Volume 1 Issue 1 (2021) Pages 11-19

JOSTECH

Journal of Science and Technology

Website: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/jostech Email: jostech@uinib.ac.id

Keekivalenan Presentasi Grup $\langle x,y|y^{-1}x \quad ,x^{-1}y \quad \rangle$ dan $\langle x,y|x^4,x^2y^{-2},x^{-1}y \quad \rangle$ menggunakan Transformasi Tietze

Dedi Mardianto✉[1]

Matematika, STIE SUMBAR Pariaman, Indonesia

email: dedimardianto91@gmail.com[1]

Received 15 Januari 2021, Accepted 17 Maret 2021, Published 31 Maret 2021

Abstrak

Pada penelitian ini membahas tentang transformasi untuk dua presentasi grup berbeda yang mendefinisikan grup yang sama. Tujuan penelitian ini adalah untuk menunjukan keekivalenen dua presentasi grup dengan menggunakan transformasi tietze. Diberikan dua presentasi grup $\langle x,y|y^{-1}x \quad ,x^{-1}y \quad \rangle$ dan $\langle x,y|x^4,x^2y^{-2},x^{-1}y \quad \rangle$. Ditunjukkan bahwa $\langle x,y|y^{-1}x \quad ,x^{-1}y \quad \rangle$ dan $\langle x,y|x^4,x^2y^{-2},x^{-1}y \quad \rangle$ adalah ekivalen atau isomorpis. Untuk menunjukan ini di gunakan empat jenis transformasi tietze yaitu $[T_1]$ yang merupakan proses penambahan relator kedalam himpunan relator, $[T_2]$ merupakan kebalikan dari $[T_1]$, $[T_3]$ merupakan proses penambahan generator sekaligus penambahan relalor sedangkan $[T_4]$ merupakan kebalikan dari $[T_3]$.

Kata Kunci: presentasi grup;transformasi tietze.

Abstract

This paper discuss about transformation for two group presentation. The purpose of this study was to demonstrate the equivalence of two group presentations using the tietze transformatio .Let group presentation $\langle x,y|y^{-1}x \quad ,x^{-1}y \quad \rangle$ *and* $\langle x,y|x^4,x^2y^{-2},x^{-1}y \quad \rangle$. *We can get* $\langle x,y|y^{-1}x \quad ,x^{-1}y \quad \rangle$ *and* $\langle x,y|x^4,x^2y^{-2},x^{-1}y \quad \rangle$ *is isomorphic. It is shown that using four kind Tietze transformation is* $[T_1]$ *which is the process of adding a relator into the relator set,* $[T_2]$ *is the opposite of* $[T_1]$, $[T_3]$ *is the process of adding a generator as well as adding a relay while* $[T_4]$ *is the opposite of* $[T_3]$.

Keywords: *group presentation; tietze transformation.*

✉Corresponding author

PENDAHULUAN

Misalkan $P = \langle a,r\rangle$ presentasi grup yang mendefinisikan grup G. Dari presentasi ini dapat diperoleh grup fundamental pertama $\pi_1(P)$ atas P. Unsur-unsur dari $\pi_1(P)$ adalah kelas-kelas ekivalensi dari word $[W]$. Selanjutnya dari presentasi ini juga diperoleh picture atas P ([1]). Suatu picture atas P disebut spherical picture jika semua lengkung dalam P tidak menyentuh disk batas. Selanjutnya diperoleh grup fundamental kedua $\pi_2(P)$ yang unsur-unsurnya merupakan kelas-kelas ekivalensi dari spherical picture P. Untuk membangun generator dari $\pi_1(P)$ ke $\pi_2(P)$ dari suatu presentasi grup ke presentasi grup yang lain maka perlu kita buktikan ke ekivalenan atau isomorfis kedua presentasi grup tersebut . [2] Pada artikel ini akan dibahas tentang keekivalenan presentasi grup $\langle x,y|y^{-1}x \quad ,x^{-1}y \quad\rangle$ dan $\langle x,y|x^4,x^2y^{-2},x^{-1}y \quad\rangle$. Penelitian ini memiliki kontribusi dalam perkembangan teori grup yang belum banyak dibahas yaitu presentasi grup. Pada penelitian-penelitian yang relevan pembahasan tentang keekivalenan presentasi grup hanya dibahas pada bagian kecil saja. Sedangkan pada penelitian ini dibahas secara keseluruhan tentang keekivalenan presentasi grup dengan menggunakan transformasi tietze. Adapun rumusan masalah bagaimana menentukan keekivalenan dua buah presentasi grup dengan menggunakan transformasi tietze. Tujuan penelitian ini adalah untuk menunjukan bahwa presentasi grup $\langle x,y|y^{-1}x \quad ,x^{-1}y \quad\rangle$ dan presentasi grup $\langle x,y|x^4,x^2y^{-2},x^{-1}y \quad\rangle$ ekivalen atau isomorphis . Metode yang digunakan adalah metode transformasi tietze [3]. Teori transformasi Tietze dapat dilihat pada [4].

METODE PENELITIAN

Jenis dan sifat penelitian ini adalah penelitian pustaka (studi literature). Penelitian ini merupakan penelitian pada bidang aljabar abstrak, khususnya dalam teori presentasi grup. Langkah-langkah penelitian ini adalah :

1. Mengumpulkan bahan-bahan tinjauan yang diperlukan pada penelitian ini
   Penelitian ini dilakukan dengan mengawali mempelajari literature-literatur terdahulu yang terkait
2. Mempelajari materi-materi yang diperoleh dari langkah pertama dan membuktikan teorema-teorema terkait sekaligus menentukan dua presentasi grup yang akan kita gunakan
3. Mencari hasil yang sesuai dengan permasalahan yang diteliti
   Pada tahap akhir akan digunakan metode transformasi tietze untuk menguji kedua presentasi grup itu ekivalen. Dan diperoleh barisan transformasi perubahan pada suatu presentasi grup ke presentasi grup lainnya dengan menggunakan empat jenis tranformasi pada tranformasi tietze.

Transformasi Tietze

Suatu grup **G** dapat mempunyai beberapa presentasi; diberikan himpunan yang membangun unsur-unsur untuk **G** (dan terkait dengan simbol generator) maka terdapat beberapa kemungkinan himpunan-himpunan yang mendefinisikan relator-relator.

Sebagai ilustrasi, misalkan **G** grup permutasi pada 1 2 3; tiga-lingkaran (123) dan dualingkaran (12) membentuk himpunan generator unsur-unsur untuk **G**. Pada pemetaan $a \rightarrow$ (123), $b \rightarrow$ (12), **G** mempunyai presentasi $\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^2 \rangle$ dan juga boleh dipresentasikan dengan $\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^{-1} \rangle$ .Oleh karena pendefinisian relator-relator dari $\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^2 \rangle$ adalah penurunan relator-relator dalam $\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^{-1} \rangle$ dan sebaliknya, maka $\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^2 \rangle$ dan $\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^{-1} \rangle$ mendefinisikan grup kelas-kelas ekivalensi yang sama.

Secara umum, jika **G** mempunyai dua presentasi,

$$\boldsymbol{G} = \langle a_1, a_2, \dots ; \ r_1, r_2, \dots \rangle \tag{1}$$

dan

$$\boldsymbol{G} = \langle a_1, a_2, \dots ; \ s_1, s_2, \dots \rangle \tag{2}$$

pada pemetaan yang sama, maka setiap yang mendefinisikan relator pada (2) diturunkan dari relatorrelator dalam (1).

Lebih lanjut lagi, presentasi lain untuk **G** dapat diperoleh dengan menggunakan himpunanhimpunan lain dari unsur-unsur generator untuk **G** .Sebagai contoh, pertimbangkan grup permutasi **G** yang dibangun oleh dua-lingkaran (13) dan (23). Dibawah pemetaan $c \rightarrow$ (13), $d \rightarrow$ (23),, **G** mempunyai presentasi :[5]

$$\langle c, d | c^2, d^2, (c \quad)^3 \rangle \tag{3}$$

Apakah terdapat suatu metode untuk mengubah presentasi $\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^2 \rangle$ menjadi presentas $\langle c, d | c^2, d^2, (c \quad)^3 \rangle$?

Pada tahun 1908, Tietze menunjukkan bahwa diberikan suatu presentasi

$$\langle a, b, c, \dots ; \ P, Q, R, \dots \rangle \tag{4}$$

untuk suatu grup G ,sebarang presentasi lain untuk G dapat diperoleh dengan penerapan berulang bentuk berikut ke (4):

(T1) Jika word S, T, … terturunkan dari P, Q, R, … , tambahkan S, T, … ke dalam himpunan relator dalam (4).

(T2) Jika beberapa relator, katakanlah S, T, … , berada di antara pendefinisian relator P, Q, R, … yang dapat diturunkan dari yang lainnya, hapuskan S, T, … , dari pendefinisian relator dalam (4).

(T3) Jika K, M, … adalah sebarang word dalam a, b, c, … , masukkan simbol x, y, …, ke dalam himpunan generator dalam (4) dan masukkan relator $x = K, y = M$.., ke dalam himpunan relator dalam (4).

(T4) Jika beberapa pendefinisian relator dalam (4) berbentuk $p = V, q = W$.., yang p, q,… , adalah generator dalam (4) dan V, W, … , adalah word dalam generator yang lain dari p, q,…, maka hapus p, q, … dari generator, hapus $p = V, q = W$.. … dari pendefinisian relator, dan ganti p, q, … dengan V, W, … masing-masing, dalam sisa pendefinisian relator dalam (4).[6]

Transformasi (T1), (T2), (T3) dan (T4) disebut transformasi Tietze. Transformasi ini disebut dasar jika memuat penambahan atau penghapusan dari satu pendefinisian relator, atau penambahan atau penghapusan satu generator dan pendefinisian relator yang terkait. Definisi transformasi Tietze secara umum dapat dilihat pada beberapa buku teks. Definisi Transformasi Tietze yang ditulis disini adalah yang terdapat pada [4]dan [6]. Definisi transformasi tietze secara umum dapat dilihat sebagai berikut :

$[T_1]$ Andaikan $P_1 = \langle x; r \rangle$ dan $P_2 = \langle y; s \rangle$ presentasi yang mendefinisikan grup G. Jika word S boleh direduksi dari unsur-unsur dalam r, maka tambahkan S kedalam himpunan relator, $\langle x; r \rangle \to \langle x; S, r \rangle$

$[T_2]$ Jika word S boleh direduksi dari unsure-unsur dalam r, maka hapuskan S dari dalam relator $\langle x; S, r \rangle \to \langle x; r \rangle$ ($[T_2]$ merupakan kebalikan dari $[T_1]$)

$[T_3]$ jika R adalah word pada x, dan y bukan suatu symbol yang bukan dalam himpunan generator maka masukkan y ke dalam, tambahkan y kedalam himpunan generator dan tambahkan word $y^{-1}R$ kedalam himpunan relator

$[T_4]$ jika terdapat relator berbentuk $y^{-1}R \in r, y \in x$ dimana y bukan terjadi dalam R, hapuskan $y^{-1}R$ dan hapuskan y dari himpunan generator, ubah semua y dalam word-word relator dengan R. ($[T_4]$ merupakan kebalikan dari $[T_3]$) [7]

Transformasi tietze tidak mengubah grup yang disefinisikan oleh suatu presentasi, seperti disebutkan oleh teorema berikut :

Teorema 1. [8]

Andaikan grup yang dipresentasikan oleh dua presentasi $\langle x; r \rangle$ dan $\langle y; s \rangle$ adalah berisomorfisma . Maka terdapat suatu barisan transformati tietze dari $\langle x; r \rangle$ ke $\langle y; s \rangle$. Jika presentasi ini keduanya barisan berhingga, barisan transformasi tietze dapat menjadi suatu jumlah berhingga dari langkah transformasi tunggal.

Bukti :

Misalkan $r(x) = 1$ adalah himpunan bentuk $R = 1$ dimana $R \in r$ dan juga $x = x(y)$ dan $y = y(x)$ artinya anggota-anggota dari x adalah bentuk ekspresi dari anggota y dan anggota-anggota dari y adalah bentuk-bentuk ekpresi di anggota x karena x dan y adalah generator pada kedua presentasi grup maka :

Transformasi Tietze dari $\langle x; r(x) = 1 \rangle \to \langle y; s(y) = 1 \rangle$

$$\langle x; r(x) = 1 \rangle \to \langle x, y; r(x) = 1, y = y(x) \rangle \qquad [T_3]$$

$$\to \langle x, y; r(x) = 1, s(y) = 1, y = y(x), x = x(y) \rangle \qquad [T_1]$$

Karena y merupakan anggota himpunan generator maka benar $s(y) = 1$ sehingga diperoleh $x = x(y)$

$$\to \langle y; r(x(y)) = 1, s(y) = 1, y = y(x(y)) \rangle \qquad [T_4]$$

$$\rightarrow \langle y; s(y) = 1 \rangle \qquad [T_2]$$

Sifat yang sama juga disebutkan dalam proposisi berikut ini:
Proposisi 3 [4]
Diberikan dua presentasi berhingga dari grup yang sama, maka presentasi yang satu dapat diperoleh dari presentasi yang lain dengan berhingga barisan transformasi Tietze.

Contoh :
Akan ditunjukkan langkah-langkah transformasi Tietze dari presentasi grup $\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^2 \rangle$ ke presentasi grup $\langle c, d | c^2, d^2, (c \quad)^3 \rangle$.
$\langle a, b | a^3, b^2, a \quad = ba^2 \rangle$
$\overrightarrow{T_3} \langle a, b, c \mid a^3, b^2, a \quad = ba^2, c = b \rangle$
Tambahkan generator c dalam himpunan generator dengan relasi $c = b$
$\overrightarrow{T_3} \langle a, b, c , d \mid a^3, b^2, a \quad = ba^2, c = b, d = a \quad \rangle$
Tambahkan generator d ke dalam himpunan generator dengan relasi $d = a$
$\overrightarrow{T_1} \langle a, b, c , d \mid a^3, b^2, a \quad = ba^2, c = b, d = a \quad , c^2 \rangle$
Tambahkan c^2 ke dalam himpunan relator karena diturunkan dari $c = b$, yaitu: $c = b \leftrightarrow c^2 = b^2 = 1$ karena $b^2 = 1$
$\overrightarrow{T_1} \langle a, b, c , d \mid a^3, b^2, a \quad = ba^2, c = b, d = a \quad , c^2 , d^2 \rangle$
Tambahkan d^2 ke dalam himpunan relator karena diturunkan dari $d = a$, yaitu:

$$\begin{aligned} d = a \quad \leftrightarrow d^2 &= a \\ &= ba^2ba^2 \text{ karena } a \quad = ba^2 \\ &= b \\ &= b \\ &= b \\ &= b^2a^3a^3 \\ &= 1 \; k \qquad b^2 = 1 \; d \qquad a^3 = 1 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{T_1} \langle c , d, a, b \mid a^3, b^2, a \quad = ba^2, c = b, d = a \quad , c^2 , d^2, (c \quad)^3 \rangle$
Tambahkan $(c \quad)^3$ ke dalam himpunan relator karena diturunkan dari $a^3, a \quad = ba^2, c = b, d = a$, yaitu:

$$\begin{aligned} (c \quad)^3 &= c \\ &= c \qquad \text{karena } d = a \\ &= b \qquad bb \qquad \text{karena } c = b \\ &= b \qquad \text{karena } a \quad = ba^2 \\ &= b^2a \;\; b^2a \;\; b^2a \\ &= a \qquad \text{karena } b^2 = 1 \\ &= a^3a^3 \\ &= 1 \; k \qquad a^3 = 1 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{T_2} \langle c , d, a, b \mid b^2, a \quad = ba^2, c = b, d = a \quad , c^2 , d^2, (c \quad)^3 \rangle$

Hapuskan a^3 dari himpunan relator karena diturunkan dari $c = b, d = a \;, b^2, (c \;)^3$

$\overrightarrow{T_2}\langle c, d, a, b \,|a \;= ba^2, c = b, d = a \;, c^2, d^2, (c \;)^3 \rangle$

Hapuskan b^3 dari himpunan relator karena diturunkan dari $c = b\, y \qquad c^2 = b^2 = 1$

$\overrightarrow{T_4}\langle c, d, a \,|a \;= ca^2, d = a \;, c^2, d^2, (c \;)^3 \rangle$

Hapuskan generator b dari himpunan generator karena $c = b$ maka rubah semua b menjadi c

$\overrightarrow{T_4}\langle c, d | c^2, d^2, (c \;)^3 \rangle$

Hapuskan generator a dari himpunan generator .

Jadi diperoleh $\langle a, b | a^3, b^2, a \;= ba^2 \rangle \;\cong\; \langle c, d | c^2, d^2, (c \;)^3 \rangle$.

LANDASAN TEORI

Andaikan **x** suatu himpunan. Invers dari **x** ditulis $\boldsymbol{x^{-1}}$ dan symbol $\boldsymbol{x^{\pm 1}}$ diartikan sebagai $\boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{x^{-1}}$**.** Suatu word pada $\boldsymbol{x^{\pm 1}}$ adalah suatu barisan yang berbentuk $\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{e_1}}, \boldsymbol{x_2}^{\boldsymbol{e_2}}, \boldsymbol{x_3}^{\boldsymbol{e_3}}, \dots, \boldsymbol{x_{n-1}}^{\boldsymbol{e_{n-1}}}, \boldsymbol{x_n}^{\boldsymbol{e_n}}$, dimana $n > 0, x_i \in \boldsymbol{x}$ dan $e_i = \pm 1, i = 1,2,3, \dots, n$. Invers untuk W, ditulis W^{-1} adalah *word* $\boldsymbol{x_n}^{-\boldsymbol{e_n}}, \boldsymbol{x_{n-1}}^{-\boldsymbol{e_{n-1}}}, \dots, \boldsymbol{x_2}^{-\boldsymbol{e_2}}, \boldsymbol{x_1}^{-\boldsymbol{e_1}}$. Jika $W_1 = x_{i1}^{e1} \dots . x_{i_i}^{e}$ dan $W_2 = x_{j1}^{e1} \dots . x_j^{e}$ adalah word dalam $\boldsymbol{x^{\pm 1}}$**,** maka hasil kali $W_1W_2 = x_{i1}^{e1} \dots . x_{i_i}^{e} \; x_{j1}^{e1} \dots . x_j^{e}$. Jika$x_i^{e_i} \neq x_{i+1}^{-e_{i+1}}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n-1$ maka W dikatakan tereduksi dan W dikatakan tereduksi secara siklik jika $x_1^{e1} \neq x_n^{-e}$. Panjang $|W|$ adalah bernilai bilangan bulat, jika $|W| = 0$ maka *word* W dikatakan kosong. Jelaslah bahwa $|W| = |W^{-1}|$ dan $|W_1W_2| = |W_1| + |W_2|$. [9]

Andaikan $(\boldsymbol{x^{\pm 1}})^*$ adalah himpunan semua word pada $\boldsymbol{x^{\pm 1}}$. Didefinisikan relasi pada $(\boldsymbol{x^{\pm 1}})^*$ sebagai berikut : $V \sim W$ jika dan hanya jika V dapat dirubah menjadi W dengan menambah dan/atau menghapus sebanyak berhingga pasangan invers $x_i^{e_i} x_i^{-e_i}$. [10] Relasi $\sim$ adalah relasi ekivalensi pada $(\boldsymbol{x^{\pm 1}})^*$, dan jika dua *word* V dan W ekivalen, maka dikatakan V dan W ekivalen secara bebas. Andaikan $[W]$ kelas ekivalensi word W, himpunan kelas-kelas ekivalensi $\{[W]; W \in (\boldsymbol{x^{\pm 1}})^*\}$ dengan operasi biner $[V][W] = [V \quad]$ untuk semua $V, W \in (\boldsymbol{x^{\pm 1}})^*$membentuk suatu grup yang dinamai grup bebas pada $\boldsymbol{x}$, disimbolkan dengan $F(x)$. Unsur identitas pada $F(x)$ adalah word kosong dan invers $[W]$ ditulis $[W]^{-1}$ untuk semua $W \in (\boldsymbol{x^{\pm 1}})^*$. [11]

Contoh : Misalkan $\boldsymbol{x} = \{a, b, c\}$ maka 2 word dari $\boldsymbol{x}$ adalah $U = c^{-1}a \quad c^{-1}c$ dan $V = b^{-1}b \quad a^{-1}c$ sehingga :

$$U^{-1} = b^{-1}c^{-1}cb^{-1}a^{-1}a^{-1}c$$

$$U \quad = c^{-1}a \quad c^{-1}c \; b^{-1}b \qquad ^{-1}c$$
$$U^2 = U \quad = c^{-1}a \quad c^{-1}c \; c^{-1}a \quad c^{-1}c$$

Andaikan $\boldsymbol{G}$ sebarang grup. Presentasi grup untuk grup $\boldsymbol{G}$ adalah $P = \langle x; r \rangle$ pasangan yang memuat himpunan x sebagai generator dan himpunan r yang

merupakan himpunan word tereduksi secara siklik pada $\boldsymbol{x}^{\pm 1}$ dan disebut relasi. [12].. Presentasi $P = \langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r} \rangle$ dikatakan berhingga jika $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{r}$ berhingga. Jika $\{\boldsymbol{x} = x_1, x_2 \dots\}$ dan $\{\boldsymbol{r} = r_1, r_2 \dots\}$ maka dapat juga ditulis $P = \langle x_1, x_2 \dots; r_1, r_2 \dots \rangle$ atau $P = \langle x_1, x_2 \dots; r_1 = 1, r_2 = 1 \dots \rangle$.[13]
Contoh : grup siklik berhingga dengan orde n mempunyai presentasi yaitu $C_n = \langle a; a^n = 1 \rangle$, Grup abelian bebas dengan orde 2 mempunyai presentasi $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{a} \quad = \boldsymbol{b} \quad \rangle$, Grup dwihedron D_n dengan pangkat 2n mempunyai presentasi $D_n = \langle a, b; a^2 = 1, b^n = 1, a^{-1}b \quad = b^{-1} \rangle$.

Perhatikan kembali himpunan kelas-kelas ekivalensi $\{[W]; W \in (\boldsymbol{x}^{\pm 1})^*\}$. Pada bagian tersebut disebutkan bahwa himpunan ini membentuk grup bebas $F(x)$. Dengan suatu presentasi grup P dapat dibangun grup $\boldsymbol{G}(P)$, yaitu $F(x)/N_r$, dimana $N_r$adalah normal closure r dalam $F(x)$ yaitu subgroup normal terkecil yang memuat r. Pertama didefinisikan hubungan $\sim_r$ sebagai berikut : word V ekivalen (relative ke r) dengan word W, ditulis $V \sim W$ jika dan hanya jika V dapat ditransformasikan menjadi W dengan menambah atau menghapus sebanyak berhingga pasangan $x_i^{e_i} x_i^{-e_i}$. Bersama dengan menambah atau menghapus sebanyak berhingga unsur-unsur yang dibentuk dalam $r^{\pm 1}$. Relasi $\sim_r$ merupakan relasi ekivalensi pada $(\boldsymbol{x}^{\pm 1})^*$dan kelas ekivalensi dari W dilambangkan dengan $[W]_r$.[14]

Teorema 2 *Himpunan kelas-kelas ekivalensi pada* $(x^{\pm 1})^*$ *disimbolkan dengan* $\{[W]; W \in (x^{\pm 1})^*\}$ *dalam* $P = \langle x; r \rangle$ *dengan operasi biner* $[V]_r[W]_r = [V \quad]_r$ *untuk semua* $V, W \in (x^{\pm 1})^*$*membentuk grup yang disebut grup yang didefinisikan oleh P dan dilambangkan dengan G(P). Unsur identitas adalah word kosong dan* $[W]_r^{-1} = [W^{-1}]$ *untuk semua* $W \in (x^{\pm 1})^*$.

Bukti :
Misalkan $\{[W]; W \in (x^{\pm 1})^*\}$ adalah himpunan kelas-kelas ekivalensi pada $(x^{\pm 1})^*$. akan ditunjukkan bahwa $\{[W]; W \in (x^{\pm 1})^*\}$ membentuk grup dengan operasi biner $[V]_r[W]_r = [V \quad]_r$, unsure identitas adalah word kosong dan $[W]_r^{-1} = [W^{-1}]_r$ untuk semua $W \in (x^{\pm 1})^*$.[15]
Misalkan $[V]_r[W]_r[Z]_r \in (x^{\pm 1})^*$, $\{[W]; W \in (x^{\pm 1})^*\}$ adalah grup jika $\{[W]; W \in (x^{\pm 1})^*\}$ memenuhi sifat grup yaitu :

1. Tertutup : $[V]_r[W]_r = [V \quad]_r \in (x^{\pm 1})^*$
2. Assosiatif : $([V]_r[W]_r)([Z]_r) = [V \quad]_r[Z]_r = [V \quad\quad]_r = [V]_r[W \quad]_r = ([V]_r)([W]_r [Z]_r)$
3. Terdapat identitas yaitu $[1]_r \in (x^{\pm 1})^*$ sehingga $[V]_r[1]_r = [V1]_r = [V]_r$
4. Terdapat invers yaitu $[V]_r{}^{-1} \in (x^{\pm 1})^*$ sehingga $[V]_r[V]_r{}^{-1} = [V]_r[V^{-1}]_r = [VV^{-1}]_r = [1]_r$.

Karena memenuhi empat aksioma pada grup maka $\{[W]; W \in (\boldsymbol{x}^{\pm 1})^*\}$ adalah grup.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang pemakaian sifat-sifat dan teorema yang sudah dijelaskan pada subbab sebelumnya. Sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu keekivalenan presentasi grup lain dengan melibatkan tranformasi tietze yang diberikan pada lemma berikut :

Lemma 1. Misalkan $\langle x, y | x \quad = y \quad \rangle$ dan $\langle a, b | a^2, b^3 \rangle$ adalah dua presentasi grup yang mendefinisikan grup yang sama maka terdapat barisan tranformasi tietze dari suatu tranformasi grup $\langle x, y | x \quad = y \quad \rangle$ ke $\langle a, b | a^2, b^3 \rangle$

Bukti :

$[T_3]$ $\langle x, y, a | x \quad = y \quad , a = x \quad \rangle$

Tambahkan generator a ke himpunan generator dengan relasi a=xyx

$[T_3]$ $\langle x, y, a, b | x \quad = y \quad , a = x \quad , b = x \quad \rangle$

Tambahkan generator b kehimpunan generator dengan relasi b= xy

$[T_1]$ $\langle x, y, a, b | x \quad = y \quad , a = x \quad , b = x \quad , a^2 = b^3 \rangle$

Tambahkan $a^2 = b^3$ kehimpunan relasi karena $a^2 = b^3$ dapat diturunkan dari $a = x \quad , b = x$

$[=]$ $\langle x, y, a, b | x \quad y^{-1}x^{-1}y^{-1}, a^{-1}x \quad , b^{-1}x \quad , a^2b^{-3} \rangle$

$[T_2]$ $\langle a, b, x, y | a^{-1}x \quad , b^{-1}x \quad , a^2b^{-3}, x = b^{-1}a, y = a^{-1}b^2 \rangle$

Hapus relasi $x \quad y^{-1}x^{-1}y^{-1}$ karena $x \quad y^{-1}x^{-1}y^{-1}$ dapat diturunkan dari $a^{-1}x \quad , b^{-1}x \quad d \quad a^2b^{-3}$ dan terdapat relasi $x = b^{-1}a, y = a^{-1}b^2$

$[T_2]$ $\langle a, b, x, y | \, a^2b^{-3}, x = b^{-1}a, y = a^{-1}b^2 \rangle$

Hapus relasi $a^{-1}x$ dan $b^{-1}x \quad k \quad a^{-1}x$ dan $b^{-1}x$ dapat diturunkan dari $x = b^{-1}a, y = a^{-1}b^2$

$[T_4]$ $\langle a, b, | \, a^2b^{-3} \rangle$

Hapus generator x dan y karena $a^2b^{-3} \; d \quad di \quad d \quad x = b^{-1}a, y = a^{-1}b^2$

$[=]$ $\langle a, b, | \, a^2 = b^3 \rangle$

Sesuai dengan tujuan tulisan ini untuk menunjukan isomorfis presentasi grup $\langle x, y | y^{-1}x \quad , x^{-1}y \quad \rangle$ dan presentasi grup $\langle x, y | x^4, x^2y^{-2}, x^{-1}y \quad \rangle$ maka sifatnya berikut :

Lemma 2. Misalkan $P_1 = \langle x, y | y^{-1}x \quad , x^{-1}y \quad \rangle$ dan $P_2 = \langle x, y | x^4, x^2y^{-2}, x^{-1}y \quad \rangle$ adalah dua presentasi grup maka P_1 isomorfis dengan P_2

Bukti :

Pembuktian dilakukan bertahap yaitu melakukan transformasi tietze dari $P_1 = \langle x, y | y^{-1}x \quad , x^{-1}y \quad \rangle \rightarrow P_2 = \langle x, y | x^4, x^2y^{-2}, x^{-1}y \quad \rangle$.

$[T_1]$ $\langle x, y | y^{-1}x \quad , y^{-2}x \quad , x^{-1}y \quad \rangle$

$[T_1]$ $\langle x, y | y^{-1}x \quad , y^{-2}x \quad , x^{-1}y \quad , x^{-2}x \quad \rangle$

$[T_1]$ $\langle x, y | y^{-1}x \quad , y^{-2}x \quad , x^{-1}y \quad , x^{-2}x \quad , x^2y^{-2} \rangle$

$[T_2]$ $\langle x, y | y^{-1}x \quad , x^{-1}y \quad , x^2y^{-2} \rangle$

$[T_3]$ $\langle x, y, z | x^2z^{-1}, y^{-1}x \quad , x^{-1}y \quad , x^2y^{-2} \rangle$

$[T_1]$ $\langle x, y, z | x^2z^{-1}, y^{-1}x \quad , x^{-1}y \quad , x^2y^{-2}, yx^{-1}y \quad \rangle$

$[T_2]$ $\langle x, y, z | x^2z^{-1}, y^{-1}x \quad , x^2y^{-2}, yx^{-1}y \ \rangle$
$[T_1]$ $\langle x, y, z | x^2z^{-1}, y^{-1}x \quad , x^2y^{-2}, yx^{-1}y \ , yy^{-1}x \quad \rangle$
$[T_1]$ $\langle x, y, z | x^2z^{-1}, y^{-1}x \quad , x^2y^{-2}, yx^{-1}y \ , yy^{-1}x \quad , z^2 \rangle$
$[T_1]$ $\langle x, y, z | x^2z^{-1}, y^{-1}x \quad , x^2y^{-2}, yx^{-1}y \ , yy^{-1}x \quad , z^2, x^4 \rangle$
$[T_2]$ $\langle x, y, z | x^2z^{-1}, x^2y^{-2}, yx^{-1}y \ , z^2, x^4 \rangle$
$[T_4]$ $\langle x, y | x^2y^{-2}, yx^{-1}y \ , x^4 \rangle$

Dari barisan tranformasi tersebut diperoleh bahwa $\langle x, y | y^{-1}x \quad , x^{-1}y \quad \rangle \cong \langle x, y | x^2y^{-2}, yx^{-1}y \ , x^4 \rangle$ dengan menggunakan tranformasi tietze.

SIMPULAN

Diberikan dua presentasi grup yang berbeda yang mendefinisikan grup yang sama yaitu $\langle x, y | y^{-1}x \quad , x^{-1}y \quad \rangle$ dan $\langle x, y | x^4, x^2y^{-2}, x^{-1}y \quad \rangle$. Dibuktikan dua presentasi tersebut ekivalen atau isomorfis dengan menggunakan empat jenis transformasi tietze pada masing-masing tahapnya. Sebelum membuktikan kedua transformasi grup tersebut isomorphism maka akan diberikan dulu teorema-teorema terkait dan relevan yang dapat di jadikan acuan sebagai pembuktiannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. J. Pride, "Identities Among Relation of Groups Presentation, In Group Theory from Geometrical view point-Triese," *World Sci. Publ. Co*, pp. 687–717, 1991.

[2] A. G. Ahmad, "DALAM PERHITUNGAN GENERATOR MODUL HOMOTOPI KEDUA METODE Transformasi Tietze," vol. 12, no. 2, pp. 176–187.

[3] Yanita dan Ahmad (Universitas Andalas), "Computing Generator of Second Homotopy Module Using tietze Transformation Methods.," *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, vol. 8, no. 15, pp. 699–704, 2013.

[4] D. . Johnson, *Presentation of Group*. 1997.

[5] J. Bogley, W. A, Pride, S, "Calculating Generator of phy 2. In two dimensional homotopy and combinatorial group theory," in *Calculating Generator of phy 2. In two dimensional homotopy and combinatorial group theory*, 1993, pp. 157–188.

[6] W. K. A. and S. (N. Y. Magnus, "Combinatorial Group Theory : Presentation of Groups in Terms of Generator and relation," *Dover Publ.*, 1976.

[7] U. Dedi Mardianto(Andalas, "GENERATOR MODUL HOMOTOPI KEDUA UNTUK," vol. 2, no. April, 2016.

[8] M. I. C. F, "Combinatorial Group Theory," in *Lecturer Notes*, 2004.

[9] D. M. and L. Zippin, "Topological Transformation Groups," *Intersci. Publ.*, 1955.

[10] B. C. Hall, "Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction," *Grad. Texts Math. 222 (edisi ke-2nd), Springer, ISBN 978-3319134666*, 2015.

[11] J. Strom, "Modern Classical Homotopy Theory," *AMS, ISBN 9780821852866*, 2011.

[12] Y. G. H. Baik, "The Geometry of Group Extension J Group Theory," in *The Geometry of Group Extension J Group Theory*, 1998, pp. 395–416.

[13] P. H. and S. Wylie, "Homology Theory," *Cambridge Univ. Press*, 1967.

[14] J. Rotman, "An Introduction to Algebraic Topology," *Springer-Verlag, ISBN 0-387-96678-1*, 1998.

[15] Yanita and D. Mardianto, "The generator of second homotopy module of 〈x,y;xyx=yxy〉 and 〈a,b;a^2,b^3〉," *Int. Math. Forum*, vol. 11, no. 12, pp. 583–590, 2016, doi: 10.12988/imf.2016.6233.