq y \in R$ dan $x * y \in I$. Karena I subaljabar dari R , maka $x * (x * y) \in I$. Karena $x = 0$ dengan menggunakan Teorema 2.2 (iii) diperoleh $0 * (0 * y) \in I$, sehingga $y \in I$. Jadi, terbukti bahwa I adalah m - k -ideal di R .

Akibat 3.4. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Jika I adalah normal dari R dan $0 \leq x$ untuk setiap $x \in I$, maka I adalah m - k -ideal di R .

Bukti. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Karena I adalah normal dari R , dengan menggunakan Teorema 2.3 diperoleh bahwa I adalah subaljabar dari R . Kemudian, berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh bahwa I adalah m - k -ideal di R .

Contoh 3. Misalkan $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Didefinisikan operasi $*$ pada A sebagai berikut:

Tabel 3: Tabel Cayley untuk $(A; *, 0)$

$*$	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

Dapat ditunjukkan bahwa subset $\{0,3\}$ adalah m - k -ideal, normal, sekaligus subaljabar dari A .

Teorema 3.5. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Jika I adalah m - k -ideal normal di R , maka I adalah subaljabar di R .

Bukti. Misalkan $(R; *, 0)$ adalah BG -aljabar. Karena I adalah m - k -ideal di R , maka $0 \in I$, dan misalkan $x \in I$, $0 \neq y \in R$, dan $x * y \in I$, maka diperoleh $y \in I$. Kemudian, karena I adalah normal dari R , dan dengan menggunakan Aksioma $BG1$ dan $BG2$ diperoleh $(x * y) * (x * 0) \in I$, untuk setiap $x * x = 0 \in I$ dan $y * 0 = y \in I$, sehingga $(x * y) * x \in I$. Oleh karena itu, terbukti bahwa I adalah subaljabar dari R .

Berikut ini diberikan sifat m - k -ideal di B -aljabar 0-komutatif. Berdasarkan Teorema 2.6 diketahui bahwa setiap B -aljabar adalah BG -aljabar. Sedangkan B -aljabar 0-komutatif adalah bentuk khusus dari B -aljabar, artinya setiap B -aljabar 0-komutatif juga merupakan BG -aljabar. Oleh karena itu, sifat-sifat BG -aljabar juga berlaku di B -aljabar 0-komutatif.

Teorema 3.6. Misalkan $(P; *, 0)$ adalah B -aljabar 0-komutatif. Jika I adalah subaljabar dari P , maka I adalah m - k -ideal di P .

Bukti. Misalkan $(P; *, 0)$ adalah B -aljabar 0-komutatif dan I adalah subset dari P . Misalkan $x \in I$, $y \neq 0$, dan $x * y \in I$ untuk setiap $x, y \in P$, karena I adalah subaljabar, dengan menggunakan Teorema 2.5(ii) dan Aksioma $BG1$ diperoleh $x * (x * y) = y \in I$. Oleh karena itu, terbukti bahwa I adalah m - k -ideal di P .

Akibat 3.7. Misalkan $(P; *, 0)$ adalah B -aljabar 0-komutatif. Jika I adalah normal dari P , maka I adalah m - k -ideal di R .

Bukti. Misalkan $(P; *, 0)$ adalah B -aljabar 0-komutatif. Karena I adalah normal dari P , maka dengan menggunakan Teorema 2.3 diperoleh bahwa I adalah subaljabar dari P . Kemudian, berdasarkan Teorema 3.6 diperoleh bahwa I adalah m - k -ideal di P .

SIMPULAN

Dalam artikel ini, konsep m - k -ideal di BG -aljabar didefinisikan. Metode yang digunakan mirip dengan pengkonstruksian konsep m - k -ideal di BN -aljabar, tetapi dengan membentuk subset yang berbeda. Perbedaanannya terletak pada pendefinisian m - k -ideal di BN -aljabar, di mana subset yang dibentuk harus merupakan ideal di BN -aljabar. Sementara itu, dalam penelitian ini, cukup membentuk subset tak kosong dari BG -aljabar tanpa harus menjadi ideal. Berdasarkan konsep m - k -ideal di BG -aljabar, diperoleh sifat-

Pengkonstruksian m - k -Ideal di BG -aljabar

sifat dari elemennya serta hubungannya dengan subaljabar, normal, dan ideal di BG -aljabar. Pada bagian akhir, diperoleh sifat-sifat m - k -ideal di B -aljabar 0-komutatif.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] C. B. Kim and H. S. Kim, "On BG -algebras," *Demonstratio Mathematica*, vol. 41, no. 3, pp. 497–505, 2008.
- [2] Kamaludin, S. Gemawati, and Kartini, "Derivations in BG -algebras," *International Journal of Algebra*, vol. 13, no. 5, pp. 249–257, 2019, doi: 10.12988/ija.2019.9620.
- [3] S. Widiyanto, S. Gemawati, and Kartini, "Direct product in BG -algebras," *International Journal of Algebra*, vol. 13, no. 5, pp. 239–247, 2019, doi: 10.12988/ija.2019.9619.
- [4] M. Balamurugan, N. Alessa, K. Loganathan, and N. Amar Nath, " $(\epsilon, \epsilon \vee q_k)$ -Uni-Intuitionistic Fuzzy Soft h -Ideals in Subtraction BG -Algebras," *Mathematics*, vol. 11, no. 10, May 2023, doi: 10.3390/math11102296.
- [5] S. Adnan Bajalan, R. Raheem Mohammed Amin, and A. K. Bajalan, "Structures of Pseudo- BG Algebra and Sime pseudo- BG -Algebra." [Online]. Available: <http://tjps.tu.edu.iq/index.php/j>
- [6] E. Fitria, S. Gemawati, and Kartini, "Prime ideals in B -algebras," *International Journal of Algebra*, vol. 11, pp. 301–309, 2017, doi: 10.12988/ija.2017.7838.
- [7] G. Dymek and A. Walendziak, "(Fuzzy) Ideals of BN -Algebras," *Scientific World Journal*, vol. 2015, 2015, doi: 10.1155/2015/925040.
- [8] S. Gemawati, E. Fitria, A. Hadi, and M. Musraini, "Complete Ideal and n -Ideal of BN -algebras," *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, vol. 66, pp. 52–59, 2020, doi: 10.14445/22315373/IJMTT-V66I11P503.
- [9] S. Gemawati, M. M, A. Putri, R. Marjulisa, and E. Fitria, "T-IDEAL AND α -IDEAL OF BP-ALGEBRAS," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 18, no. 2, pp. 1129–1134, May 2024, doi: 10.30598/barekengvol18iss2pp1129-1134.
- [10] M. Murali Krishna Rao, " r -Ideals and m - k -ideals in inclines," *Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications*, vol. 40, no. 2, pp. 297–309, Dec. 2020, doi: 10.7151/dmgaa.1340.
- [11] C. B. Kim and H. S. Kim, "On BN -algebras," *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 53, no. 2, pp. 175–184, 2013, doi: 10.5666/KMJ.2013.53.2.175.
- [12] S. Gemawati, M. Musraini, A. Hadi, L. Zakaria, and E. Fitria, "On r -Ideals and m - k -Ideals in BN -Algebras," *Axioms*, vol. 11, no. 6, Jun. 2022, doi: 10.3390/axioms11060268.