

Optimasi Portofolio Mean-VaR dengan Fungsi Utilitas Kuadratik pada Lima Saham Perbankan di Indonesia

Dina Agustina^{✉1}, Abdurakhman², Sumardi³

Matematika^{1,2,3}, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
email: dinaagustina@mail.ugm.ac.id, dinaagustina@fmipa.unp.ac.id

Received 14 Jan 2026, Accepted 30 Maret 2026, Published 31 Maret 2026

Abstrak

Fluktuasi harga saham perbankan yang tinggi menyebabkan ketidakpastian return dan meningkatkan potensi kerugian bagi investor. Kondisi ini mendorong perlunya model optimasi portofolio yang mampu mengendalikan risiko kerugian ekstrem secara lebih efektif. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan model optimasi portofolio *Mean-Value at Risk* (Mean-VaR) dengan fungsi utilitas kuadratik pada lima saham perbankan di Indonesia, yaitu BBKA, BBNI, BBRI, BMRI, dan BRIS. Data yang digunakan berupa *return* harian saham. *Expected return* portofolio dihitung berdasarkan rata-rata return, sedangkan risiko portofolio diukur menggunakan *Value at Risk* (VaR) pada tingkat kepercayaan 95%. Optimasi portofolio dilakukan dengan memvariasikan parameter preferensi risiko b dan menerapkan kendala tanpa *short-selling*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa peningkatan nilai parameter b menyebabkan penurunan *expected return* portofolio yang diikuti oleh penurunan nilai VaR, yang mencerminkan adanya trade-off antara return dan risiko. *Expected return* maksimum sebesar 0,0011 diperoleh pada $b = 0,07$ dengan VaR sebesar 0,01592. Sementara, risiko minimum sebesar 0,01457 dicapai pada $b = 100$ dengan *expected return* sebesar 0,000829. Hasil ini menunjukkan bahwa model Mean-VaR memberikan fleksibilitas dalam pengendalian risiko kerugian ekstrem sesuai dengan preferensi risiko investor. Sebagai pembandingan, metode klasik mean-variansi Markowitz menghasilkan portofolio dengan risiko yang lebih rendah, namun disertai *expected return* yang relatif lebih kecil. Dengan demikian, model Mean-VaR lebih adaptif terhadap risiko ekstrem, sementara metode Markowitz lebih stabil dalam mengendalikan risiko berbasis variansi.

Kata Kunci: Optimasi portofolio; Mean-VaR; fungsi utilitas kuadratik; saham perbankan; *Value at Risk*.

Abstract

High fluctuations in banking stock prices lead to return uncertainty and increase the potential for losses for investors. This condition encourages the need for a portfolio optimization model capable of controlling extreme loss risk more effectively. This study aims to apply the *Mean-Value at Risk* (Mean-VaR) portfolio optimization model with a quadratic utility function to five banking stocks in Indonesia, namely BBKA, BBNI, BBRI, BMRI, and BRIS. The data used consist of daily stock returns. The expected portfolio return is calculated based on the average return, while portfolio risk is measured using *Value at Risk* (VaR) at a 95% confidence level. Portfolio optimization is performed by varying the risk preference parameter b and applying a no short-selling constraint. The results show that an increase in the parameter b leads to a decrease in the expected portfolio return accompanied by a decrease in VaR, reflecting a trade-off between return and risk. The maximum expected return of 0.0011 is obtained at $b = 0.07$ with a VaR of 0.01592. Meanwhile, the minimum risk of 0.01457 is achieved at $b = 100$ with an expected return of 0.000829. These results indicate that the Mean-VaR model provides flexibility in controlling

extreme loss risk according to investor risk preferences. As a comparison, the classical mean-variance Markowitz method produces a portfolio with lower risk but relatively smaller expected returns. Therefore, the Mean-VaR model is more adaptive to extreme risk, while the Markowitz method is more stable in controlling variance-based risk.

Keywords: Portfolio optimization; Mean-VaR; quadratic utility function; banking stocks; Value at Risk.

✉ dinaagustina@mail.ugm.ac.id, dinagustina@fmipa.unp.ac.id

PENDAHULUAN

Investasi merupakan suatu kegiatan penempatan sejumlah dana dengan tujuan memperoleh keuntungan di masa akan datang. Saham menjadi salah satu pilihan investasi yang banyak diminati oleh investor karena memiliki potensi keuntungan yang lebih tinggi dibandingkan dengan instrumen pasar uang, seperti deposito [1]. Namun, semakin besar peluang keuntungan, maka semakin besar pula risiko kerugian yang mungkin dihadapi oleh investor [2]. Oleh karena itu, setiap keputusan investasi selalu mempertimbangkan tingkat return dan tingkat risikonya.

Risiko dalam investasi dapat diartikan sebagai kemungkinan terjadinya hasil yang tidak sesuai dengan harapan. Untuk mengukur tingkat risiko tersebut, berbagai metode telah dikembangkan. Salah satu alat ukur yang sering digunakan untuk mengukur risiko atau kerugian maksimal pada kondisi pasar normal dengan tingkat kepercayaan tertentu dalam manajemen risiko adalah *Value-at-Risk* (VaR) [3]. VaR telah diadopsi secara luas oleh lembaga keuangan dan regulator karena kemudahannya dalam interpretasi dan implementasi [4].

Pembentukan portofolio merupakan strategi penting untuk mengendalikan risiko. Pendekatan klasik pembentukan portofolio diperkenalkan oleh Markowitz (1952) [5] melalui teori *mean-variance*, di mana risiko portofolio diukur menggunakan variansi return. Meskipun model Markowitz memberikan dasar teoritis yang kuat, penggunaan variansi sebagai ukuran risiko memiliki keterbatasan karena memperlakukan deviasi positif dan negatif secara simetris, sehingga kurang mampu merepresentasikan risiko kerugian ekstrem yang sering terjadi pada kondisi pasar aktual [6], [7]. Selain itu, pendekatan mean-variance juga mengasumsikan distribusi return berdistribusi normal, padahal dalam praktiknya return saham sering menunjukkan karakteristik fat tails dan skewness. Kondisi ini menyebabkan variansi kurang mampu menangkap risiko kerugian besar yang terjadi pada kondisi pasar ekstrem, sehingga model Markowitz menjadi kurang tepat digunakan dalam situasi pasar yang berfluktuasi tinggi.

Sebagai alternatif, pendekatan Mean-VaR dikembangkan dengan mengganti ukuran risiko variansi menggunakan VaR. Model Mean-VaR dinilai lebih relevan dalam menggambarkan risiko *downside* karena secara langsung memfokuskan perhatian pada potensi kerugian maksimum [8], [9], [10]. Dengan demikian, Mean-VaR dianggap lebih tepat dibandingkan pendekatan mean-variance karena mampu mengukur risiko kerugian ekstrem secara langsung serta tidak bergantung pada

asumsi distribusi simetris. Berbagai penelitian menunjukkan bahwa optimasi portofolio berbasis Mean-VaR mampu menghasilkan portofolio yang lebih sensitif terhadap risiko ekstrem dibandingkan pendekatan mean-variance klasik [11], [12].

Selain pemilihan ukuran risiko, perbedaan preferensi risiko antar investor juga memegang peranan penting dalam pengambilan keputusan investasi. Investor dengan toleransi risiko tinggi cenderung memilih portofolio dengan potensi return lebih besar, sedangkan investor yang *risk-averse* akan lebih memilih portofolio yang stabil dengan risiko lebih rendah. Preferensi risiko ini dapat dimodelkan melalui fungsi utilitas. Salah satu bentuk fungsi utilitas yang sering digunakan dalam kajian keuangan adalah fungsi utilitas kuadratik, karena mampu menangkap hubungan antara *return* yang diharapkan dan tingkat aversi risiko secara sederhana dan analitis[9], [13], [14].

Beberapa penelitian sebelumnya telah mengombinasikan pendekatan Mean-VaR dengan fungsi utilitas untuk menghasilkan solusi portofolio yang lebih sesuai dengan karakteristik investor. Alexander dan Baptista [15] menunjukkan bahwa penggunaan VaR dalam kerangka utilitas menghasilkan alokasi portofolio yang berbeda dibandingkan model mean-variance. Penelitian lain oleh Rockafellar dan Uryasev [7] serta Jorion [16] menekankan pentingnya penggunaan ukuran risiko berbasis *downside* dalam optimasi portofolio. Studi empiris di pasar berkembang juga menunjukkan bahwa pendekatan Mean-VaR memberikan kinerja portofolio yang kompetitif dibandingkan metode klasik [17], [18]. Selain itu, penelitian lain juga menunjukkan bahwa analisis saham perbankan di Indonesia dapat dilakukan menggunakan pendekatan berbasis data historis dan metode prediktif seperti Long Short-Term Memory (LSTM) dan Support Vector Regression (SVR), yang mampu menangkap pola pergerakan harga saham secara dinamis[19]. Hal ini menunjukkan pentingnya pemilihan model yang tepat dalam pengambilan keputusan investasi pada sektor perbankan

Sektor perbankan dipilih sebagai objek penelitian karena memiliki peranan strategis dalam pasar modal Indonesia dan tingkat likuiditas yang relatif tinggi. Saham-saham perbankan sering menjadi fokus utama investor karena mencerminkan kondisi stabilitas sistem keuangan nasional [20]. Dengan menganalisis lima saham perbankan utama, penelitian ini diharapkan mampu merepresentasikan karakteristik investasi pada sektor perbankan Indonesia.

METODOLOGI

Pada metodologi dibahas mengenai fungsi utilitas investor dan pemodelan portofolio dengan Mean-VaR dan Metode Klasik Markowitz.

1. Fungsi Utilitas Investor

Secara umum, setiap investor memiliki fungsi utilitas yang berbeda-beda sesuai dengan preferensi dan sikapnya terhadap risiko dalam berinvestasi. Berdasarkan hal tersebut, dapat ditentukan fungsi menghindari risiko (*risk aversion function*) dari investor tersebut [21].

Bentuk fungsi utilitas yang dibahas dalam penelitian ini adalah fungsi utilitas berbentuk kuadrat. Misalkan W menyatakan dana yang dimiliki investor untuk suatu investasi. Diasumsikan pula bahwa seorang investor memiliki fungsi utilitas berbentuk kuadrat sebagai $U(W) = W - bW^2$, dengan koefisien parameter $b > 0$.

Turunan pertama dan kedua dari fungsi utilitas ini diberikan sebagai berikut. $U'(W) = 1 - 2bW > 0$ untuk $W < 1/2b$ dan $U''(W) = -2b < 0$.

Fungsi risk aversion $\eta(W)$ bagi seorang investor dapat ditentukan sebagai $\eta(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{-2b}{1-2bW} = \frac{2b}{1-2bW}$.

Dengan demikian, faktor toleransi risiko (*risk tolerance factor*) τ dapat diperoleh sebagai:

$$\tau(W) = \frac{1}{\eta(W)} = \frac{1 - 2bW}{2b}$$

Jika dana awal yang diinvestasikan adalah $W = W_0$, maka faktor toleransi risiko menjadi:

$$\tau(W_0) = \frac{1}{\eta(W_0)} = \frac{1 - 2bW_0}{2b} \quad (1)$$

Faktor toleransi risiko inilah yang kemudian digunakan untuk merumuskan portofolio optimum berdasarkan VaR, yang akan dibahas pada bagian selanjutnya.

2. Pemodelan Optimasi Portofolio Mean-VaR

Pada bagian ini dibahas mengenai portofolio investasi dengan waktu diskrit. Misalkan return dari aset i , dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan n adalah jumlah aset dalam portofolio. Return portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari return setiap aset dalam portofolio. Jika investor memilih portofolio dengan vektor bobot:

$$\mathbf{w}^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Mengukur tingkat return harian pada waktu ke t dengan membandingkan perubahan harga aset P_t terhadap harga pada periode sebelumnya P_{t-1} yaitu $r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ (2) dan variansi dari return saham dengan formulasi $var(r_t) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2$ (3) dan standar deviasi merupakan akar dari $var(r_t)$.

Dengan w_i menyatakan bobot dana yang diinvestasikan pada aset i , maka return portofolio $\mathbf{w}$, r_p diberikan oleh [22]

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (4), rata-rata (ekspektasi *return*) portofolio μ_p yaitu

$$\mu_p = E[r_p] = \sum_{i=1}^n w_i E[r_i] = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (5)$$

Dan variansi portofolio σ_p^2 yaitu

$$\sigma_p^2 = Var(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Cov(r_i, r_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (6)$$

dengan σ_{ij} menyatakan kovariansi antara saham i dan j . Didefinisikan sebagai

$$\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j) = E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)] = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (7)$$

dengan ρ_{ij} adalah koefisien korelasi antara return aset i dan j , serta $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$ adalah simpangan baku dari *return* aset i .

Misalkan diberikan matriks kovariansi Σ dan matriks identitas I sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \text{ dan } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dimana $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$

Selanjutnya, ekspektasi return portofolio pada persamaan (5) dapat dituliskan dalam bentuk vektor sebagai:

$$\mu_p = E[r_p] = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_n] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \mu^T w \quad (8)$$

dan persamaan variansi (6) menjadi:

$$\sigma_p^2 = Var(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = w^T \Sigma w \quad (9)$$

Value-at-Risk (VaR) merupakan ukuran risiko yang menunjukkan potensi kerugian maksimum yang mungkin terjadi pada suatu portofolio dalam periode waktu tertentu pada tingkat kepercayaan tertentu. Dalam penelitian ini, VaR dihitung menggunakan pendekatan parametrik (*variance-covariance*), dengan asumsi bahwa return portofolio berdistribusi normal. Pendekatan ini digunakan karena sesuai dengan model mean-variance dan memudahkan proses perhitungan optimasi portofolio. Menurut Goh [23] dan Tsai [24], model pengukuran risiko VaR untuk portofolio p dirumuskan sebagai:

$$VaR_p = -W_0\{\mu_p + z_\alpha\sigma_p\}.$$

Mengacu pada persamaan (8) dan (9), maka Value-at-Risk untuk portofolio p dapat dituliskan sebagai:

$$VaR_p = -W_0\{\mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} + z_\alpha(\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w})^{1/2}\} \quad (10)$$

Di mana tanda $(-)$ menyatakan kerugian, W_0 adalah modal awal yang diinvestasikan, dan z_α adalah persentil dari distribusi normal standar ketika diberikan tingkat signifikansi sebesar $(1 - \alpha)\%$. Pada penelitian ini digunakan tingkat kepercayaan 95%, sehingga nilai z_α yang digunakan sebesar 1,645.

Dengan demikian, jika risiko dari suatu portofolio investasi diukur menggunakan VaR, maka berdasarkan model Markowitz, masalah optimisasi portofolio investasi dengan memaksimalkan keuntungan serta meminimumkan risiko dapat dinyatakan sebagai berikut [25]:

$$\text{Maksimum } \{2\tau\mu_p - VaR_p\}$$

Dengan syarat $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Model optimisasi portofolio Mean-VaR pada penelitian ini diformulasikan dengan memaksimalkan expected return dan meminimalkan risiko VaR secara simultan dengan mempertimbangkan faktor toleransi risiko investor. Selain itu, digunakan kendala tanpa short-selling, sehingga bobot portofolio memenuhi $w_i \geq 0$ untuk setiap aset.

Misalkan modal awal yang diinvestasikan sebesar $W_0 = 1$ unit uang, maka fungsi objektif dapat dinyatakan sebagai:

$$\text{Maksimum } \{2\tau\mu_p - (-[\mu_p + z_\alpha\sigma_p])\} = (2\tau + 1)\mu_p + z_\alpha\sigma_p\}$$

$$\text{Dengan syarat } \sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (11)$$

dengan τ adalah faktor toleransi risiko investor. Persamaan (11) dapat dituliskan dalam bentuk aljabar linear sebagai:

$$\text{Maksimum } \{(2\tau + 1)\mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} + z_\alpha(\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w})^{1/2}\} \quad (12)$$

$$\text{Dengan syarat } \mathbf{w}^T\mathbf{e} = 1, \text{ dengan } \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Bentuk dari persamaan (12) dikenal sebagai masalah optimisasi portofolio investasi Mean-VaR. Untuk mencari solusi (bobot) atas permasalahan optimisasi

portofolio investasi Mean-VaR, digunakan metode Kuhn-Tucker. Adapun fungsi pengali Lagrange dari persamaan (12) diberikan oleh:

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = (2\tau + 1)\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} + z_\alpha (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{\frac{1}{2}} + \lambda (\mathbf{w}^T \mathbf{e} - 1) \quad (13)$$

Menurut Teori Kuhn-Tucker, syarat optimalitas adalah

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = (2\tau + 1)\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} 2z_\alpha \frac{\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2}} + \lambda \mathbf{e} = 0 \quad (14)$$

$$\text{Dan } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{w}^T \mathbf{e} - 1 = 0 \quad (15)$$

Berdasarkan persamaan (13) dapat diperoleh

$$(2\tau + 1)\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} 2z_\alpha \frac{\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2}} + \lambda \mathbf{e} = 0$$

$$\frac{z_\alpha \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2}} = -\{(2\tau + 1)\boldsymbol{\mu} + \lambda \mathbf{e}\} \quad (16)$$

Jika persamaan (15) dikalikan dengan $\frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{z_\alpha}$, maka diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{z_\alpha} \frac{z_\alpha \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2}} = -\frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{z_\alpha} \{(2\tau + 1)\boldsymbol{\mu} + \lambda \mathbf{e}\}$$

$$\frac{\mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2}} = -\frac{\{(2\tau + 1)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}\}}{z_\alpha} \quad (17)$$

Persamaan (16), jika dikalikan dengan $\mathbf{e}^T$, diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{e}^T \frac{\mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2}} = -\mathbf{e}^T \frac{\{(2\tau + 1)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}\}}{z_\alpha}$$

$$\frac{1}{(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2}} = -\frac{\{(2\tau + 1)\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}\}}{z_\alpha} \quad (18)$$

Mensubstitusi persamaan (17) ke dalam persamaan (16) dan menyelesaikannya akan diperoleh vektor bobot sebagai berikut:

$$\mathbf{w} = \frac{(2\tau + 1)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}}{(2\tau + 1)\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}} \quad (19)$$

Persamaan (19) merupakan solusi dari masalah optimisasi portofolio Mean-VaR. Notasi ini menyatakan solusi bobot optimum untuk nilai tertentu dari toleransi risiko.

Lebih lanjut, karena fungsi toleransi risiko diperoleh dari fungsi utilitas kuadratik, maka berdasarkan persamaan (3), persamaan vektor bobot (18) dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{w} = \frac{\frac{(1+b-2bW_0)}{b}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\Sigma^{-1}\mathbf{e}}{\frac{(1+b-2bW_0)}{b}\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}} \quad (20)$$

Persamaan (19) merupakan solusi yang layak untuk bobot optimum masalah optimisasi portofolio Mean-VaR dengan toleransi risiko yang diperoleh dari fungsi utilitas kuadratik.

Ketika persamaan (15) dikalikan dengan $\mathbf{w}^T$, maka diperoleh persamaan berikut:

$$\mathbf{w}^T \frac{z_\alpha \Sigma \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w})^{1/2}} = -\mathbf{w}^T \{(2\tau + 1)\boldsymbol{\mu} + \lambda\mathbf{e}\}$$

atau dapat dituliskan kembali menjadi

$$z_\alpha (\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w})^{1/2} = -\{(2\tau + 1)\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + \lambda\} \quad (22)$$

Mensubstitusi persamaan (17) dan (18) ke dalam persamaan (22), diperoleh persamaan berikut:

$$z_\alpha \frac{-z_\alpha}{\{(2\tau+1)\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}\}} = -\{(2\tau+1)\boldsymbol{\mu}^T \frac{(2\tau+1)\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\Sigma^{-1}\mathbf{e}}{(2\tau+1)\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}} + \lambda\}$$

$$z_\alpha^2 = (2\tau + 1)^2 \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda(2\tau + 1) \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} + \lambda(2\tau + 1) \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda^2 \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}$$

atau

$$(\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}) \lambda^2 + \{(2\tau + 1) \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}\} \lambda + \{(2\tau + 1)^2 \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} - z_\alpha^2\} = 0 \quad (23)$$

Persamaan (23) merupakan persamaan kuadrat dalam bentuk λ ,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dengan } \lambda \geq 0$$

Dimana $a = \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}$, $b = \left(\frac{1+b-2bW_0}{b} \right) \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}$ dan $c = \left(\frac{1+b-2bW_0}{b} \right)^2 \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} - z_\alpha^2$ dengan Σ^{-1} merupakan invers dari matriks Σ sehingga $\Sigma^{-1} \Sigma = \Sigma \Sigma^{-1} = I$.

3. Portofolio dengan Metode Klasik Markowitz

Tujuan dari metode klasik Markowitz yaitu meminimalkan risiko ($\frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}$) dengan bobot $\mathbf{w}^T\mathbf{e} = 1$. Dibentuk fungsi Lagrange L dan $\mathbf{w}$ dicari dengan meminimalkan Fungsi Lagrange tersebut [5]:

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^T\mathbf{e} - 1) \quad (24)$$

Selanjutnya dicari turunan pertama dari L terhadap $\mathbf{w}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left(\frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^T\mathbf{e} - 1) \right) = \mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda\mathbf{e} = \mathbf{0}, \text{ diperoleh}$$

$$\mathbf{w} = \lambda\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e} \quad (25)$$

Selanjutnya $\mathbf{w}$ disubstitusikan ke L sehingga

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{e}^T\mathbf{\Sigma}^{-1})\mathbf{\Sigma}(\lambda\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}) - \lambda(\lambda\mathbf{e}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e} - 1) \\ L &= \frac{1}{2}\lambda^2(\mathbf{e}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}) - \lambda^2\mathbf{e}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e} + \lambda = \lambda - \frac{1}{2}\lambda^2(\mathbf{e}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}) \end{aligned}$$

Kemudian diturunkan L terhadap λ , diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2(\mathbf{e}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}) \right) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{e}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}} \quad (26)$$

Persamaan 26 disubstitusikan ke persamaan 25 diperoleh bobot $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}}$ (27)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dilakukan studi kasus pada lima data saham perbankan yaitu BBKA.JK, BBNI.JK, BBRI.JK, BMRI.JK dan BRIS.JK periode 01 Januari 2023 sampai dengan 01 Januari 2024 yang diambil dari data yahooofinance.com. Berikut tampilan 5 data harga *closing* saham teratas dan terbawah dari data disajikan pada tabel 1.

Tabel 1. Data Harga *Closing* 5 Saham Perbankan

Tanggal	BBKA.JK	BBNI.JK	BBRI.JK	BMRI.JK	BRIS.JK
2023-01-02	7872,042	3873,183	3978,859	4060,638	1267,404
2023-01-03	7872,042	3894,176	3962,519	4091,478	1375,898
2023-01-04	7687,901	3852,19	3897,157	4122,318	1366,035
2023-01-05	7595,83	3778,715	3790,945	4040,077	1316,719

Tanggal	BBCA.JK	BBNI.JK	BBRI.JK	BMRI.JK	BRIS.JK
2023-01-06	7641,865	3736,73	3774,605	4029,798	1370,966
...	...	...	...	...	...
2023-12-21	8798,983	4511,04	4840,544	5164,699	1675,752
2023-12-22	8798,983	4598,633	4927,371	5164,699	1680,710
2023-12-27	8846,162	4620,531	4883,957	5186,308	1680,710
2023-12-28	8869,753	4686,226	4970,783	5294,356	1725,330
2023-12-29	8869,753	4708,125	4970,783	5229,527	1725,330

Sumber: yahoofinance

Berdasarkan data pada tabel 1, dicari return dan variansi saham harian menggunakan persamaan (2), (3) berturut-turut yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Expected Return dan Variansi Return Saham Harian

Saham	Expected Return	Variansi
BBCA.JK	0,00056377	0,00012566
BBNI.JK	0,00090207	0,00016402
BBRI.JK	0,00102234	0,00017434
BMRI.JK	0,00116802	0,00021041
BRIS.JK	0,00157667	0,00057298

Sumber: diproses dengan Python

Pada Tabel 2, saham Bank Syariah Indonesia (BRIS) memiliki *expected return* tertinggi sebesar 0,157%, sedangkan saham Bank Central Asia (BBCA) memiliki *expected return* terendah sebesar 0,056%. Dari sisi risiko, variansi *return* menunjukkan bahwa saham BRIS memiliki volatilitas paling tinggi, sementara saham BBCA merupakan saham dengan volatilitas paling rendah di antara saham perbankan yang dianalisis. Perbedaan tingkat *return* dan risiko tersebut menunjukkan bahwa pemilihan portofolio tidak dapat didasarkan pada satu saham secara individual. Dalam kerangka optimasi portofolio Mean-VaR, *expected return* digunakan sebagai ukuran tingkat keuntungan, sedangkan risiko portofolio diukur menggunakan VaR yang mempertimbangkan distribusi return portofolio. Oleh karena itu, untuk menghitung risiko portofolio dan memperhitungkan keterkaitan antar *return* saham, selanjutnya disusun matriks variansi-kovariansi serta inversnya yang disajikan pada Tabel 3 dan Tabel 4.

Tabel 3. Matriks Variansi-Kovariansi

	BBCA.JK	BBNI.JK	BBRI.JK	BMRI.JK	BRIS.JK
BBCA.JK	0,0001251	0,0000577	0,0000722	0,0000752	0,0000309
BBNI.JK	0,0000577	0,0001633	0,0000603	0,0000982	0,0000552
BBRI.JK	0,0000722	0,0000603	0,0001736	0,0000835	0,0000592
BMRI.JK	0,0000752	0,0000982	0,0000835	0,0002095	0,0000577
BRIS.JK	0,0000309	0,0000552	0,0000592	0,0000577	0,0005706

Sumber: diproses dengan Python

Tabel 3 menyajikan matriks variansi-kovariansi *return* saham perbankan yang digunakan dalam penelitian ini. Elemen diagonal pada matriks tersebut menunjukkan variansi *return* masing-masing saham, sedangkan elemen di luar diagonal merepresentasikan kovariansi antar *return* saham. Nilai kovariansi yang positif menunjukkan adanya pergerakan *return* yang searah antar saham, meskipun dengan tingkat keterkaitan yang berbeda-beda. Informasi kovariansi ini penting dalam pembentukan portofolio karena risiko portofolio tidak hanya dipengaruhi oleh risiko individual saham, tetapi juga oleh hubungan antar *return* saham.

Tabel 4. Invers Matriks Variansi-Kovariansi

	BBCA.JK	BBNI.JK	BBRI.JK	BMRI.JK	BRIS.JK
BBCA.JK	12029,520	-1712,064	-3385,885	-2189,711	86,273
BBNI.JK	-1712,064	9079,494	-755,391	-3235,052	-379,981
BBRI.JK	-3385,885	-755,391	8374,418	-1645,657	-445,382
BMRI.JK	-2189,711	-3235,052	-1645,657	7781,781	-185,134
BRIS.JK	86,273	-379,981	-445,382	-185,134	1849,662

Sumber: diproses dengan Python

Tabel 4 menyajikan invers dari matriks variansi-kovariansi yang diperlukan dalam perhitungan bobot portofolio optimal. Invers matriks ini digunakan baik dalam model optimasi portofolio Markowitz maupun dalam model Mean-VaR untuk memperoleh solusi bobot portofolio yang efisien. Keberadaan invers matriks variansi-kovariansi memastikan bahwa perhitungan bobot portofolio dapat dilakukan secara analitis dan stabil, dengan mempertimbangkan struktur risiko dan keterkaitan antar saham.

Berdasarkan proses optimasi portofolio Mean-VaR dengan tingkat kepercayaan 95% ($\alpha = 5\%$ dan $z_\alpha = -1,645$), diperoleh hasil optimasi untuk berbagai nilai parameter b sebagaimana disajikan pada Tabel 5. Parameter b merepresentasikan

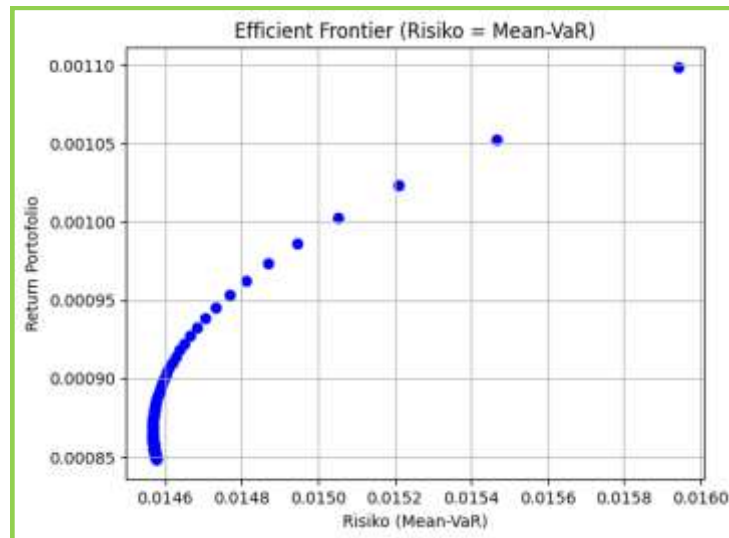
tingkat toleransi risiko investor, sehingga perubahan nilai b menghasilkan kombinasi bobot portofolio yang berbeda.

Tabel 5. Hasil Dari Optimasi Portofolio Mean-VaR

b	λ	τ	Bobot					$\hat{\mu}_p$	VaR_p
			BBCA	BBNI	BBRI	BMRI	BRIS		
0,07	0,0038	6,1429	0,05578	0,22625	0,30595	0,24078	0,17124	0,0011	0,01592
0,08	0,0062	5,25	0,12349	0,23293	0,28411	0,20487	0,15460	0,001053	0,01544
0,09	0,0078	4,5556	0,16639	0,23716	0,27028	0,18211	0,14406	0,001024	0,01518
0,1	0,0089	4	0,19724	0,24021	0,26033	0,16574	0,13647	0,00100	0,01502
0,2	0,0129	1,5	0,32081	0,25240	0,22049	0,10020	0,10611	0,000918	0,01461
0,3	0,0139	0,6667	0,36166	0,25643	0,20731	0,07853	0,09607	0,00089	0,01455
0,4	0,0143	0,25	0,38280	0,25851	0,20050	0,06731	0,09088	0,000876	0,01454
0,5	0,0145	0	0,39582	0,25980	0,19630	0,06040	0,08768	0,000867	0,01453
0,6	0,0153	-0,955	0,40467	0,26067	0,19345	0,05571	0,08550	0,000831	0,01457
0,7	0,0148	-0,286	0,41108	0,26130	0,19138	0,05231	0,08393	0,000857	0,01454
1,7	0,0151	-0,706	0,43438	0,26360	0,18386	0,03995	0,07820	0,000841	0,01455
1,8	0,0152	-0,722	0,43531	0,26369	0,18356	0,03946	0,07797	0,00084	0,01455
100	0,0154	-0,995	0,45114	0,26525	0,17846	0,03106	0,07408	0,000829	0,01457

Sumber: diproses dengan Python

Berdasarkan tabel 5, hasil menunjukkan bahwa peningkatan nilai b cenderung menggeser alokasi portofolio ke saham dengan risiko lebih rendah, yang diikuti oleh penurunan *expected return* portofolio dan penurunan VaR. Pada nilai $b = 0,07$, portofolio menghasilkan *expected return* maksimum, sedangkan pada nilai b yang sangat besar portofolio bersifat lebih konservatif dengan *expected return* yang lebih rendah namun risiko yang relatif lebih kecil. Temuan ini mencerminkan *trade-off* antara *return* dan risiko yang menjadi karakteristik utama dalam model Mean-VaR, di mana peningkatan target *return* dicapai dengan konsekuensi peningkatan risiko portofolio.



Gambar 1. Grafik Portofolio Mean-VaR

Gambar 1 menunjukkan kurva *efficient frontier portfolio* Mean-VaR pada kondisi tanpa *short-selling*. Kurva tersebut menggambarkan hubungan antara *expected return* portofolio dan risiko yang diukur menggunakan VaR. Portofolio dengan risiko terendah diperoleh pada nilai parameter $b = 100$, dengan *expected return* sebesar 0,000829 dan $VaR_p = 0,01457$. Sebaliknya, portofolio dengan *expected return* tertinggi diperoleh pada $b = 0,07$, yaitu sebesar 0,00110 dengan risiko $VaR_p = 0,01592$. Bentuk kurva menunjukkan adanya *trade-off* antara *return* dan risiko, di mana peningkatan *expected return* diikuti oleh peningkatan risiko portofolio, sesuai dengan karakteristik model Mean-VaR.

Untuk mengevaluasi kinerja model Mean-VaR, hasil optimasi portofolio selanjutnya dibandingkan dengan metode klasik Markowitz berbasis mean-variansi.

Tabel 6. Hasil Optimisasi Portofolio Mean-Variansi

Saham	Bobot (w)
BBCA.JK	0,4228192
BBNI.JK	0,26246
BBRI.JK	0,1875926
BMRI.JK	0,0460838
BRIS.JK	0,0810443
Return portofolio	0,0008485
Risiko Porotofolio	0,0093581

Tabel 6 menyajikan hasil optimasi portofolio menggunakan metode mean-variansi Markowitz dengan kendala tanpa *short-selling*. Hasil optimasi menunjukkan bahwa bobot terbesar dialokasikan pada saham Bank Central Asia (BBCA), diikuti

oleh Bank Negara Indonesia (BBNI) dan Bank Rakyat Indonesia (BBRI), sedangkan bobot terkecil diberikan pada saham Bank Mandiri (BMRI). Komposisi bobot ini menghasilkan *expected return* portofolio sebesar 0,0008485 dengan risiko portofolio sebesar 0,0093581.

Dibandingkan dengan portofolio Mean-VaR, portofolio Markowitz cenderung menghasilkan risiko yang lebih rendah, namun dengan *expected return* yang juga lebih kecil. Perbedaan ini menunjukkan bahwa penggunaan ukuran risiko yang berbeda menghasilkan karakteristik portofolio yang berbeda pula, di mana Mean-VaR lebih sensitif terhadap risiko ekstrem dibandingkan pendekatan variansi.

Secara keseluruhan, hasil perbandingan menunjukkan bahwa model Mean-VaR memberikan portofolio dengan *expected return* yang lebih tinggi pada tingkat risiko tertentu dibandingkan metode Markowitz, namun dengan risiko yang lebih besar ketika diukur menggunakan Value at Risk. Hal ini menunjukkan bahwa Mean-VaR lebih sesuai digunakan oleh investor yang memperhatikan risiko kerugian ekstrem, sedangkan model Markowitz lebih tepat bagi investor yang berfokus pada volatilitas rata-rata.

SIMPULAN

Metode mean-VaR menunjukkan bahwa peningkatan parameter b berpengaruh terhadap penurunan *expected return* portofolio sekaligus penurunan nilai VaR, yang mencerminkan adanya *trade-off* antara tingkat keuntungan dan risiko. Nilai *expected return* maksimum diperoleh pada $b = 0,07$, sedangkan risiko minimum dicapai pada $b = 100$, sehingga metode ini memberikan fleksibilitas dalam pengendalian risiko ekstrem. Sementara itu, pendekatan klasik Markowitz menghasilkan portofolio dengan distribusi bobot yang lebih terkonsentrasi pada saham perbankan besar dan risiko portofolio yang lebih rendah dibandingkan VaR pada metode mean-VaR. Dengan demikian, metode Markowitz cenderung lebih stabil dalam mengendalikan risiko variansi, sedangkan metode mean-VaR lebih adaptif terhadap risiko kerugian ekstrem. Secara praktis, hasil penelitian ini dapat menjadi pertimbangan bagi investor dalam memilih portofolio sesuai dengan tingkat toleransi risiko yang dimiliki. Investor yang berorientasi pada pengendalian kerugian ekstrem dapat menggunakan pendekatan mean-VaR, sedangkan investor yang mengutamakan stabilitas risiko dapat mempertimbangkan pendekatan Markowitz. Selain itu, hasil penelitian ini juga dapat digunakan sebagai referensi bagi manajer investasi dalam menyusun strategi alokasi aset pada sektor perbankan.

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan model ini dengan pendekatan portofolio fuzzy, sehingga ketidakpastian return, risiko, dan preferensi investor dapat dimodelkan secara lebih fleksibel dan realistis, khususnya dalam menghadapi risiko kerugian ekstrem di pasar keuangan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didukung oleh Beasiswa Pendidikan Indonesia (BPI) melalui Lembaga Pengelola Dana Pendidikan (LPDP).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Z. Bodie, A. Kane, and A. J. Marcus, *Investments*. McGraw-Hill, 2014.
- [2] E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown, and W. N. Goetzmann, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, 2009.
- [3] P. Jorion, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, 2007.
- [4] B. C. on B. Supervision, "Minimum Capital Requirements for Market Risk," 2019.
- [5] H. Markowitz, "Portfolio Selection," *J. Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.
- [6] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath, "Coherent measures of risk," *Math. Financ.*, vol. 9, no. 3, pp. 203–228, 1999.
- [7] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "Optimization of conditional value-at-risk," *Journal of Risk*, vol. 2, pp. 21–41, 2000.
- [8] K. T. Lwin, R. Qu, and B. L. MacCarthy, "Mean-VaR portfolio optimization: A nonparametric approach," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 260, no. 2, pp. 751–766, 2017, doi: 10.1016/j.ejor.2017.01.011.
- [9] Sukono, P. Sidi, A. T. Bin Bon, and S. Supian, "Modeling of Mean-VaR portfolio optimization by risk tolerance when the utility function is quadratic," in *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics Inc., Mar. 2017. doi: 10.1063/1.4979451.
- [10] G. J. Alexander and A. M. Baptista, "Economic implications of using a mean-VaR model," *J. Econ. Dyn. Control*, vol. 26, no. 7–8, pp. 1159–1193, 2002.
- [11] G. J. Alexander and A. M. Baptista, "A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection," *Manage. Sci.*, vol. 50, no. 9, pp. 1261–1273, 2004.
- [12] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "Conditional value-at-risk for general loss distributions," *J. Bank. Financ.*, vol. 26, no. 7, pp. 1443–1471, 2002.
- [13] J. W. Pratt, "Risk aversion in the small and in the large," *Econometrica*, vol. 32, no. 1–2, pp. 122–136, 1964.
- [14] H. Levy, *Stochastic Dominance*. Springer, 2016.
- [15] G. J. Alexander and A. M. Baptista, "Portfolio performance evaluation using value at risk," *Journal of Portfolio Management*, vol. 29, no. 4, pp. 93–102, 2003.
- [16] P. Jorion, *Financial Risk Manager Handbook*. Wiley, 2006.
- [17] X. Huang, "Portfolio selection with a new definition of risk," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 201, no. 3, pp. 882–890, 2010.
- [18] W.-K. Wong, K.-F. Phoon, and H. H. Lean, "Stochastic dominance analysis of Asian hedge funds," *Pacific-Basin Finance Journal*, vol. 16, no. 3, pp. 204–223, 2008.
- [19] D. Agustina and D. Prima Sari, "Analisis Algoritma LSTM dan SVR untuk Memprediksi Saham Perbankan di Pasar Indonesia," 2024.
- [20] O. J. Keuangan, "Statistik Pasar Modal Indonesia," 2023.
- [21] S. Plunus, R. Gillet, and G. Hübner, "Equivalent Risky Allocation: The New ERA of Risk Measurement for Heterogeneous Investors," *American Journal of Industrial and Business Management*, vol. 5, pp. 351–365, 2015.
- [22] P. Gupta, M. K. Mehawat, M. Inuiguchi, and S. Chandra, *Fuzzy Portfolio Optimization*. 2014.
- [23] J. Goh, K. G. Lim, M. Sim, and W. Zhang, "Portfolio Value-at-Risk Optimization for Asymmetrically Distributed Asset Returns," NUS Risk Management Institute, 2011.
- [24] K. T. Tsai, "Risk Management Via Value at Risk," *ICSA Bulletin*, 2004. [Online]. Available: <http://frontierinformaticsservice.com/Unified-Var.pdf>

- [25] S. Alexander, T. F. Coleman, and Y. Li, "Minimizing CVaR and VaR for a portfolio of derivatives," *J. Bank. Financ.*, vol. 30, no. 2, pp. 583–605, Feb. 2006, doi: 10.1016/j.jbankfin.2005.04.012.