



Implementasi Kontrol Optimal pada Model *Predator-Prey* antara Populasi Padi, Tikus, dan Burung Hantu

Cici Ramadani¹, La Ode Sabran^{✉2}, Suci Yefri Fadhillah³, Ezhari Asfa'ani⁴

Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia^{1,2,3,4}

email: ciciramadani171002@gmail.com¹, laodesabran@uinib.ac.id², suciyefri@uinib.ac.id³,
ezhariasfaani@uinib.ac.id⁴

Received 31 Des 2025, Accepted 31 Maret 2026, Published 31 Maret 2026

Abstrak

Padi merupakan komoditas pangan utama di Indonesia yang produksinya menurun akibat serangan hama tikus. Pendekatan ekologis melalui pemanfaatan burung hantu sebagai predator alami menjadi alternatif pengendalian hama tikus yang ramah lingkungan dan dapat meningkatkan produksi padi. Penelitian ini membangun model matematika *predator-prey* tiga populasi dengan padi sebagai *prey*, tikus sebagai predator tingkat I, dan burung hantu sebagai predator tingkat II dengan *Allee Effect*. Kontrol optimal berupa perangkap tikus diterapkan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Hasil analisis model menunjukkan terdapat lima titik ekuilibrium dari model yang dihasilkan, dengan dua titik ekuilibrium dapat stabil lokal pada syarat tertentu. Hasil simulasi numerik memperlihatkan bahwa kontrol efektif menurunkan populasi tikus dan meningkatkan populasi padi.

Kata Kunci: Model *Predator-Prey*; Kontrol Optimal; *Allee Effect*; Padi; Tikus; Burung Hantu.

Abstract

Rice is the primary food commodity in Indonesia, yet its production has declined due to severe rat infestations. An ecological approach using owls as natural predators offers an environmentally friendly pest control strategy that can increase paddy production. This research develops a three-population predator-prey mathematical model involving paddy crop as the prey, rats as first-level predators, and owls as second-level predators with the *Allee effect*. An optimal control variable representing rat trapping is incorporated and analyzed using Pontryagin's Maximum Principle. The model analysis results indicate that there are five equilibrium points, two of which can achieve local stability under specific conditions. Numerical simulation results demonstrate that the control effectively reduces the rat population and increases the paddy population.

Keywords: Predator-Prey Model; Optimal Control; *Allee Effect*; Paddy; Rats; Owls.

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Padi (*Oryza sativa* L) merupakan tanaman budidaya berbentuk rumput berumpun dari famili *Graminae*. Batangnya beruas dan berongga dengan buku pada kedua ujungnya. Daunnya bervariasi dalam susunan dan bentuk, serta memiliki ciri berupa telinga daun dan sisik. Buah padi berupa bulir yang terlindungi oleh lemma dan palea. Padi menjadi komoditas pangan utama di berbagai negara, termasuk Indonesia, Thailand, China, Vietnam, dan India [1]. Padi merupakan komoditas pangan strategis yang berperan sebagai sumber utama karbohidrat bagi sebagian besar penduduk Indonesia [2].

Dalam beberapa tahun terakhir, produksi padi nasional menunjukkan tren penurunan yang dipicu oleh berbagai faktor, seperti berkurangnya kesuburan tanah, perubahan iklim ekstrem, keterbatasan pupuk, serta serangan organisme pengganggu tanaman, salah satunya hama tikus [2], [3]. Tikus dikenal sebagai hama dengan tingkat serangan tinggi pada tanaman padi, mulai dari fase persemaian hingga masa pertumbuhan. Pada fase awal, tikus dapat merusak kecambah sehingga bibit tidak berkembang, sedangkan pada fase pertumbuhan batang muda, tikus memakan bagian tanaman sehingga menghambat perkembangan bahkan menyebabkan kematian tanaman [4]. Dampak kerusakan ini cukup signifikan, tercatat luas serangan tikus pada lahan persawahan mencapai 66.087 ha per tahun dengan 1.852 ha di antaranya mengalami gagal panen [1], .

Tikus memiliki tingkat reproduksi tinggi sehingga populasinya cepat meningkat. Upaya penanggulangan hama tikus dapat dilakukan secara ekologis dengan memanfaatkan burung hantu sebagai predator alami. Burung hantu mampu memangsa 2-5 ekor tikus per hari sehingga efektif menekan populasi tikus dan menurunkan tingkat serangan pada tanaman padi [3]. Burung hantu memiliki kemampuan berburu yang efektif, mulai dari pendengaran tajam, pergerakan yang senyap, hingga kemampuan menangkap mangsa secara langsung [5]. Penerapan metode ini telah memberikan hasil positif pada beberapa daerah, misalnya di Desa Wringinrejo, Kecamatan Gambiran, Kabupaten Banyuwangi, di mana populasi tikus dapat ditekan secara alami karena burung hantu diberi ruang untuk berkembang biak dalam buatan rumah burung yang ditempatkan di area persawahan [3]. Pendekatan biologis seperti ini dinilai lebih ramah lingkungan, berkelanjutan, serta tidak menimbulkan dampak negatif bagi kesehatan manusia dibandingkan penggunaan pestisida kimia [6].

Selain menggunakan predator alami, pengendalian tikus dapat dilakukan melalui pemasangan perangkap. Jenis perangkap yang umum digunakan meliputi: Perangkap bubu merupakan jenis yang paling umum digunakan, berbentuk kotak dengan pintu satu arah sehingga tikus mudah masuk namun tidak dapat keluar kembali. Selain itu, terdapat Trap Barrier System (TBS), yaitu perangkap yang dipasang pada lahan padi yang ditanam lebih awal dan dikelilingi pagar plastik untuk menarik tikus masuk ke perangkap yang tersedia di setiap sisi. Jenis lainnya adalah Line Trap Barrier System (LTBS), berupa pemasangan terpal panjang dengan perangkap pada beberapa titik sepanjang jalur migrasi tikus, sehingga efektif menangkap tikus dari dua arah sekaligus dan membantu menurunkan populasinya di lahan sawah [7]. Metode pemerangkapan tikus ini terbukti efektif sebagai bentuk upaya pengendalian atau kontrol untuk menekan intensitas serangan tikus pada pertanian khususnya tanaman padi [8].

Interaksi ekologis antara padi, tikus, dan burung hantu dapat direpresentasikan dalam bentuk model matematika, salah satunya melalui model predator-prey berbasis Lotka-Volterra [9]. Penelitian serupa telah dilakukan oleh Rizka [10] pada ekosistem tanaman jagung, tikus, dan burung hantu dengan penerapan perangkap tikus dalam model. Berbeda dengan penelitian tersebut, studi ini mengembangkan model predator-prey dengan mempertimbangkan *allee effect* pada populasi burung hantu sebagai komponen penting. Hal ini didasarkan pada kondisi populasi burung hantu yang semakin berkurang dan berpotensi mendekati kepunahan. Selain itu, perangkap tikus dalam model muncul sebagai variabel kontrol dan bukan sebagai parameter yang hanya mengurangi populasi tikus. Dengan memasukkan *allee effect* dan penerapan perangkap tikus sebagai variabel kontrol, diharapkan model dapat memberikan gambaran yang lebih realistis mengenai dinamika populasi burung hantu serta efektivitas predator alami tikus dalam mencegah gagal panen.

Melalui kajian ini, dilakukan formulasi model matematika tiga populasi meliputi padi sebagai prey, tikus sebagai predator sekaligus prey bagi burung hantu, serta burung hantu sebagai predator puncak dengan penerapan kontrol optimal berupa perangkap tikus. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar pertimbangan dalam strategi pengendalian hama tikus berbasis matematika dan ekologi, sekaligus memberikan kontribusi dalam pengembangan metode pengendalian hama yang ramah lingkungan, berkelanjutan, dan mendukung peningkatan produktivitas padi di Indonesia.

METODOLOGI

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah literatur review dan mendalami cara mengkonstruksi model interaksi antara populasi padi, tikus dan burung hantu. Langkah-langkah pelaksanaan penelitian dan kajian teoritisnya dijelaskan sebagai berikut:

Mengonstruksi Model Interaksi Antara Populasi Padi, Tikus, dan Burung Hantu

Model matematika interaksi populasi padi, tikus, dan burung hantu disusun dalam beberapa persamaan diferensial yang saling terkait satu sama lain yang membentuk sistem. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap variabel bebasnya [11]. Persamaan diferensial dibedakan menjadi dua jenis, yaitu persamaan diferensial biasa (ODE) yang memiliki satu variabel bebas, dan persamaan diferensial parsial (PDE) yang memiliki dua atau lebih variabel bebas [12]. Secara umum persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan sebagai $F(z, f(z), f'(z), \dots, f^{(n)}(z)) = 0$.

Suatu sistem persamaan diferensial terdiri dari n persamaan dengan n fungsi tidak diketahui dan saling berkaitan, dengan bentuk umum sistem orde satu dituliskan sebagai

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sistem disebut tak linear apabila f_i bukan fungsi linear terhadap variabel $z_1, z_2, \dots, z_n$ [13]. Adapun bentuk sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan memiliki struktur

$$\frac{dz_i}{dt} = a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{in}z_n + g_i(t),$$

dengan a_{ij} sebagai konstanta dan $g_i(t)$ fungsi yang bergantung pada waktu [14].

Konstruksi model matematika interaksi antara populasi padi, tikus, dan burung hantu dilakukan dengan menggunakan beberapa model dasar yaitu:

1. Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik pertama kali diperkenalkan oleh Piere Francois Verhulst pada tahun 1838. Model ini menggambarkan pertumbuhan populasi dengan mempertimbangkan kepadatan populasi serta daya dukung lingkungan (*carrying capacity*). Pada model ini diasumsikan bahwa lingkungan memiliki kapasitas terbatas sehingga ketika populasi meningkat terlalu tinggi, laju pertumbuhan akan menurun karena adanya tekanan lingkungan. Dengan demikian, pertumbuhan populasi tidak bersifat konstan, melainkan dipengaruhi oleh besar kecilnya populasi yang ada [15]. Berdasarkan asumsi tersebut, model pertumbuhan logistik dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{dz}{dt} = \beta z \left(1 - \frac{z}{K}\right),$$

dengan β sebagai laju pertumbuhan intrinsik dan K sebagai daya dukung lingkungan atau batas maksimum populasi yang dapat ditampung [16].

2. Model Pertumbuhan dengan *Allee Effect*

Allee effect pertama kali diperkenalkan oleh Warder Cyle Allee pada tahun 1931. Konsep ini menjelaskan bahwa laju pertumbuhan populasi akan menurun ketika kepadatannya terlalu rendah, sehingga berpotensi menyebabkan kepunahan [17]. *Allee effect* menunjukkan hubungan positif antara pertumbuhan populasi dan kepadatannya, serta dapat terjadi akibat berkurangnya kemampuan pertahanan dari predator, kesulitan menemukan pasangan, persaingan spesies, penyimpangan genetik, maupun keterbatasan pakan [15]. Model matematis *Allee effect* dinyatakan sebagai:

$$\frac{dz}{dt} = \beta z \left(\frac{z}{A} - 1\right),$$

dengan β sebagai laju pertumbuhan dan A sebagai batas minimum kepadatan populasi [16].

3. Model Predator Prey

Model Predator-Prey dikembangkan oleh Lotka (1925) dan Volterra (1926), sehingga dikenal sebagai Model Lotka-Volterra. Model ini menggambarkan interaksi antara populasi mangsa (z_1) dan predator (z_2) yang berubah terhadap waktu. Model dibangun berdasarkan tiga asumsi utama, yaitu: (1) mangsa tumbuh eksponensial tanpa predator, (2) predator bergantung pada mangsa untuk bertahan hidup, dan (3) laju pemangsaan bergantung pada interaksi antara predator dan mangsa. Formulasi matematis model Lotka-Volterra adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \alpha z_1 - \beta z_1 z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= \delta z_1 z_2 - \gamma z_2\end{aligned}$$

dengan α sebagai laju pertumbuhan mangsa, γ laju kematian predator, serta β dan δ sebagai parameter interaksi antar populasi [9].

Menentukan Titik Ekuilibrium Model dan Analisis Kestabilannya

Titik ekuilibrium merupakan keadaan ketika suatu sistem persamaan diferensial tidak mengalami perubahan terhadap waktu, yaitu ketika $f(\bar{z}) = 0$ [18]. Kestabilan titik ekuilibrium dinilai berdasarkan respon solusi sistem terhadap gangguan kecil di sekitar titik tersebut. Sebuah titik ekuilibrium dikatakan stabil jika setiap solusi yang dimulai cukup dekat dengannya tetap berada di sekitar titik tersebut untuk $t \geq 0$, dan stabil asimtotik apabila selain stabil juga memenuhi $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - \bar{z}\| = 0$. Jika kondisi tersebut tidak terpenuhi, titik ekuilibrium disebut tidak stabil [19].

Analisis kestabilan sistem linear umumnya ditentukan melalui nilai eigen matriks koefisien, dimana λ merupakan nilai eigen jika memenuhi persamaan karakteristik [20]:

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Untuk sistem non-linear, analisis dilakukan dengan pendekatan linearisasi di sekitar titik ekuilibrium melalui ekspansi deret Taylor dan pembentukan matriks Jacobian. Dengan linearisasi tersebut, kestabilan dapat ditentukan dari bagian real nilai-nilai eigen matriks Jacobian. Jika semua bagian real bernilai negatif maka titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal, sedangkan jika terdapat nilai eigen dengan bagian real positif maka titik tersebut dikategorikan tidak stabil [2], [18].

Formula Vieta

Pada penelitian ini, formula vieta digunakan untuk menentukan tanda dari koefisien polinomial nilai eigen dari matriks Jacobian hasil linearisasi sistem persamaan diferensial. Formula Vieta diperoleh dari Teorema Vieta yang menyatakan bahwa untuk persamaan polinomial $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$, ($a_n \neq 0$) dengan akar-akar $r_1, r_2, \dots, r_n$, berlaku hubungan umum [21]:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \dots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + r_2 r_4 + \dots + r_2 r_n + \dots + r_{n-1} r_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ r_1 r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Sebagai contoh untuk polinomial orde dua: $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$, dengan akar r_1 dan r_2 , Vieta memberikan hubungan:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{a_1}{a_2}, \\ r_1 r_2 &= \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan metode matematika untuk menentukan keputusan terbaik dalam sistem dinamik, khususnya pada kasus biologis. Tujuannya adalah mengendalikan sistem agar memenuhi target tertentu melalui proses memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan [22].

1. Variabel State dan Kontrol

Suatu sistem dinamik dengan variabel kontrol umumnya dinyatakan dalam bentuk persamaan $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$, di mana $x(t)$ adalah variabel state dan $u(t)$ adalah variabel

kontrol yang kontinu dengan batas $0 \leq u(t) \leq 1$. Perubahan nilai kontrol akan memengaruhi solusi state dalam sistem.

2. Fungsi Tujuan

Kontrol yang optimal dicapai dengan menentukan kontrol $u(t)$ yang memaksimalkan/meminimalkan fungsi objektif

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt$$

dengan ketentuan $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = x_1$. Fungsi tujuan dievaluasi selama interval waktu kontrol diberikan.

3. Prinsip Maksimum Pontryagin

Masalah kontrol optimal diselesaikan menggunakan Hamiltonian:

$$H = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$$

dengan $\lambda(t)$ sebagai variabel adjoint. Suatu kontrol u^* dikatakan optimal jika terdapat λ^* yang memenuhi sistem kanonik:

$$x^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

$$\lambda^* = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

memenuhi kondisi batas serta membuat nilai Hamiltonian maksimum.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Asumsi, Variabel dan Parameter

Model matematika dibangun berdasarkan interaksi tiga populasi yaitu padi (P) sebagai prey utama, tikus (T) sebagai predator pertama, dan burung hantu (B) sebagai predator tingkat kedua. Padi mengalami pertumbuhan logistik dengan daya dukung lingkungan, sedangkan tikus bergantung pada ketersediaan padi untuk kelangsungan hidupnya. Burung hantu sebagai predator puncak hanya memakan tikus dan mengalami *Allee Effect*, yakni penurunan pertumbuhan populasi pada saat kepadatan rendah.

Tabel 1. Variabel dan Parameter

Simbol	Keterangan	Satuan
$P(t)$	Populasi padi pada waktu t	Rumpun
$T(t)$	Populasi tikus pada waktu t	Ekor
$B(t)$	Populasi burung hantu pada waktu t	Ekor
α	Laju pertumbuhan padi	1/waktu
K	Daya dukung lingkungan untuk padi	Rumpun
β, γ	Laju predasi padi oleh tikus & predasi tikus oleh burung hantu	1/waktu
δ, σ	Laju pertumbuhan tikus & burung hantu akibat konsumsi	1/waktu
μ, θ	Laju kematian alami tikus & burung hantu	1/waktu
A	Batas minimal burung hantu untuk bertambah (<i>allee effect</i>)	Ekor

Asumsi dasar model:

1. Padi tumbuh secara logistik dan tidak mengalami kematian alami.
2. Tikus hanya memperoleh energi dari padi dan mengalami kematian alami.
3. Burung hantu hanya memakan tikus dan mengalami kematian alami.
4. Burung hantu mengalami *Allee Effect* sehingga pertumbuhannya akan negatif jika $B < A$.
5. Tidak ada migrasi antar wilayah.

Model Matematika

Berdasarkan interaksi antar populasi dan asumsi ekologis di atas, diperoleh sistem persamaan dinamika populasi

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \alpha P \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \beta PT, \\ \frac{dT}{dt} &= \delta PT - \gamma BT - \mu T, \\ \frac{dB}{dt} &= \sigma BT \left(\frac{B}{A} - 1\right) - \theta B.\end{aligned}\tag{1}$$

Persamaan pertama menyatakan pertumbuhan logistik padi yang berkurang akibat konsumsi tikus. Persamaan kedua menyatakan pertumbuhan tikus sebagai fungsi konsumsi padi, yang menurun akibat predasi burung hantu serta kematian alami. Persamaan ketiga menunjukkan dinamika burung hantu yang hanya meningkat melalui predasi tikus dan bergantung pada *Allee Effect*. Ketika $B < A$, pertumbuhan burung hantu bernilai negatif sehingga populasi berpotensi punah.

Titik Ekuilibrium Model

Dari Sistem (1) diperoleh lima titik ekuilibrium berikut:

1. Titik Ekuilibrium Pertama

Titik ekuilibrium pertama dari Sistem Persamaan (1) adalah $E_1(P, T, B) = (0, 0, 0)$. Ini berarti semua populasi punah. Secara ekologis, tidak ada spesies yang bertahan hidup.

2. Titik Ekuilibrium Kedua

Titik ekuilibrium kedua adalah $E_2(P, T, B) = (K, 0, 0)$. Titik ekuilibrium E_2 menandakan padi yang eksis hingga sesuai daya dukung lingkungan, sedangkan tikus dan burung hantu punah. Predator tidak cukup untuk mempertahankan populasi.

3. Titik Ekuilibrium Ketiga

Titik ekuilibrium ketiga adalah $E_3(P, T, B) = \left(\frac{\mu}{\delta}, \frac{\alpha(K\delta - \mu)}{K\beta\delta}, 0\right)$. Titik ekuilibrium E_3 menunjukkan populasi padi dan tikus eksis dengan syarat $K\delta > \mu$, sedangkan burung hantu punah. Kepunahan burung hantu dapat disebabkan karena laju kematian burung hantu yang lebih tinggi dari pada laju kematiannya. Kondisi lain yang menyebabkan kepunahan burung hantu adalah jumlah populasi burung hantu yang berada di bawah nilai *Allee Effect*.

4. Titik Ekuilibrium Keempat dan Kelima

Titik ekuilibrium yang keempat dan kelima dari sistem persamaan (1) diberikan oleh

$$E_4(P, T, B) = \left(\frac{\left(\frac{-\alpha\mu\sigma + x_1 + \sqrt{x_2 - x_3}}{2\gamma\alpha\sigma} \right)^{\gamma+\mu}}{\delta}, \frac{\mu A}{\sigma \left(-\frac{x_1 - \alpha\mu\sigma + \sqrt{x_2 - x_3}}{2\gamma\alpha\sigma} + A \right)}, \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - \alpha\mu\sigma + \sqrt{x_2 - x_3}}{\gamma\alpha\sigma} \right) \right) \quad \text{dan}$$

$$E_5(P, T, B) = \left(\frac{\left(\frac{x_1 - \alpha\mu\sigma - \sqrt{x_2 - x_3}}{2\gamma\alpha\sigma} \right)^{\gamma+\mu}}{\delta}, \frac{\mu A}{\sigma \left(\frac{x_1 - \alpha\mu\sigma - \sqrt{x_2 - x_3}}{2\gamma\alpha\sigma} - A \right)}, \frac{x_1 - \alpha\mu\sigma - \sqrt{x_2 - x_3}}{2\gamma\alpha\sigma} \right), \text{ dengan}$$

$$x_1 = A\gamma\sigma + K\alpha\delta\sigma$$

$$x_2 = A^2\alpha^2\gamma^2\sigma^2 + K^2\alpha^2\delta^2\sigma^2 + 2A\alpha^2\gamma\mu\sigma^2 + \alpha^2\mu^2\sigma^2$$

$$x_3 = 2AK\alpha^2\delta\gamma^2 + 4AK\alpha\beta\delta\gamma\theta\sigma + 2K\alpha^2\delta\mu\sigma^2.$$

Titik ekuilibrium E_4 menunjukkan bahwa ketiga populasi yaitu padi, tikus, dan burung

hantu semuanya hidup eksis. Kondisi ini tercapai jika syarat $A > \frac{x_1 - \alpha\mu\sigma + \sqrt{x_2 - x_3}}{2\gamma\alpha\sigma}$, $x_1 >$

$\alpha\mu\sigma$, dan $x_2 > x_3$ terpenuhi. Demikian pula, titik ekuilibrium E_5 merupakan titik

ekuilibrium koeksistensi alternatif yang eksis jika syarat $x_2 > x_3$, $\frac{x_1 - \alpha\mu\sigma - \sqrt{x_2 - x_3}}{2\gamma\alpha\sigma} > A$, dan

$x_1 - \alpha\mu\sigma - \sqrt{x_2 - x_3} > 0$ terpenuhi.

Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan setiap titik ekuilibrium ditentukan melalui matriks Jacobian yang diperoleh dari hasil linearisasi Sistem (1). Adapun matriks Jacobian Sistem (1) adalah

$$J_{(P,T,B)} = \begin{bmatrix} \alpha \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \frac{\alpha P}{K} - \beta T & -\beta P & 0 \\ \delta T & \delta P - \gamma B - \mu & -\gamma T \\ 0 & \sigma B \left(\frac{B}{A} - 1 \right) & \sigma T \left(\frac{B}{A} - 1 \right) + \frac{\sigma B T}{A} - \theta \end{bmatrix}. \quad (2)$$

1. Kestabilan Titik Ekuilibrium E_1

Kestabilan titik ekuilibrium E_1 diketahui melalui evaluasi nilai eigen dari matriks Jacobian (2) di sekitar titik ekuilibrium E_1 . Matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium E_1 adalah

$$J_{(E_1)} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobian tersebut menghasilkan tiga nilai eigen yaitu $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\mu$, dan $\lambda_3 = -\theta$. Karena terdapat satu nilai eigen positif ($\alpha > 0$), maka titik ini tidak stabil (unstable saddle). Secara biologis, sistem tidak akan berhenti pada kondisi semua populasi nol.

2. Kestabilan Titik Ekuilibrium E_2

Kestabilan titik ekuilibrium E_2 diketahui melalui evaluasi nilai eigen dari matriks Jacobian (2) di sekitar titik ekuilibrium E_2 . Matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium E_2 diberikan oleh

$$J_{(E_2)} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta K & 0 \\ 0 & \delta K - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobian $J_{(E_2)}$ memiliki tiga nilai eigen yaitu $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = \delta K - \mu$, dan $\lambda_3 = -\theta$. Titik ini stabil apabila $\delta K < \mu$, artinya tikus tidak berkembang lebih cepat daripada kematiannya. Jika $\delta K > \mu$, maka tikus dapat muncul dan ekuilibrium bergeser ke E_3 .

3. Kestabilan Titik Ekuilibrium E_3

Titik ini stabil jika nilai *Allee Effect* dan kematian burung hantu lebih besar dibanding energi yang didapat dari predasi tikus. Matriks Jacobian E_3 adalah

$$J_{(E_3)} = \begin{bmatrix} \alpha \left(1 - \frac{\mu}{K\delta}\right) - \frac{\alpha\mu}{K\delta} - \frac{\alpha(K\delta - \mu)}{K\delta} & -\frac{\beta\mu}{\delta} & 0 \\ \frac{\alpha(K\delta - \mu)}{K\beta} & 0 & -\frac{\alpha(K\delta - \mu)\gamma}{K\beta\delta} \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma\alpha(K\delta - \mu)}{K\beta\delta} - \theta \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobian $J_{(E_3)}$ memiliki tiga nilai eigen yaitu $\lambda_1 = \frac{-(K\delta\sigma\alpha + K\beta\delta\theta) + \mu\sigma\alpha}{K\beta\delta}$ yang bernilai negatif jika $K\delta\sigma\alpha + K\beta\delta\theta > \mu\sigma\alpha$, dan λ_2 serta λ_3 yang ditentukan berdasarkan polinomial

$$K\delta\lambda^2 + \lambda\alpha\mu - K\delta\alpha\mu + \alpha\mu^2 = 0. \quad (3)$$

Berdasarkan Formula Vieta, polinomial pada Persamaan (3) akan menghasilkan akar-akar yang negatif ($\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$) jika $K\delta > \mu$. Dengan demikian, titik ekuilibrium E_3 stabil asimtotik local jika terpenuhi kondisi $K\delta\sigma\alpha + K\beta\delta\theta > \mu\sigma\alpha$ dan $K\delta > \mu$.

4. Kestabilan Titik Ekuilibrium E_4 dan E_5

Kestabilan titik ekuilibrium E_4 dan E_5 dari Sistem Persamaan (1) dapat diperoleh dengan mensubstitusikan titik-titik ekuilibrium tersebut ke matriks Jacobian $J_{(P,T,B)}$. Selanjutnya, untuk nilai eigen matriks Jacobian titik ekuilibrium E_4 dan E_5 ditentukan secara numerik. Diberikan nilai-nilai parameter yang memenuhi syarat eksistensi titik ekuilibrium E_4 dan E_5 sebagai berikut.

Tabel 2. Daftar Nilai Parameter Titik Ekuilibrium E_4 dan E_5

Parameter	α	β	δ	γ	μ	K	A	σ	θ
Nilai	1.2	0.5	0.6	0.8	0.4	10	2	0.9	0.3

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada **Tabel 2.** diperoleh nilai eigen untuk titik ekuilibrium E_4 adalah $\lambda_1 = -0.910606$, $\lambda_2 = 0.217782 - 1.483390i$, dan $\lambda_3 = 0.217782 + 1.483390i$, sedangkan nilai eigen untuk titik ekuilibrium E_5 adalah $\lambda_1 = -1.742303$, $\lambda_2 = -0.502420$, dan $\lambda_3 = 1.475357$. Karena nilai eigen λ_2 pada ekuilibrium E_4 memiliki bagian real yang positif dan nilai eigen $\lambda_3 > 0$ pada ekuilibrium E_5 , maka dapat disimpulkan bahwa kedua titik ekuilibrium tersebut tidak stabil. Hal ini berarti bahwa dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada **Tabel 2**, Sistem (1) tidak menghasilkan koeksistensi populasi.

Simulasi Numerik Sistem Tanpa Kontrol

Simulasi numerik tanpa penerapan kontrol ke dalam Sistem (1) dilakukan dengan menggunakan nilai-nilai parameter yang memenuhi eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium E_2 dan E_3 .

1. Simulasi Numerik pada Kondisi $\delta K < \mu$

Simulasi pada kondisi ini merupakan simulasi dimana titik ekuilibrium E_2 eksis dan stabil. Nilai parameter dan kondisi awal yang digunakan, disajikan dalam Tabel 3. dan Tabel 4. berikut.

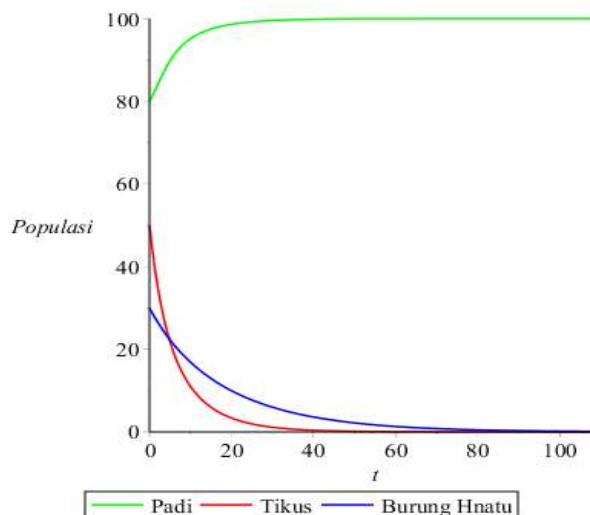
Tabel 3. Nilai Parameter yang Memenuhi Kondisi $\delta K < \mu$

Parameter	α	β	δ	γ	μ	K	A	σ	θ
Nilai	0.6	0.01	0.003	0.004	0.4	100	10	0.003	0.05

Tabel 4. Nilai Kondisi Awal

Populasi	Padi	Tikus	Burung Hantu
Nilai Awal	80	10	6

Dinamika perubahan populasi padi, tikus, dan burung hantu berdasarkan nilai parameter dan kondisi awal pada **Tabel 3** dan **Tabel 4** disajikan pada grafik berikut.



Gambar 1. Dinamika Perubahan Populasi pada Kondisi $\delta K < \mu$

Berdasarkan dinamika perubahan populasi yang ditunjukkan pada Gambar 1, tampak bahwa populasi padi eksis dan stabil selamanya sampai pada jumlah yang sesuai daya dukung lingkungan yaitu $K = 100$. Sebaliknya, seiring berjalannya waktu populasi tikus dan burung hantu punah atau hilang dari ekosistem. Hal ini berarti bahwa titik ekuilibrium yang eksis dan stabil adalah titik ekuilibrium E_2 yang menandakan predator tidak cukup kuat untuk mempertahankan diri dan hidup di ekosistem.

2. Simulasi Numerik pada Kondisi $K\delta > \mu$ dan $K\delta\sigma\alpha + K\beta\delta\theta > \mu\sigma\alpha$

Simulasi pada kondisi ini merupakan simulasi dimana titik ekuilibrium E_3 eksis dan stabil. Nilai parameter dan kondisi awal yang digunakan, disajikan dalam Tabel 5. dan Tabel 6. berikut.

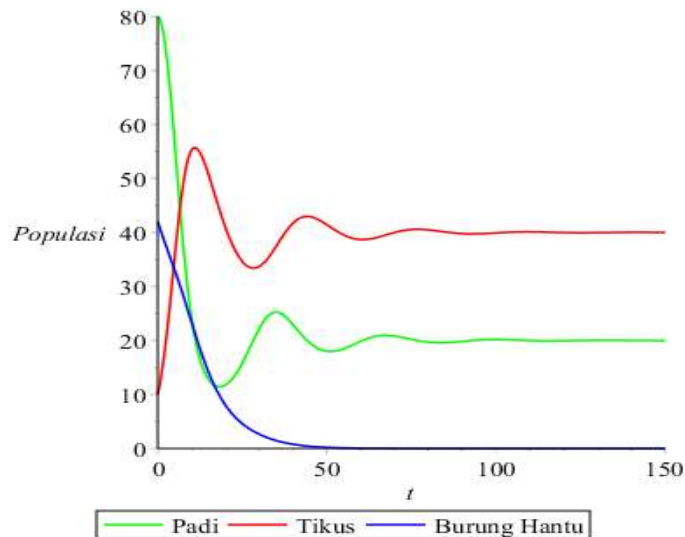
Tabel 5. Nilai Parameter pada Kondisi $K\delta > \mu$ dan $K\delta\sigma\alpha + K\beta\delta\theta > \mu\sigma\alpha$

Parameter	α	β	δ	γ	μ	K	A	σ	θ
Nilai	0.5	0.01	0.005	0.001	0.1	100	5	0.002	0.05

Tabel 6. Nilai Kondisi Awal

Populasi	Padi	Tikus	Burung Hantu
Nilai Awal	80	10	6

Simulasi numerik perubahan populasi padi, tikus, dan burung hantu berdasarkan nilai parameter dan kondisi awal pada **Tabel 5.** dan **Tabel 6.** disajikan pada grafik berikut.

**Gambar 2.** Dinamika Populasi di Kondisi $K\delta > \mu$ dan $K\delta\sigma\alpha + K\beta\delta\theta > \mu\sigma\alpha$

Berdasarkan simulasi numerik dinamika populasi yang ditunjukkan pada **Gambar 2**, tampak bahwa populasi tikus eksis serta stabil pada jumlah 40 ekor dan populasi padi stabil pada jumlah 20 rumpun setelah 100 hari. Hal ini berarti bahwa keberadaan populasi tikus menghambat pertumbuhan populasi padi. Selanjutnya, seiring berjalannya waktu populasi burung hantu berkurang hingga punah setelah 50 hari. Kondisi ini terjadi karena laju pertumbuhan populasi burung hantu lebih kecil dari laju kematiannya. Konsumsi tikus oleh burung hantu tidak cukup untuk menghasilkan energi yang dapat meningkatkan laju pertumbuhan burung hantu. Simulasi ini sejalan dengan kondisi titik ekuilibrium E_3 yang eksis dan stabil.

Implementasi Kontrol Optimal pada Sistem

Hasil simulasi numerik Gambar 2. menunjukkan bahwa populasi padi hanya tumbuh sampai pada jumlah 20 rumpun, yang jauh berbeda dengan simulasi pada Gambar 1., dimana padi tumbuh sampai 100 rumpun. Kondisi ini terjadi karena adanya pemangsaan yang dilakukan oleh tikus terhadap padi. Implementasi kontrol optimal pada Sistem Persamaan (1) dilakukan dengan menerapkan kontrol berupa perangkap tikus, yang tujuannya adalah untuk menekan jumlah populasi tikus sebagai predator padi serta meminimalkan biaya penerapan kontrol. Implementasi ini dilakukan menggunakan data-data numerik pada Tabel 5. dan Tabel 6. yang sesuai dengan simulasi pada Gambar 2.

Kontrol dimasukkan ke dalam model dalam bentuk variabel $u(t)$, sehingga sistem diferensial menjadi:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \beta PT,$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \delta PT - \gamma BT - \mu T - uT, \\ \frac{dB}{dt} &= \sigma BT \left(\frac{B}{A} - 1 \right) - \theta B.\end{aligned}$$

Fungsi objektif disusun untuk meminimalkan populasi tikus sekaligus menekan biaya pemasangan perangkap, yaitu:

$$J = \min \int_{t_0}^{t_f} (C_1 T + \frac{1}{2} C_2 u^2) dt,$$

dengan C_1 sebagai bobot kerugian akibat tikus dan C_2 sebagai bobot biaya kontrol. Variabel kontrol dibatasi $0 \leq u(t) \leq 1$, yang merepresentasikan tingkat efektivitas perangkap mulai dari tidak bekerja hingga sangat optimal.

Untuk menentukan kontrol terbaik digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin melalui pembentukan Fungsi Hamiltonian yaitu

$$\begin{aligned}H(x, u, t) &= C_1 T + \frac{1}{2} C_2 u^2 + \lambda_1 \left(\alpha P \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \beta PT \right) + \lambda_2 (\delta PT - \gamma BT - \mu T - uT) \\ &+ \lambda_3 \left(\sigma BT \left(\frac{B}{A} - 1 \right) - \theta B \right).\end{aligned}$$

Dari syarat optimalitas $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, diperoleh bentuk kontrol yang optimal adalah:

$$u^*(t) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\lambda_2 T}{C_2} \right), 1 \right\},$$

dengan λ_i merupakan variabel adjoint (co-state) yang dibentuk dari

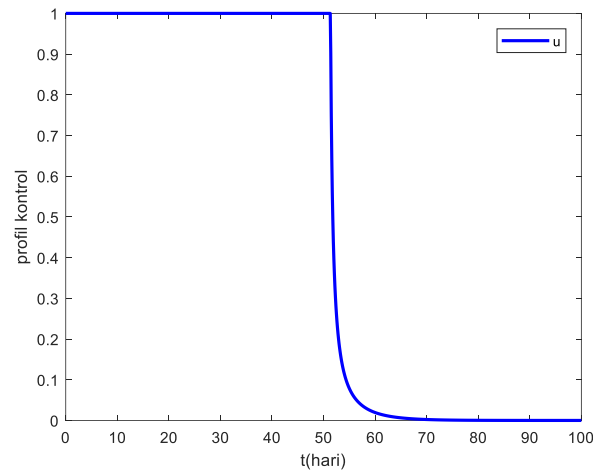
$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial P} = -\lambda_1 \left(\alpha - \frac{2\alpha}{K} P - \beta T \right) - \lambda_2 \delta T, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial T} = -C_1 + \lambda_1 \beta P - \lambda_2 (\delta P + \gamma B + \mu + u) - \lambda_3 \sigma B \left(\frac{B}{A} - 1 \right), \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial B} = \lambda_2 \gamma T - \lambda_3 \left(\frac{2\sigma T}{A} B - \sigma T - \theta \right).\end{aligned}$$

Hasil formulasi ini memberikan dasar analitis untuk menentukan strategi kendali tikus yang paling efisien melalui penyesuaian intensitas pemasangan perangkap terhadap perubahan populasi dalam sistem.

Simulasi Numerik dengan Penerapan Kontrol Optimal

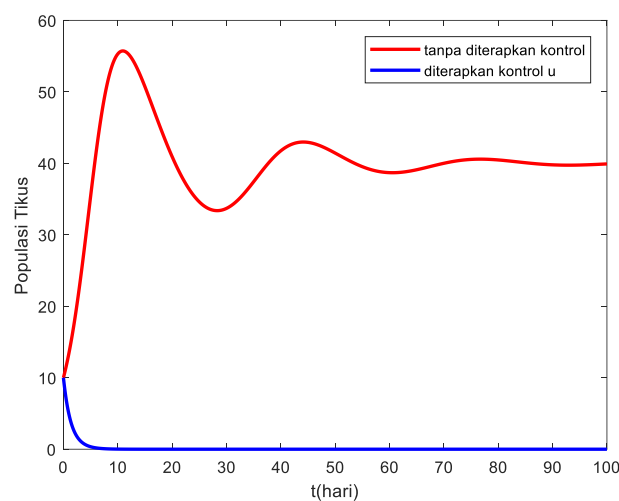
Simulasi model dengan penerapan kontrol optimal dilakukan dengan menggunakan data pada **Tabel 5**. Hal ini bertujuan untuk melihat efektivitas penerapan kontrol dalam menekan populasi tikus dan untuk melihat pertumbuhan populasi padi. Kontrol diberikan dalam bentuk pemasangan perangkap tikus dan dibandingkan dengan kondisi tanpa kontrol. Hasil pengujian menunjukkan bahwa penerapan kontrol memberikan dampak signifikan terhadap dinamika populasi tikus, padi, dan burung hantu.

Pada awal simulasi, kontrol perangkat diberikan dengan intensitas maksimum hingga hari ke-52, sehingga seluruh perangkat aktif dan populasi tikus berhasil tertangkap secara efektif. Setelah itu, intensitas kontrol menurun hingga nol pada hari ke-70 sampai akhir periode. Hasil simulasi numerik profil penerapan kontrol disajikan dalam gambar berikut.



Gambar 3. Tingkat Penerapan Kontrol pada Sistem

Selanjutnya, simulasi perbandingan jumlah populasi tikus baik tanpa kontrol maupun dengan diterapkannya kontrol perangkat tikus ditampilkan pada gambar berikut.

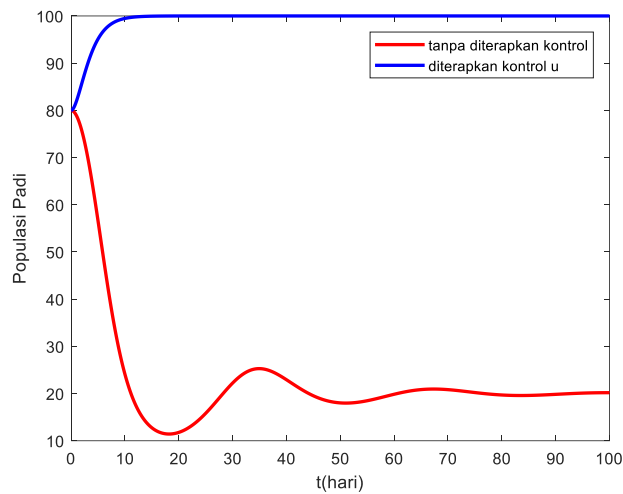


Gambar 4. Perbandingan Jumlah Populasi Tikus

Respon populasi tikus pada **Gambar 4.** menunjukkan penurunan tajam hingga mendekati nol dalam waktu kurang dari sepuluh hari, berbeda dengan kondisi tanpa kontrol dimana jumlah tikus meningkat lalu berfluktuatif dan stabil pada jumlah 40 ekor. Hal ini menegaskan bahwa perangkat tikus mampu menekan populasi tikus dengan cepat dan stabil.

Perubahan populasi padi terlihat berbanding terbalik dengan jumlah tikus. Tanpa kontrol, populasi padi menurun akibat tingkat serangan tikus yang tinggi dan baru meningkat kembali setelah terjadi keseimbangan alami hingga jumlah padi stabil pada nilai 20 rumpun. Hal ini sejalan dengan hasil simulasi pada **Gambar 2.** Namun ketika kontrol perangkat diterapkan, populasi padi meningkat hingga mencapai *carrying capacity* yaitu 100 rumpun. Dengan demikian, pemberian kontrol perangkat tikus mampu menekan jumlah tikus di

ekosistem, sehingga padi dapat tumbuh optimal tanpa adanya hama penyerang dan risiko gagal panen dapat diminimalisir.



Gambar 5. Perbandingan Jumlah Populasi Padi

Sementara itu, populasi burung hantu cenderung menurun sampai punah, baik pada kondisi adanya kontrol maupun tanpa kontrol. Penurunan ini terjadi karena berkurangnya jumlah tikus sebagai sumber makanan utama. Akibat kekurangan makanan, laju kematian burung hantu menjadi lebih tinggi dari pada laju pertumbuhannya. Keadaan ini sejalan dengan titik ekuilibrium E_2 , dimana populasi burung hantu punah.

Secara keseluruhan, simulasi numerik menunjukkan bahwa penerapan perangkap tikus efektif dalam menurunkan populasi hama dan berkontribusi terhadap peningkatan populasi padi. Namun, perlu strategi lanjutan agar keberlangsungan populasi burung hantu tetap terjaga sebagai bagian dari keseimbangan ekosistem.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh model dinamika predator-prey yang melibatkan tiga populasi yaitu padi sebagai mangsa utama, tikus sebagai predator pertama, serta burung hantu sebagai predator kedua, dengan kontrol berupa pemasangan perangkap tikus. Model ini dibangun dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier dengan memasukkan pertumbuhan logistik pada padi, predasi tikus, predasi burung hantu, dan pengaruh *Allee Effect* pada burung hantu. Analisis model tanpa kontrol ($u = 0$) menunjukkan bahwa terdapat lima titik ekuilibrium dengan dua titik yaitu titik ekuilibrium $E_2 = (K, 0, 0)$ dan $E_3 = (\frac{\mu}{\delta}, \frac{\alpha(K\delta - \mu)}{K\beta\delta}, 0)$ bersifat stabil jika syarat eksistensi dan kestabilannya masing-masing terpenuhi. Adapun dua ekuilibrium lainnya, yaitu E_4 dan E_5 , merupakan titik koeksistensi namun keduanya tidak stabil. Hal tersebut mengindikasikan bahwa sistem secara alami sulit mempertahankan keberadaan populasi burung hantu tanpa adanya intervensi.

Penerapan kontrol optimal berupa perangkap tikus, diterapkan pada data-data numerik yang memenuhi syarat eksistensi dan kestabilan ekuilibrium E_3 . Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa penerapan kontrol meningkatkan jumlah populasi padi secara signifikan dibandingkan kondisi tanpa kontrol dan menekan jumlah populasi tikus. Dengan demikian, pemasangan perangkap tikus sebagai strategi kontrol terbukti berperan efektif

dalam menjaga keberlanjutan tanaman padi dan stabilitas ekosistem interaksi padi-tikus-burung hantu..

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terimakasih Tim Peneliti sampaikan kepada Program Studi Matematika dan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Imam Bonjol Padang, yang telah memberikan dukungan moril yang tak ternilai, sehingga penelitian ini dapat terlaksana dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] H. M. Siregar, S. Priyambodo, and D. Hindayana, "Preferensi Serangan Tikus Sawah (*Rattus argentiventer*) Terhadap Tanaman Padi," *Agrovigor J. Agroekoteknologi*, vol. 13, no. 1, pp. 16–21, 2020, doi: <https://doi.org/10.21107/agrovigor.v13i1.6249>.
- [2] S. Cahyaningtias, "Applikasi Kriteria Routh-Hurwitz pada Kestabilan Model Interaksi Padi-Hama," *Wahana Tridarma Perguru. Tinggi*, vol. 66, no. 1, pp. 69–73, 2016, doi: <https://doi.org/10.36456/wahana.v66i1.491>.
- [3] M. D. Pusparini and I. K. Suratha, "Efektivitas Pengendalian Hama Tikus pada Tanaman Pertanian dengan Pemanfaatan Burung Hantu di Desa Wringinrejo Kecamatan Gambiran Kabupaten Banyuwangi, Provinsi Jawa Timur," *J. Pendidik. Geogr. Undiksha*, vol. 6, no. 2, 2018, doi: <https://doi.org/10.23887/jjpg.v6i2.20683>.
- [4] F. K. Mutiara, A. Y. Kusufa, F. Yoga, and T. Novitawati, "Strategi Penyuluhan Pengendalian Hama Tikus yang Efektif untuk Petani Desa Jombok, Ngantang Kabupaten Malang," *J. Pengabd. Masy. dan Kegiat. Masy.*, vol. 3, no. 4, pp. 19–27, 2025, doi: <https://doi.org/10.61132/aspirasi.v3i4.1933>.
- [5] E. D. Maret, "7 Fakta Menarik Burung Hantu, Dapat Menelan Mangsa Secara Utuh," *Kompas.com*. [Online]. Available: <https://www.kompas.com/homey/read/2022/10/31/140000376/7-fakta-menarik-burung-hantu-dapat-menelan-mangsa-secara-utuh->
- [6] A. Luthfiah, A. P. Silaen, C. L. Putri, and D. I. Shafa, "Pembuatan Rumah Burung Hantu sebagai Upaya Pengendalian Hama Tikus Ramah Lingkungan dan Mengurangi Ketergantungan Pestisida Kimia di Desa Pematang Kasih," vol. 5, no. 4, 2025, doi: <https://doi.org/10.55606/nusantara.v5i4.6864>.
- [7] M. Porusia and S. Darnoto, *Pengendalian Vektor Penyakit*. Muhammadiyah University Press, 2019.
- [8] L. M. Ivakdalam, "Uji Keefektifan Enam Jenis Perangkap Dalam Pengendalian Tikus Sawah (*Rattus argentiventer*)," *Agrilan*, vol. 2, no. 2, pp. 38–46, 2014.
- [9] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Ninth Edit. John Wiley & Sons, Inc, 2009.
- [10] N. Rizka, "Model Rantai Makanan antara Tanaman Jagung, Hama Tikus, dan Burung Hantu dengan Pemasangan Perangkap Tikus," *MAP (Mathematics Appl. J.)*, vol. 4, no. 2, pp. 173–180, 2022, doi: <https://doi.org/10.15548/map.v4i2.4996>.
- [11] A. Ü. Keskin, *Ordinary Differential Equations for Engineers: Problems with MATLAB Solutions*. Springer, 2018.
- [12] M. Rifandi and M. Abdy, *Suatu Pengantar Persamaan Diferensial Biasa*. Uwais Inspirasi Indonesia, 2023.
- [13] L. P. Sinaga, D. Kartika, and H. Nasution, *Pengantar Sistem Dinamik*. Amal Insani Publisher, 2021.
- [14] M. Z. Ndii, *Pemodelan matematika*. PT Nasya Expanding Management, 2022.
- [15] I. R. Syarif, S. Toaha, and J. Kusuma, "Dynamics Analysis of Predator-Prey Model with Double Allee Effects and Holling Type II Functional Response," *J. Mat. Stat. dan Komputasi*, vol. 18, no. 3, pp. 434–446, 2022, doi: <https://doi.org/10.20956/j.v18i3.19237>.

- [16] M. Kot, *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. doi: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511608520>.
- [17] H. S. Panigoro and D. Savitri, "Bifurkasi Hopf pada model Lotka-Volterra Orde-Fraksional dengan Efek Allee Aditif pada PPredator," *Jambura J. Biomath.*, vol. 1, no. 1, pp. 16–24, 2020, doi: <https://doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.6908>.
- [18] L. O. Sabran, L. Annur, and A. R. Laura, "Dynamic Analysis of the Mathematical Model for Stunting with Nutrition and Education Interventions," *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 19, no. 4, pp. 2317–2334, 2025, doi: <https://doi.org/10.30598/barekengvol19iss4pp2317-2334>.
- [19] G. J. Olsder, J. W. van der Woude, J. G. Maks, and D. Jeltsema, *Mathematical Systems Theory*, 4th ed. Delft: Delft Academic Press, 2011.
- [20] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra (Applications Version)*, Tenth Edit. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2010.
- [21] S. Gao, J. Hu, and Y. Yu, "Iterative Methods for Polynomial Equations Based on Vieta's Theorem," in *2018 8th International Conference on Mechatronics, Computer and Education Informationization (MCEI 2018)*, Atlantis Press, 2018, pp. 107–111. doi: 10.2991/mcei-18.2018.21.
- [22] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*. London: Chapman and Hall/CRC, 2007. doi: <https://doi.org/10.1201/9781420011418>.