Volume 2 Issue 1 (2022) Pages 31-40 P-ISSN:2798-2696 E-ISSIN:2798-0057
JOSTECH
Journal of Science and Technology
Website: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/jostech Email: jostech@uinib.ac.id

Generalisasi f_q-Derivasi di B-Aljabar

Elsi Fitria ✉[1], Sri Gemawati[2], Khoirunnisa Sugianti[3]
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau, Indonesia[1,2,3]
email: elsifitria823@gmail.com[1] , gemawati.sri@gmail.com[2] ,
khoirunnisa.sugianti13@gmail.com[3]

Received 31 Januari 2022, Accepted 24 Februari 2022, Published 31 Maret 2022

Abstrak

Pada artikel ini, didefinisikan jenis lain dari derivasi di B-aljabar dengan mendefinisikan dua buah *self-map* yang satu diantaranya merupakan derivasi di B-aljabar (dilambangkan dengan d) dan yang lainnya dinamakan generalisasi derivasi di B-aljabar (dilambangkan dengan D). Berdasarkan pendefinisian tersebut dikonstruksi sifat-sifat generalisasi (l, r)-derivasi dan generalisasi (r, l)-derivasi di B-aljabar, kemudian terdapat satu sifat yang sama, yaitu jika d dan D adalah fungsi identitas, maka D reguler. Kemudian, konsep generalisasi derivasi tersebut dijadikan acuan untuk mendefinisikan konsep generalisasi f_q-derivasi di B-aljabar. Pada bagian akhir, dibahas sifat-sifat generalisasi f_q-derivasi di B-aljabar.

Kata Kunci: (l, r)-f_q-*derivasi;* (r, l)-f_q-*derivasi; generalisasi* f_q-*derivasi.*

Abstract

In this paper, another type of derivation in B-algebra is defined, by defining two self-maps, one of which is a derivation in B-algebra (denoted by d) and the other is called generalization of derivation in B-algebra (denoted by D). Based on this definition, some properties of generalized (l, r)*-derivation and generalized* (r, l)*-derivation in B-algebra are constructed, then there is one common property, that is if d and D are identity functions, then D is regular. Then, the concept is used as a reference to define the generalized* f_q*-derivation in B-algebra. In the last section, we discuss some properties of generalized* f_q*-derivations in B-algebras.*

Keywords: (l, r)-f_q-*derivation;* (r, l)-f_q-*derivation; generalized* f_q-*derivation.*

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan, dan kuantitas. Untuk mempelajari hal-hal ini dalam aljabar digunakan simbol (biasanya berupa huruf) untuk merepresentasikan bilangan secara umum sebagai sarana penyederhanaan dan alat bantu memecahkan masalah. Contohnya, x mewakili bilangan yang diketahui dan y bilangan yang ingin diketahui. Aljabar abstrak atau lebih sering dikenal dengan aljabar modern adalah salah satu cabang ilmu aljabar yang mempelajari stuktur aljabar seperti grup, ring, dan lapangan atau field yang didefinisikan dan diajarkan secara aksiomatis.

Kajian tentang aljabar abstrak terus berkembang, diantaranya adalah ditemukannya aljabar-aljabar baru. Neggers dan Kim [1] memperkenalkan konsep B-aljabar, yaitu suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang dinotasikan dengan $(X; *, 0)$, serta memenuhi aksioma $(B1)$ $x*x = 0$, $(B2)$ $x * 0 = x$, dan $(B3)$ $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ untuk setiap $x, y, z \in X$. Kemudian, C. B. Kim dan H. S. Kim [2] mengkonstruksi generalisasi dari B-aljabar yang dinamakan BG-aljabar, yang memenuhi aksioma $(B1)$, $(B2)$, dan (BG) $(x * y) * (0 * y) = x$ untuk setiap $x, y \in X$. Selain generalisasinya, C. B. Kim dan H. S. Kim [5] juga membahas bentuk khusus dari B-aljabar yang dinamakan BM-aljabar yang dinotasikan dengan $(X; *, 0)$ dan memenuhi aksioma $(B2)$ dan $(A2)$ $(z * x) * (z * y) = y * x$ untuk setiap $x, y, z \in X$. Bentuk khusus lainnya dari B-aljabar diperkenalkan oleh Kim dan Park [3] yang dinamakan B-aljabar 0-komutatif.

Konsep derivasi pertama kali dibahas dalam kajian ring dan *near* ring. Namun, seiring perkembangan aljabar abstrak, konsep derivasi telah dibahas dalam struktur aljabar lainnya. Al-Shehri [4] telah membahas konsep derivasi di B-aljabar. Hasil yang diperoleh adalah mendefinisikan konsep (l,r)-derivasi, (r, l)derivasi, dan suatu reguler di B-aljabar. Selain itu, juga diperoleh sifat-sifat derivasi dan derivasi reguler di B-aljabar. Kemudian, beberapa peneliti telah memperkenalkan jenis lain dari derivasi, seperti Muangkarn et al. [8] yang membahas tentang f_q-derivasi di B-aljabar, Soleimani dan Jahangiri [5] yang membahas t-derivasi di B-aljabar, dan Gemawati et al. [6] yang membahas f_q-derivasi di BN_1-aljabar beserta sifat-sifatnya.

Pada penelitian lainnya, ditemukan konsep baru sebagai bentuk generalisasi dari derivasi. Diantaranya adalah Ganeshkumar dan Chandramouleeswaran [7] yang membahas generalisasi derivasi di TM-aljabar dan Sugianti dan Gemawati [8] yang membahas tentang generalisasi derivasi di BM-aljabar. Kemudian, penelitian tentang generalisasi t-derivasi di B-aljabar telah dibahas oleh Fitria et al. [9]. Hasil penelitiannya adalah mendefinisikan generalisasi (l,r)-t-derivasi dan generalisasi (r,l)-t-derivasi di B-aljabar, serta mengkonstruksi sifat-sifatnya.

Dalam artikel ini didefinisikan konsep generalisasi (l,r)-derivasi, generalisasi (r,l)-derivasi, dan generalisasi derivasi di B-aljabar, sehingga diperoleh sifat-sifat yang dimilikinya. Kemudian, dibahas konsep generalisasi (l,r)-f_q-derivasi, generalisasi (r,l)-f_q-derivasi, dan generalisasi f_q-derivasi di B-aljabar yang menghasilkan beberapa sifat terkait.

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini, diberikan beberapa definisi yang diperlukan untuk mengkonstruksi hasil utama dari penelitian. Dimulai dengan beberapa definisi dan teori tentang B-aljabar beserta sifat-sifatnya. Kemudian, diberikan konsep derivasi di B-aljabar, t-derivasi di B-aljabar, f_q-derivasi di B-aljabar, dan generalisasi t-derivasi di B-aljabar yang telah dibahas pada [1, 2, 7, 8, 9, 10].

Definisi 2.1. [1] B-aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku aksioma berikut:
($B1$) $x * x = 0$,
($B2$) $x * 0 = x$,
($B3$) $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$.

Contoh 1. Misalkan $X = \{ 0, 1, 2 \}$ suatu himpunan dengan tabel *Cayley* berikut ini.

Tabel 1: Tabel *Cayley* untuk $(X; *, 0)$

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Dapat dibuktikan bahwa $(X; *, 0)$ memenuhi semua aksioma B-aljabar, sehingga $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar.

Teorema 2.2. [1] Jika $(X ; *, 0)$ suatu B-aljabar maka untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:
(i) $0 * (0 * x) = x$,
(ii) $(x * y) * (0 * y) = x$,
(iii) $y * z = y * \big(0 * (0 * z)\big)$,
(iv) $x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y$,
(v) Jika $x * z = y * z$, maka $x = y$,
(vi) Jika $x * y = 0$, maka $x = y$.

Bukti. Pembuktian Teorema 2.2 telah diberikan pada [1].

Definisi 2.3. [3] Suatu B-aljabar $(X ; *, 0)$ dikatakan 0-komutatif jika memenuhi $x * (0 * y) = y * (0 * x)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Teorema 2.4. [3] Misalkan $(X ; *, 0)$ adalah B-aljabar 0-komutatif, maka
(i) $(0 * x) * (0 * y) = y * x$,
(ii) $x * (x * y) = y$,
(iii) $(x * a) * (y * b) = (b * a) * (y * x)$,
(iv) $(x * z) * (y * z) = x * y$,
(v) $(x * y) * z = (x * z) * y$,
untuk setiap $a, b, x, y, z \in X$.

Bukti. Pembuktian Teorema 2.4 telah diberikan pada [3].

Konsep derivasi di B-aljabar telah dibahas dalam [4]. Misalkan $(X ; *, 0)$ suatu B-aljabar, dinotasikan $x \wedge y = y * (y * x)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Definisi 2.5. [4] Misalkan $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar. Suatu pemetaan $d: X \to X$ disebut (l,r)-derivasi dari X jika memenuhi $d(x * y) = (d(x) * y) \wedge (x * d(y))$ untuk setiap $x,y \in X$, dan disebut (r,l)-derivasi dari X jika memenuhi $d(x * y) = (x * d(y)) \wedge (d(x) * y)$. Pemetaan d disebut derivasi dari X jika d merupakan (l,r)-derivasi sekaligus (r,l)-derivasi dari X.

Definisi 2.6. [4] Misalkan (X; $*$, 0) suatu B-aljabar. Pemetaan d:X→X dikatakan reguler jika memenuhi $d(0)$= 0.

Definisi 2.7. [5] Misalkan (X; $*$, 0) suatu B-aljabar. Suatu pemetaan d_t dari X ke dirinya sendiri untuk sebarang $t \in X$ didefinisikan sebagai $d_t\ (x) = x * t$ untuk setiap x ∈ X.

Definisi 2.8. [5] Misalkan (X; $*$, 0) adalah B-aljabar. Suatu pemetaan d_t dari X ke dirinya sendiri disebut (l,r)-t-derivasi di X jika memenuhi

$$d_t(x * y) = (d_t(x) * y) \wedge (x * d_t(y))$$

untuk setiap x,$y \in X$ dan disebut (r,l)-t-derivasi di X jika memenuhi

$$d_t(x * y) = (x * d_t(y)) \wedge (d_t(x) * y).$$

Pemetaan d_t disebut t-derivasi di X jika d_t merupakan (l,r)-t-derivasi sekaligus (r,l)-t-derivasi di X.

Misalkan f adalah suatu pemetaan dari B-aljabar (X; $*$, 0) ke dirinya sendiri. f adalah endomorfisma dari X jika memenuhi $f(x * y) = f(x) * f(y)$ untuk setiap x, $y \in X$. Kemudian, didefinisikan suatu pemetaan d_q^f dari X ke dirinya sendiri dengan $d_q^f(x) = f(x) * q$ untuk setiap x, $q \in X$.

Definisi 2.9. [8] Suatu pemetaan d_q^f dari X ke dirinya sendiri disebut (l,r)-f_q-derivasi di X jika memenuhi $d_q^f(x * y) = (d_q^f(x) * f(y)) \wedge (f(x) * d_q^f(\mathrm{y}))$ untuk setiap x, $y \in X$ dan disebut (r,l)-f_q-derivasi di X jika memenuhi $d_q^f(x * y) = (f(x) * d_q^f\ (y)) \wedge (d_q^f(x) * f(y))$. Pemetaan d_q^f disebut f_q-derivasi di X jika d_q^f merupakan (l,r)-f_q-derivasi sekaligus (r,l)-f_q-derivasi di X.

Definisi 2.10. [9] Misalkan *(X; $*$, 0)* adalah B-aljabar. Suatu pemetaan D_t dari X ke dirinya sendiri dikatakan generalisasi *(l,r)-t*-derivasi di X jika terdapat suatu *(l,r)-t*-derivasi d_t di X sehingga

$$D_t(x * y) = (D_t(x) * y) \wedge (x * d_t(y))$$

untuk setiap x,$y \in X$ dan D_t dikatakan generalisasi (r,l)-t-derivasi di X jika terdapat suatu *(r,l)-t*-derivasi d_t di X sehingga

$$D_t(x * y) = (x * D_t(y)) \wedge (d_t(x) * y).$$

Jika D_t adalah generalisasi *(l,r)-t*-derivasi sekaligus generalisasi *(r,l)-t*-derivasi di X, maka D_t dikatakan generalisasi t-derivasi di X.

GENERALISASI DERIVASI DI *B*-ALJABAR

Pada bagian ini, didefinisikan generalisasi (l,r)-derivasi, generalisasi (r,l)-derivasi, dan generalisasi derivasi di B-aljabar dan diperoleh sifat-sifatnya.

Definisi 3.1. Misalkan (X; $*$, 0) adalah B-aljabar. Suatu pemetaan D:X→X disebut generalisasi (l,r)-derivasi jika terdapat (l,r)-derivasi d:X→X sehingga

$$D(x * y) = (D(x) * y) \wedge (x * d(y))$$

untuk setiap x, $y \in X$. Jika terdapat (r,l)-derivasi d:X→X sehingga

$$D(x * y) = (x * D(y)) \wedge (d(x) * y)$$

untuk setiap $x,\ y \in X$, maka D disebut generalisasi (r,l)-derivasi. Jika D adalah generalisasi (l,r)-derivasi sekaligus generalisasi (r,l)-derivasi, maka D disebut generalisasi derivasi dari X.

Contoh 2. Diberikan $X = \{0,\ 1, 2\}$ suatu himpunan dengan tabel *Cayley* berikut:

Tabel 2: Tabel *Cayley* untuk (X;$*$,0)

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Dari Tabel 2 dapat dibuktikan bahwa X adalah B-aljabar. Didefinisikan pemetaan $D : X \to X$ dengan $D(x) = x$ dan $d : X \to X$ dengan

$$d(x) = \begin{cases} 0 & jika\ x = 0, \\ 2 & jika\ x = 1, \\ 1 & jika\ x = 2. \end{cases}$$

Dapat dibuktikan bahwa D adalah generalisasi derivasi di X.

Definisi 3.2. Misalkan (X; $*$, 0) suatu B-aljabar. Pemetaan $D: X \to X$ dikatakan reguler jika memenuhi $D(0) = 0$.

Teorema 3.3. Misalkan (X;$*$,0) suatu B-aljabar dan D adalah generalisasi (l, r)-derivasi di X.

(i) Jika d fungsi identitas maka $D(0) = D(x) * x$ untuk setiap $x \in X$,
(ii) Jika d reguler, maka $D(x) = D(x) \wedge x$ untuk setiap $x \in X$.
(iii) Jika d dan D fungsi identitas maka D reguler.

Bukti. Misalkan (X; $*$,0) adalah B-aljabar dan D adalah generalisasi (l, r)-derivasi di X.

(i) Karena d fungsi identitas, maka $d(x) = x$, sehingga

$$\begin{aligned} D(0) &= D(x * x) && [B1] \\ &= (D(x) * x) \wedge (x * x) \\ &= (D(x) * x) \wedge 0 \\ \\ &= 0 * [0 * (D(x) * x)] \\ D(0) &= D(x) * x. && \text{[Lemma 2.2(i)]} \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $D(0) = D(x) * x$ untuk setiap $x \in X$.

(ii) Karena d reguler maka $d(0) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} D(x) &= D(x * 0) && [B2] \\ &= (D(x) * 0) \wedge (x * d(0)) \\ &= D(x) \wedge (x * 0) \\ D(x) &= D(x) \wedge x && [B2] \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $D(x) = D(x) \wedge x$ untuk setiap $x \in X$.

(iii) Karena D adalah fungsi identitas maka dari (i) diperoleh $D(0) = D(x) * x = x * x = 0$, sehingga terbukti bahwa D reguler.

Teorema 3.4. Misalkan $(X;* ,0)$ suatu B-aljabar dan D adalah generalisasi (*r, l*)-derivasi di X, maka

(i) Jika d fungsi identitas maka $D(0) = x * D(x)$ untuk setiap $x \in X$,

(ii) Jika D reguler, maka $D(x) = x \wedge d(x)$ untuk setiap $x \in X$.

(iii) Jika d dan D fungsi identitas maka D reguler.

Bukti. Misalkan $(X; * ,0)$ adalah B-aljabar dan D adalah generalisasi (*l, r*)-derivasi di X.

(i) Karena d fungsi identitas, maka $d(x) = x$, sehingga

$$\begin{aligned} D(0) &= D(x * x) && [B1] \\ &= (x * D(x)) \wedge (d(x) * x) \\ &= (x * D(x)) \wedge (x * x) \\ &= (x * D(x)) \wedge 0 && [B1] \\ &= 0 * [0 * (x * D(x))] \\ D(0) &= x * D(x). && [\text{Lemma 2.2(i)}] \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $D(0) = x * D(x)$ untuk setiap $x \in X$.

(ii) Karena D reguler maka $D(0) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} D(x) &= D(x * 0) && [B2] \\ &= (x * D(0)) \wedge (d(x) * 0) \\ &= (x * 0) \wedge d(x) \\ D(x) &= x \wedge d(x) && [B2] \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $D(x) = x \wedge d(x)$ untuk setiap $x \in X$.

(iii) Karena D adalah fungsi identitas maka dari (i) diperoleh $D(0) = x * D(x) = x * x = 0$, sehingga terbukti bahwa D reguler.

Teorema 3.5. Misalkan $(X; * ,0)$ suatu B-aljabar dan D adalah generalisasi derivasi di X. Jika d dan D fungsi identitas maka D reguler.

Bukti. Misalkan D adalah generalisasi (*l, r*)-derivasi di X, maka dari Teorema 3.3 (iii) terbukti bahwa D reguler dan jika D adalah generalisasi (*r, l*)-derivasi di X, maka dari Teorema 3.4 (iii) juga terbukti bahwa D reguler.

Teorema 3.5 tidak berlaku sebaliknya.

GENERALISASI f_q-DERIVASI DI B-ALJABAR

Pada bagian ini didefinisikan konsep generalisasi (*l, r*)-f_q-derivasi dan generalisasi (*r, l*)-f_q-derivasi di B-aljabar dan diberikan sifat-sifat yang dimilikinya.

Definisi 4.1. Misalkan *(X; ∗, 0)* adalah B-aljabar. Suatu pemetaan D_q^f dari X ke dirinya sendiri dikatakan generalisasi *(l,r)*-f_q-derivasi di X jika terdapat suatu *(l,r)*-f_q-derivasi d_q^f di X sehingga

$$D_q^f(x*y) = (D_q^f(x)*f(y)) \wedge (f(x)*d_q^f(y))$$

untuk setiap $x,y \in X$ dan D_q^f dikatakan generalisasi (r,l)-f_q-derivasi di X jika terdapat suatu *(r,l)*-f_q-derivasi d_q^f di X sehingga

$$D_q^f(x*y) = (f(x)*D_q^f(y)) \wedge (d_q^f(x)*f(y)).$$

Jika D_q^f adalah generalisasi *(l,r)*-f_q-derivasi sekaligus generalisasi *(r,l)*-f_q-derivasi di *X*, maka D_q^f dikatakan generalisasi f_q-derivasi di *X*.

Berikut ini diberikan sifat yang menyatakan eksistensi dari generalisasi f_q-derivasi di B-aljabar.

Teorema 4.2. Misalkan *(X; ∗, 0)* adalah B-aljabar dan D_q^f adalah suatu pemetaan dari X ke dirinya sendiri, maka

(i) D_0^f adalah generalisasi *(l,r)*-f_q-derivasi di *X*,

(ii) D_0^f adalah generalisasi *(r,l)*-f_q-derivasi di *X*,

(iii) D_0^f adalah generalisasi f_q-derivasi di *X*.

Bukti. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar dan D_q^f adalah suatu pemetaan dari X ke dirinya sendiri.

(i) Berdasarkan aksioma $B1$ untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh

$$\begin{aligned} D_0^f(x*y) &= f(x*y)*0 \\ &= f(x*y)*[f(x*y)*f(x*y)] \\ &= f(x*y) \wedge f(x*y) \\ &= [f(x)*f(y)] \wedge [f(x)*f(y)] \\ &= [(f(x)*0)*f(y)] \wedge [f(x)*(f(y)*0)] \\ D_0^f(x*y) &= \left(D_0^f(x)*f(y)\right) \wedge \left(f(x)*d_0^f(y)\right). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa D_0^f adalah generalisasi (l,r)-f_q-derivasi di X.

(ii) Berdasarkan aksioma $B1$ untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh

$$\begin{aligned} D_0^f(x*y) &= (x*y)*0 \\ &= (x*y)*[(x*y)*(x*y)] \\ &= (x*y) \wedge (x*y) \\ D_0^f(x*y) &= \left(x*D_0^f(y)\right) \wedge \left(d_0^f(x)*y\right). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa D_0^f adalah generalisasi (r,l)-f_q-derivasi di X.

(iii) Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa D_0^f adalah generalisasi (l,r)-f_q-derivasi dan generalisasi (r,l)-f_q-derivasi di X. Oleh karena itu, terbukti bahwa D_0^f adalah generalisasi f_q-derivasi di X.

Dengan demikian, Teorema 4.2 terbukti.

Selanjutnya diberikan sifat-sifat generalisasi f_q-derivasi di B-aljabar.

Teorema 4.3. Misalkan *(X; ∗, 0)* adalah B-aljabar dan D_q^f adalah generalisasi *(l,r)*-f_q-derivasi di *X*.

(i) Jika $d_q^f = f$, maka $D_q^f(0) = D_q^f(x) * f(x)$ untuk setiap $x \in X$,

(ii) Jika $d_q^f = f$ dan D_q^f reguler, maka $D_q^f = f$,

(iii) Jika d_q^f reguler, maka $D_q^f(x) = D_q^f(x) \wedge f(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Bukti. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar dan D_q^f adalah generalisasi *(l,r)*-f_q-derivasi di X.

(i) Karena $d_q^f = f$, dari aksioma $B1$ dan Lema 2.2 (i), untuk setiap $x \in X$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
D_q^f(0) &= D_q^f(x * x) \\
&= (D_q^f(x) * f(x)) \wedge (f(x) * d_q^f(x)) \\
&= (D_q^f(x) * f(x)) \wedge (f(x) * f(x)) \\
&= (D_q^f(x) * f(x)) \wedge 0 \\
&= 0 * (0 * (D_q^f(x) * f(x))) \\
D_q^f(0) &= D_q^f(x) * f(x).
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $D_q^f(0) = D_q^f(x) * f(x)$ untuk setiap $x \in X$.

(ii) Karena $d_q^f = f$ dan D_q^f reguler, maka dari (i), Lema 2.3 (v), dan aksioma $B1$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
D_q^f(0) &= 0 \\
D_q^f(x) * f(x) &= 0 \\
D_q^f(x) * f(x) &= f(x) * f(x) \\
D_q^f(x) &= f(x),
\end{aligned}
$$

untuk setiap $x \in X$. Jadi, terbukti bahwa $D_q^f = f$.

(iii) Karena d_q^f reguler, maka berdasarkan aksioma $B2$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
D_q^f(x) &= D_q^f(x * 0) \\
&= (D_q^f(x) * f(0)) \wedge (f(x) * d_q^f(0)) \\
&= (D_q^f(x) * 0) \wedge (f(x) * 0) \\
D_q^f(x) &= D_q^f(x) \wedge f(x),
\end{aligned}
$$

untuk setiap $x \in X$.

Dengan demikian, Teorema 4.3 terbukti.

Teorema 4.4. Misalkan *(X; ∗, 0)* adalah B-aljabar dan D_q^f adalah generalisasi *(r,l)*-f_q-derivasi di X.

(i) Jika $d_q^f = f$, maka $D_q^f(0) = f(x) * D_q^f(x)$ untuk setiap $x \in X$,

(ii) Jika $d_q^f = f$ dan D_q^f reguler, maka $D_q^f = f$,

(iii) Jika D_q^f reguler, maka $D_q^f(x) = f(x) \wedge d_q^f(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Bukti. Misalkan $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar dan D_q^f adalah generalisasi *(r,l)*-f_q-derivasi di X.

(i) Karena $d_q^f = f$, maka dari aksioma $B1$ dan Lema 2.2 (i), untuk setiap $x \in X$ diperoleh

$$\begin{aligned} D_q^f(0) &= D_q^f(x * x) \\ &= (f(x) * D_q^f(x)) \wedge (d_q^f(x) * f(x)) \\ &= (f(x) * D_q^f(x)) \wedge (f(x) * f(x)) \\ &= (f(x) * D_q^f(x)) \wedge 0 \\ &= 0 * (0 * (f(x) * D_q^f(x))) \\ D_q^f(0) &= f(x) * D_q^f(x). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $D_q^f(0) = f(x) * D_q^f(x)$ untuk setiap $x \in X$.

(ii) Karena $d_q^f = f$, maka dari (i) diperoleh $D_q^f(0) = f(x) * D_q^f(x)$ untuk setiap $x \in X$. Karena D_q^f reguler maka dari Lema 2.2 (v) dan aksioma $B1$ diperoleh

$$\begin{aligned} D_q^f(0) &= 0 \\ f(x) * D_q^f(x) &= 0 \\ f(x) * D_q^f(x) &= D_q^f(x) * D_q^f(x) \\ f(x) &= D_q^f(x), \end{aligned}$$

untuk setiap $x \in X$. Jadi, terbukti bahwa $D_q^f = f$.

(iii) Karena D_q^f reguler, maka berdasarkan aksioma $B2$ diperoleh

$$\begin{aligned} D_q^f(x) &= D_q^f(x * 0) \\ &= (f(x) * D_q^f(0)) \wedge (d_q^f(x) * f(0)) \\ &= (f(x) * 0) \wedge (d_q^f(x) * 0) \\ D_q^f(x) &= f(x) \wedge d_q^f(x), \end{aligned}$$

untuk setiap $x \in X$.

Dengan demikian, Teorema 4.4 terbukti.

Teorema 4.5. Misalkan *(X; ∗, 0)* adalah B-aljabar dan D_q^f adalah generalisasi f_q-derivasi di *X*. Jika $d_q^f = f$ dan D_q^f reguler, maka $D_q^f = f$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 4.3(ii) dan Teorema 4.4(ii), maka teorema ini terbukti.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. Neggers and K. Sik, "On B-algebras," *Mat. Vesn.*, vol. 54, no. 1–2, pp. 21–29, 2002.

[2] C. B. Kim and H. S. Kim, "On BG-algebras," *Demonstr. Math.*, vol. 41, pp. 497–505, 2008.

[3] H. S. Kim and H. G. Park, "On 0-commutative B-algebras," *Sci. Math. Jpn.*, vol. 62, no. 1, p. 7, 2005.

[4] N. O. Al-Shehri, "Derivations of B-algebras," *JKAU Sci*, vol. 22, no. 1, pp. 71–83, 2010.

[5] R. Soleimani and S. Jahangiri, "A note on t-derivations of B-algebras," *J. Math. Comput. Sci.*, vol. 10, pp. 138–143, 2014.

[6] S. Gemawati, A. Sirait, M. Musraini, and E. Fitria, "f_q-Derivations of BN1-algebras," *Int. J. Math. Trends Technol.*, vol. 67, pp. 1–13, 2021.
[7] T. Ganeshkumar and M. Chandramouleeswaran, "Generalized derivation on TM-algebras," *Int. J. Algebr.*, vol. 7, pp. 251–258, 2013.
[8] K. Sugianti and S. Gemawati, "Generalized derivations of BM-algebras," *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, vol. 15, no. 4, pp. 225–233, 2020.
[9] E. Fitria, S. Gemawati, A. Amalina, and R. J. Nurbai, "GENERALISASI t-DERIVASI di B-ALJABAR," *MAp (Mathematics Appl. J.*, vol. 3, no. 1, pp. 18–27, 2021.