

Karakterisasi Sebaran Binomial Negatif-Ekspensial

Deby Handayani

Matematika, Universitas Sumatera Barat, Indonesia
email: debyhandayani45@gmail.com

Received: 31 Agustus 2021, Accepted: 24 September 2021, Published: 30 September 2021

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang konvolusi atau penjumlahan dari peubah acak yang saling bebas dan identik, dimana peubah acak tersebut adalah distribusi Binomial Negatif dan distribusi Ekspensial, sehingga sebaran yang terbentuk dikenal dengan nama distribusi Binomial Negatif- Ekspensial. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari karakteristik dari sebaran tersebut diantaranya nilai harapan, nilai variansi, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik. Sifat ini diperoleh dengan menggunakan teorema-teorema dan lemma yang berhubungan dengan sifat-sifat pada sebuah distribusi. Diperoleh bahwa nilai harapan, nilai variansi, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dari distribusi Binomial Negatif-Ekspensial berturut turut adalah

$$E(S) = \frac{r(1-p)}{\lambda p}, \text{Var}(S) = \frac{r(1-p)(1+p)}{(\lambda p)^2}, M_S(t) = \left[\frac{p\lambda - pt}{p\lambda - t} \right]^r \text{ dan } \varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1-q\frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r$$

Kata Kunci: Distribusi Binomial Negatif-Ekspensial, Karakterisasi, Konvolusi

Abstract

This study discusses the convolution or the sum of independent and identical random variables, where the random variables are the Negative Binomial distribution and the Exponential distribution, so that the resulting distribution is known as the Negative Binomial -Exponential distribution. The purpose of this study is to find the characteristics of the distribution including the expected value, the variance value, the moment generating function and the characteristic function. This property is obtained by using theorems and lemmas that relate to the properties of a distribution. It is found that the expected value, variance value, moment generating function and characteristic function of the Negative Binomial-Exponential distribution are

$$E(S) = \frac{r(1-p)}{\lambda p}, \text{Var}(S) = \frac{r(1-p)(1+p)}{(\lambda p)^2}, M_S(t) = \left[\frac{p\lambda - pt}{p\lambda - t} \right]^r \text{ dan } \varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1-q\frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r$$

Keywords: Negative Binomial -Ekspensial Distribution, Characteristics, Convolution

PENDAHULUAN

Sebaran majemuk atau sering disebut *Compound Distribution* merupakan distribusi peubah acak yang terbentuk dari hasil penjumlahan peubah-peubah acak yang dinyatakan dengan $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ dimana N adalah peubah acak dan $X_1, X_2, \dots, X_N$ saling bebas[1]. Ketika N menyebar menurut distribusi Binomial Negatif maka sebaran tersebut disebut sebaran Binomial Negatif Majemuk. Selanjutnya ketika N menyebar menurut distribusi Binomial Negatif dan X menyebar menurut distribusi Ekspensial, maka sebaran tersebut disebut distribusi Binomial Negatif – Ekspensial[2].

Sebaran Binomial Negatif adalah distribusi yang memiliki banyak cara dalam penurunannya, salah satunya adalah sebagai salah satu percobaan Bernoulli yang dilakukan sampai terjadi k buah sukses, dengan setiap pengulangannya saling bebas dimana probabilitas gagalnya adalah $1 - p$ dan probabilitas suksesnya adalah p [3]. Sebaran Binomial Negatif memiliki fungsi kepadatan peluang

$$P(X = x) = \binom{r + x - 1}{x} p^r (1 - p)^x$$

dimana $x = 0, 1, 2, \dots$ dan $0 \leq p \leq 1$ (1)

Sebaran ekspensial merupakan salah satu distribusi kontinu dan suatu fungsi yang spesial dari distribusi Gamma yang berguna dalam mencari selisih waktu yang terjadi dalam suatu peluang pada daerah tertentu[1]. Selain itu distribusi ekspensial berguna untuk mengukur tingkat kegagalan yang terjadi dalam suatu peluang. Sebaran ekspensial memiliki fungsi kepadatan peluang

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

dimana $x > 0$ (2)

Aplikasi sebaran Binomial Negatif –Ekspensial digunakan dalam masalah proses antrian. Proses antrian merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum dapat dilayani, kemudian pelanggan tersebut begitu dilayani akan meninggalkan sarana tersebut jika sudah selesai dilayani [4][5]. Bentuk distribusi kedatangan ada dua yaitu jumlah kedatangan dan waktu antar kedatangan. Pada penelitian ini dimana jumlah antrian atau kedatangan menyebar menurut distribusi Binomial Negatif dan waktu tunggu antrian menyebar menurut distribusi Ekspensial.[6]

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari karakterisasi dari sebaran Binomial Negatif-Ekspensial memiliki beberapa karakterisasi diantaranya nilai harapan yang menggambarkan letak pusat suatu distribusi peluang, nilai variansi yang menggambarkan keragaman suatu distribusi, fungsi pembangkit momen yang memiliki kegunaan untuk membangkitkan momen-momen distribusi, dan fungsi karakterisasi yang digunakan untuk mengkaji kekonvergenan suatu fungsi distribusi

METODOLOGI

Penelitian ini merupakan penelitian yang dilaksanakan dengan menggunakan literatur (kepuustakaan), baik berupa buku maupun laporan penelitian sebelumnya. Penelitian ini merupakan penelitian pada bidang statistika. Penelitian ini bertujuan mencari karakterisasi sebaran Binomial Negatif -Ekspensial dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan bahan-bahan dan tinjauan yang diperlukan dalam penelitian ini
2. Mempelajari materi yang diperoleh dan membuktikan teorema yang terkait dengan penelitian ini
3. Menentukan karakterisasi sebaran Binomial Negatif yang terdiri dari nilai harapan, nilai variansi, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik
4. Menentukan karakterisasi sebaran Ekspensial yang terdiri dari nilai harapan, nilai variansi, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik
5. Menentukan karakterisasi sebaran Binomial Negatif-Ekspensial yang terdiri dari nilai harapan, nilai variansi, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik

Karakterisasi Distribusi Binomial Negatif

Jika X adalah peubah acak yang berdistribusi Binomial Negatif yang memiliki fungsi kepekatan peluang [7] sebagai berikut:

$$P(X = x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x$$

dimana $x = 0, 1, 2, \dots$ dan $0 \leq p \leq 1$

Maka nilai harapan dari peubah acak X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!} p^r (1-p)^x \\ &= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{x=1}^{\infty} \binom{r+x-1}{x-1} p^{r+1} (1-p)^{x-1} \end{aligned}$$

misalkan $y = x - 1$, maka

$$\begin{aligned} &= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{r+1+y-1}{y} p^{r+1} (1-p)^y \\ &= \frac{r(1-p)}{p} \end{aligned} \tag{3}$$

Jadi nilai harapan dari peubah acak X adalah $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$

Dengan cara yang sama diperoleh momen kedua peubah acak X yaitu

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x) \\ &= \frac{r(1-p)(1+r(1-p))}{p^2} \end{aligned}$$

Sehingga nilai variansi dari peubah acak X adalah

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{r(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

Jadi nilai harapan dari peubah acak X adalah $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ (4)

Adapun fungsi pembangkit momen dari peubah acak X [8] dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX} \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x \\ &= p^r \sum_{x=1}^{\infty} \binom{r+x-1}{x} ((1-p)e^t)^x \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $(1-p)e^t = 1-p^*$, maka diperoleh

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{(1-(1-p)e^t)} \right)^r \quad (5)$$

Dengan cara yang sama diperoleh fungsi karakteristik dari peubah acak X adalah $\varphi_X(t) = \left(\frac{p}{(1-(1-p)e^{it})} \right)^r$

Karakterisasi Distribusi Eksponensial

Jika X adalah peubah acak yang berdistribusi Eksponensial yang memiliki fungsi kepekatan peluang [3] sebagai berikut

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

dimana $x > 0$

Maka fungsi pembangkit momen dari peubah acak X dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_0^{\infty} e^{tX} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{tX-\lambda x} dx \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda-t} e^{-x(\lambda-t)} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \end{aligned} \quad (6)$$

Nilai harapan dari peubah acak X dapat diperoleh dari turunan pertama dari fungsi pembangkit momen peubah acak X ketika $t=0$, sehingga diperoleh

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Nilai variansi dari peubah acak X dapat diperoleh dengan cara mencari momen kedua dari peubah acak X sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0} \\
 &= \left(\frac{2\lambda(\lambda-t)}{(\lambda-t)^4} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{2}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

Sehingga nilai variansi dari peubah acak X adalah

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \frac{1}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

Jadi nilai harapan dari peubah acak X adalah $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ (7)

Adapun fungsi karakteristik dari peubah acak X [8] dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\
 &= \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \lambda \int_0^\infty e^{itx - \lambda x} dx \\
 &= -\frac{\lambda}{(\lambda - it)} e^{-x(\lambda - it)} \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda - it}
 \end{aligned} \tag{8}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Karakterisasi Distribusi Majemuk

Distribusi majemuk merupakan penjumlahan dari peubah-peubah acak dimana banyaknya peubah acak tersebut juga merupakan peubah acak.

Definisi, [9] [5]: Peubah acak $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ dimana X dan N masing-masing merupakan peubah acak dari X_i peubah acak yang saling bebas dan identik, S mempunyai fungsi distribusi

$$\begin{aligned}
 F_S(x) &= P(S \leq x) \\
 &= \sum_{n=0}^\infty p_n P(S \leq x | N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^\infty p_n F_X^{*n}(x)
 \end{aligned}$$

Teorema 1. [6] [10]: Jika Peubah acak $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ dimana X dan N masing-masing merupakan peubah acak dari X_i peubah acak yang saling bebas dan identik, maka nilai harapan dari peubah acak S adalah

$$E(S) = E(N)E(X)$$

Bukti. Perhatikan bahwa jika X sebarang peubah acak yang saling bebas dan identik maka

$$\begin{aligned}
 E(S) &= E[\sum_{i=1}^N X_i] \\
 &= E[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N)|N] \\
 &= E[E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_N)] \\
 &= E[NE(X)] \\
 &= E(N)E(X)
 \end{aligned}$$

Teorema 2. [6][1]: Jika Peubah acak $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ dimana X dan N masing-masing merupakan peubah acak dari X_i peubah acak yang saling bebas dan identik, maka nilai variansi dari peubah acak S adalah

$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2$$

Bukti. Perhatikan bahwa jika X sebarang peubah acak yang saling bebas dan identik maka

$$\begin{aligned}
 Var(S) &= E_N[Var(S|N)] + Var_N[E(S|N)] \\
 &= E_N[Var(X_1 + X_2 + \dots + X_N)|N] + Var_N[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N)|N] \\
 &= E_N[NVar(X)] + Var_N[NE(X)] \\
 &= E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2
 \end{aligned}$$

Teorema 3. [6][1]: Jika Peubah acak $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ dimana X dan N masing-masing merupakan peubah acak dari X_i peubah acak yang saling bebas dan identik, maka fungsi pembangkit moment dari peubah acak S adalah

$$M_S(t) = M_N[\ln(M_X(t))]$$

Bukti. Perhatikan bahwa jika X sebarang peubah acak yang saling bebas dan identik maka

$$\begin{aligned}
 M_S(t) &= E[e^{tS}] \\
 &= E_N[E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_N)}|N)] \\
 &= E_N[E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_N})|N] \\
 &= E_N[M_X(t)^N] \\
 &= M_N[\ln(M_X(t))]
 \end{aligned}$$

Teorema 4. [6][1] : Jika Peubah acak $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ dimana X dan N masing-masing merupakan peubah acak dari X_i peubah acak yang saling bebas dan identik, maka fungsi pembangkit moment dari peubah acak S adalah

$$\varphi_S(t) = M_N[\ln(\varphi_X(t))]$$

Bukti. Perhatikan bahwa jika X sebarang peubah acak yang saling bebas dan identik maka

$$\begin{aligned}\varphi_S(t) &= E[e^{itS}] \\ &= E_N[E(e^{it(X_1+X_2+\dots+X_N)}|N)] \\ &= E_N[E(e^{itX_1})E(e^{itX_2}) \dots E(e^{itX_N})|N] \\ &= E_N[\varphi_X(t)^N] \\ &= M_N[\ln(\varphi_X(t))]\end{aligned}$$

Karakterisasi Distribusi Binomial Negatif-Ekspensial

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat atau karakterisasi sebaran Binomial Negatif-Ekspensial.

Proposisi [1]: Misalkan S adalah suatu peubah acak yang terdistribusi Binomial Negatif -Ekspensial maka nilai harapan dari peubah acak S adalah

$$E(S) = \frac{r(1-p)}{\lambda p}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 1 nilai harapan sebaran Binomial Negatif -Ekspensial dapat diperoleh dari

$$\begin{aligned}E(S) &= E(N)E(X) \\ &= \frac{r(1-p)}{p} \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{r(1-p)}{\lambda p}\end{aligned}$$

Proposisi[11]: Misalkan S adalah suatu peubah acak yang terdistribusi Binomial Negatif -Ekspensial maka nilai variansi dari peubah acak S adalah

$$Var(S) = \frac{r(1-p)(p+1)}{(p\lambda)^2}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2 nilai varian sebaran Binomial Negatif -Ekspensial dapat diperoleh dari

$$\begin{aligned}Var(S) &= E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2 \\ &= \frac{r(1-p)}{p} \frac{1}{\lambda^2} + \frac{r(1-p)}{p^2} \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{r(1-p)(p+1)}{(p\lambda)^2}\end{aligned}$$

Proposisi[11]: Misalkan S adalah suatu peubah acak yang terdistribusi Binomial Negatif -Ekspensial maka fungsi pembangkit momen dari peubah acak S adalah

$$M_S(t) = \left[\frac{p\lambda - pt}{p\lambda - t} \right]^r$$

Bukti. Berdasarkan teorema 3 fungsi pembangkit momen sebaran Binomial Negatif -Ekspensial dapat diperoleh dari

$$\begin{aligned}M_S(t) &= M_N[\ln(M_X(t))]\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&= \left[\frac{p}{(1-(1-p)M_X(t))} \right]^r \\ &= \left[\frac{p\lambda - pt}{p\lambda - t} \right]^r\end{aligned}$$

Proposisi[11]: Misalkan S adalah suatu peubah acak yang terdistribusi Binomial Negatif -Ekspensial maka fungsi karakteristik dari peubah acak S adalah

$$\varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1 - q \frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r$$

Bukti. Berdasarkan teorema 4 fungsi karakteristik sebaran Binomial Negatif - Ekspensial dapat diperoleh dari

$$\begin{aligned}\varphi_S(t) &= M_N[\ln(\varphi_X(t))] \\ &= \left[\frac{p}{(1 - (1-p)\varphi_X(t))} \right]^r \\ &= \left[\frac{p}{(1 - q \frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r\end{aligned}$$

SIMPULAN

Sebuah distribusi majemuk yang berbentuk $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ dimana N adalah peubah acak dan $X_1, X_2, \dots, X_N$ saling bebas. Ketika N menyebar menurut distribusi Binomial Negatif maka sebaran tersebut disebut sebaran Binomial Negatif Majemuk. Selanjutnya ketika N menyebar menurut distribusi Binomial Negatif dan X menyebar menurut distribusi Ekspensial, maka sebaran tersebut disebut distribusi Binomial Negatif -Ekspensial. Distribusi Binomial Negatif -Ekspensial memiliki sifat atau karakterisasi sebagai berikut

1. Nilai harapan distribusi Binomial Negatif -Ekspensial adalah

$$E(S) = \frac{r(1-p)}{\lambda p}$$

2. Nilai variansi distribusi Binomial Negatif -Ekspensial adalah

$$Var(S) = \frac{r(1-p)(p+1)}{(p\lambda)^2}$$

3. Fungsi pembangkit momen distribusi Binomial Negatif-Ekspensial adalah

$$M_S(t) = \left[\frac{p\lambda - pt}{p\lambda - t} \right]^r$$

4. Fungsi karakteristik distribusi Binomial Negatif-Ekspensial adalah

$$\varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1 - q \frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] S. Ken-Iti, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge university press, 1999.
- [2] T. Artikis, "Constructing infinitely divisible characteristic functions," *Arch. Math.*, vol. 19, no. 2, pp. 57–61, 1983.
- [3] B. Casella, G. dan R. L, "Statistical Inference Ed. 1," 1990.
- [4] H. Schmidli, *Risk theory*. Springer, 2017.
- [5] R. G. Laha and V. K. Rohatgi, "Operator semistable probability measures on a Hilbert space," *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol. 22, no. 3, pp. 397–406, 1980.
- [6] H. H. Panjer and G. E. Willmot, "Finite sum evaluation of the negative binomial-exponential model," *ASTIN Bull. J. IAA*, vol. 12, no. 2, pp. 133–137, 1981.
- [7] K. L. Chung and K. Zhong, *A course in probability theory*. Academic press, 2001.
- [8] E. Lukacs, *Characteristic functions*, no. 5. C. Griffin, 1960.
- [9] E. Furman, "On the convolution of the negative binomial random variables," *Stat. Probab. Lett.*, vol. 77, no. 2, pp. 169–172, 2007.
- [10] H. G. Tucker, *An introduction to probability and mathematical statistics*. Academic Press, 2014.
- [11] F. MAINARDI, "The origin of infinitely divisible distributions: from de Finetti's problem to Lévy-Khintchine formula Francesco MAINARDI (and Sergei ROGOSIN (2)," *arXiv Prepr. arXiv0801.1910*, 2008.