Volume 2 Issue 1 (2022) Pages 23-30 P-ISSN:2798-2696 E-ISSIN:2798-0057

JOSTECH

Journal of Science and Technology

Website: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/jostech Email: jostech@uinib.ac.id

Hampiran Solusi Persamaan Gelombang Dua Dimensi Dengan Pendekatan *Finite Difference*

Mohamad Syafi'i ✉[1], Muhammad Rafli Alghazali [2]

Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia[1,2]
email: mohamadsyafii@uinib.ac.id[1] , muhammadraflialghazali@gmail.com[2]

Received 02 Februari 2022, Accepted 23 Februari 2022, Published 31 Maret 2022

Abstrak

Metode beda hingga banyak digunakan dalam menentukan hampiran solusi persamaan diferensial parsial bergantung waktu. Tujuan penelitian ini adalah membahas terkait solusi numerik dengan pendekatan beda hingga pada persamaan gelombang dua dimensi. Metode penilitian yang dilakukan adalah studi literatur. Langkah yang dilakukan untuk memperoleh solusi numerik dengan metode beda hingga yaitu dengan melakukan diskritisasi pada persamaan gelombang dua dimensi dengan pendekatan beda pusat. Setelah didapatkan diskritisasi, Langkah selanjutnya yaitu melakukan simulasi dengan bantuan *software* Matlab. Berdasarkan hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode beda hingga, solusi numerik yang diperoleh menghampiri solusi analitik persamaan gelombang dua dimensi yang diberikan. Dalam menentukan solusi numerik dengan metode beda hingga harus memenuhi syarat kestabilan von nuemann.

Kata Kunci: Galat, Kestabilan, Metode Beda Hingga, Persamaan Diferensial Parsial, Persamaan Gelombang Dua Dimensi.

Abstract

The finite difference method is widely used in determining the approximate solution of a time dependent partial differential equation. The purpose of this study is to calculate the numerical solution with a finite difference method to the two dimensional wave equation. The research method used is literature study. The solution of numerical problem using the finite difference method. Discretization the two-dimensional wave equation with a central difference approach. The second step, the discretization result is simulated by Matlab software. Based on the finite difference method result, the numerical solution approximates the analytical solution of the given two dimensional wave equation. The stability requirements of numerical solution using the finite difference method is the Von Nuemann stability.

Keywords: *Error, Stability, Difference Method, Partial Differential Equation, Two Dimensional Wave Equation.*

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Penerapan ilmu matematika mempunyai peranan penting dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa kasus yang b rhubungan dengan fenomena fisis sudah banyak dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial parsial, seperti dinamika fluida, akustik, elektrostatis, elektrodinamika, elastisitas, dan lain lain [1]. Pada penelitian ini berfokus pada fenomena gelombang. Gelombang merupakan rambatan energi getaran yang merambat melalui medium ataupun tanpa melalui medium. Gelombang elektromagnetik merupakan gelombang yang mampu merambat walaupun tanpa ada medium seperti gelombang radio, gelombang sinar matahari serta gelombang TV. Adapun gelombang mekanik merupakan gelombang yang berjalan melalui materi yang sering dikenal sebagai medium, contohnya gelombang tali, gelombang bunyi, serta gelombang air [2].

Persamaan gelombang merupakan persamaan diferensial parsial hiperbolik orde dua, yang menggambarkan propagasi gelombang, seperti gelombang suara atau air. Persamaan ini sangat penting dan dapat diaplikasikan pada masalah terkait *engineering*. Persamaan ini banyak dimanfaatkan peneliti dalam memprediksi gempa bumi, perambatan gelombang laut, prediksi tsunami, dinamika tanah, dinamika fluida, pencitraan ultrasonik, dan lain-lain [3].

Bentuk persamaan gelombang satu dimensi adalah sebagai berikut

$$u_{tt} = c^2\, u_{xx}$$

dengan kondisi awal $u(x,0) = \varphi(x)$ dan $u_t(x,0) = \vartheta(x)$ [4]. Sedangkan bentuk persamaan gelombang dua dimensi adalah

$$u_{tt} = c^2\,(u_{xx} + u_{yy})$$

Dengan kondisi awal $u(x,y,0) = \varphi(x)$ dan $u_t(x,y,0) = \vartheta(x)$. Pada paper ini memfokuskan pada persamaan gelombang dua dimensi [5]. Persamaan diferensial dua dimensi disertai dengan kondisi awal dan syarat batas pada umumnya sulit diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, pendekatan numerik menjadi pilihan lain dalam mencari solusi. Solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka dan metode numerik hanya memperoleh solusi yang menghampiri solusi sejati sehingga dinamakan solusi hampiran, namun solusi hampiran yang diperoleh dapat dibuat seteliti mungkin [6]. Salah satu pendekatan numerik yang digunakan dalam paper ini adalah pendekatan *finite difference*.

Metode beda hingga (*finite difference*) merupakan suatu pendekatan numerik yang digunakan dalam menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis. Prinsipnya adalah mengganti turunan yang ada pada persamaan differensial dengan diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor [7]. Pendekatan dengan derat Taylor dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan tengah yang digunakan dalam menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang dikenal dengan beda maju, beda mundur, dan beda tengah [8].

Beberapa penelitian terkait solusi persamaan gelombang adalah sebagai berikut *comparison of finite differences schemes for the wave equation based on dispersion* [9], *finite difference method for solving acoustic wave equation using locally adjustable time steps* [10], *numerical solution of the one dimentional shallow water wave equations using Finite Difference Method: Lax Friedrichs Scheme* [11], solusi analitik dan numerik suatu persamaan gelombang satu dimensi [12].

Berdasarkan beberapa penelitian yang sudah pernah dilakukan, penulis mencoba menerapkan metode beda hingga pada persamaan gelombang dua dimensi dengan mengambil kondisi awal dan kondisi batas yang lain kemudian membandingkan hasil numerik dan hasil analitik yan diperoleh. Bentuk persamaan gelombang dua dimensi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

dimana $(x, y, t) \in \Omega \times [0, T]$ dengan kondisi awal

$u(x, y, 0) = f_1(x, y, z)$

$u_t(x, y, 0) = f_2(x, y, z)$

dan kondisi batas

$u(x, y, t) = g(x, y, t)$.

METODOLOGI

Adapun metode penelitian yang dilakukan adalah studi literatur. Studi literatur merupakan penelitian yang dilakukan berdasarkan informasi dan data dengan bantuan karya tertulis. Dalam studi literatur, teknik pengumpulan data dilakukan dengan menelaah berbagai referensi atau literatur yan berkaitan dengan masalah yang ingin diselesaikan [13].

Melalui studi literatur ini, penulis menelaah beberapa referensi untuk menyelesaikan penelitian ini. Adapun Langkah yang dilakukan dalam menentukan hampiran solusi persamaan gelombang dua dimensi dengan metode beda hingga adalah sebagai berikut:

1. Hampiran solusi numerik dengan skema Lax Friedrich
   a. Diskritisasi persamaan gelombang dua dimensi
      - Diskritisasi pada ruang (x, y)

        Adapun formula *central difference* untuk turunan kedua adalah sebagai berikut:

        $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

        $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

      - Dikritisasi pada waktu (t)

        $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}$$

b. Diskritisasi kondisi awal

$$u(x,y,0) = u_{i,j}^{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n}}{2\Delta t}$$

2. Melakukan simulasi perhitungan numerik dari metode yang digunakan

a. Penentuan galat

Galat atau error merupakan selisih dari nilai atau hasil yang kita harapkan terjadi dengan kenyataan yang terjadi dilapangan. Galat berasosiasi denga seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan [14]. Fungsi dari adanya penentuan galat itu sangat penting, hal ini dilakukan untuk mengetahui seberapa dekat solusi numerik dengan solusi eksaknya, sehingga digunakan kriteria

$$galat\ (\varepsilon) = |Solusi\ eksak - solusi\ numerik|$$

b. Kestabilan

Uji kestabilan digunakan analisis stabilitas *von neumann* dengan syarat kestabilannya adalah $|A| \leq 1$ [15].

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan gelombang dua dimensi adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

dengan

$$(x,y) \in [0,1] \times [0,1], t \in (0,1)$$

kondisi awal

$u(x,y,0) = \sin(\pi x) \times \sin(\pi y)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0$

kondisi batasnya adalah

$u(0,y,t) = 0$ $u(1,y,t) = 0$

$u(x,0,t) = 0$ $u(x,1,t) = 0$

Adapun solusi analitik pada persamaan (1) adalah

$$u(x,y,t) = \cos(2\pi t) \times \sin(\pi x) \times \sin(\pi y) \tag{2}$$

Tujuan penelitian ini adalah mencari hampiran solusi numerik pada persamaan (1) dengan kondisi awal dan batas yang diberikan dengan menggunakan pendekatan *finite difference*. Langkah awal yaitu melakukan diskritisasi pada persamaan (1) sesuai dengan skema turunan parsial temporal dua atau spasial dua, dipeoleh

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2\left(\frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right) \tag{3}$$

Persamaan (3) dapat ditulis ke dalam bentuk

$$u_{i,j}^{n+1} = c^2 \Delta t^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} \tag{4}$$

dengan mengasumsikan bahwa $\Delta x = \Delta y$, maka persamaan (4) dapat ditulis dalam bentuk

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \left(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n \right) + 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} \tag{5}$$

misalkan $w = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$, maka persamaan (5) menjadi

$$u_{i,j}^{n+1} = w \left(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n \right) + 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} \tag{6}$$

Persamaan (6) juga dapat disederhanakan menjadi

$$u_{i,j}^{n+1} = w \left(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n \right) + w \left(u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n \right) + (2 - 4w)\, u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} \tag{7}$$

Adapun langkah selanjutnya adalah mendiskritkan kondisi awal persamaan (1), diperoleh sebagai berikut

$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \times \sin(\pi y)$ menjadi $u_{i,j}^1 = \sin(\pi x) \times \sin(\pi y)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$ menjadi $\frac{u_{i,j}^2 - u_{i,j}^0}{2\Delta t} = 0$

$$u_{i,j}^2 - u_{i,j}^0 = 0$$

$$u_{i,j}^2 = u_{i,j}^0 \tag{8}$$

Kondisi batas pada persamaan (1) dapat didiskritkan sebagai berikut

$u(x_1, y, t) = 0$ menjadi $u_{1,j}^n = 0$

$u(x_M, y, t) = 0$ menjadi $u_{M,j}^n = 0$

$u(x, y_1, t) = 0$ menjadi $u_{i,1}^n = 0$

$u(x, y_M, t) = 0$ menjadi $u_{i,M}^n = 0$

Diskritisasi pada kondisi awal untuk $n = 1$, maka persamaan (7) dapat ditulis menjadi

$$u_{i,j}^2 = w \left(u_{i+1,j}^1 + u_{i-1,j}^1 \right) + w \left(u_{i,j+1}^1 + u_{i,j-1}^1 \right) + (2 - 4w)\, u_{i,j}^1 - u_{i,j}^0 \tag{9}$$

subtitusika persamaan (8) ke dalam persamaan (9), sehingga diperoleh

$$u_{i,j}^2 = w \left(u_{i+1,j}^1 + u_{i-1,j}^1 \right) + w \left(u_{i,j+1}^1 + u_{i,j-1}^1 \right) + (2 - 4w)\, u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2$$

$$2u_{i,j}^2 = w \left(u_{i+1,j}^1 + u_{i-1,j}^1 \right) + w \left(u_{i,j+1}^1 + u_{i,j-1}^1 \right) + (2 - 4w)\, u_{i,j}^1$$

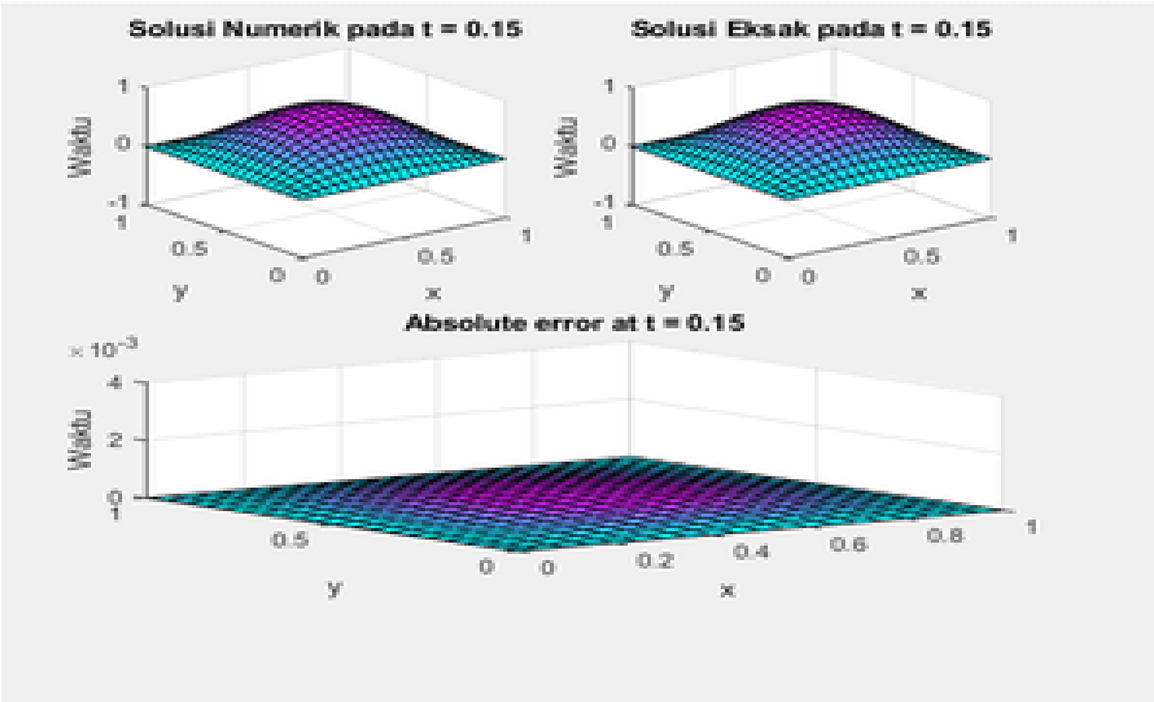
$$u_{i,j}^2 = \frac{w}{2} \left(u_{i+1,j}^1 + u_{i-1,j}^1 \right) + \frac{w}{2} \left(u_{i,j+1}^1 + u_{i,j-1}^1 \right) + (1 - 2w)\, u_{i,j}^1 \tag{10}$$

Persamaan (10) berlaku untuk $i = 2, \ldots, (M-1)$ dan $j == 2, \ldots, (M-1)$.

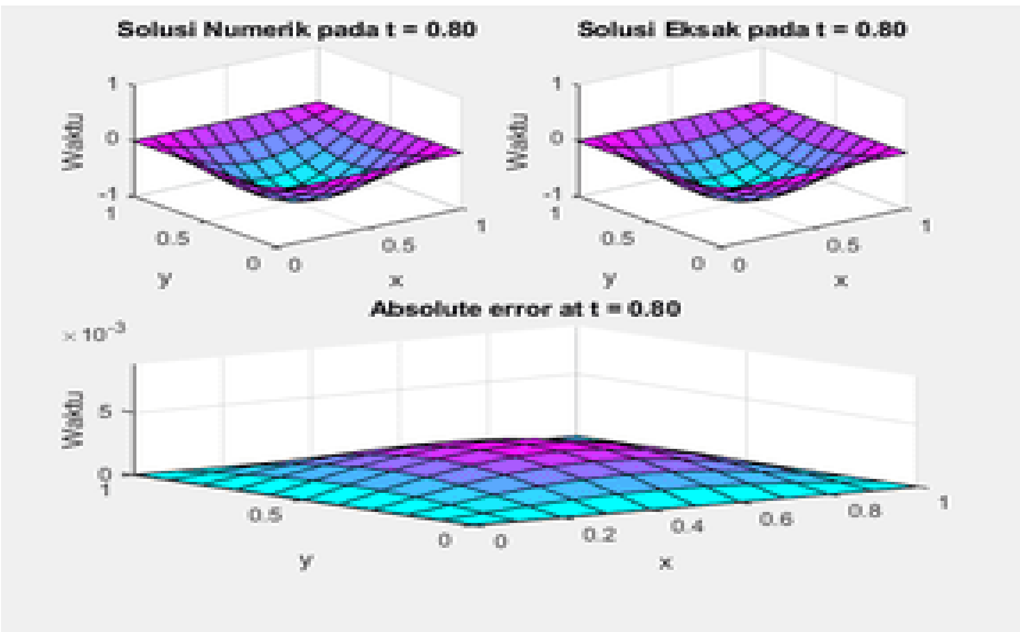
Adapun untuk $n > 1,$ persamaan yang digunakan adalah persamaan (7)

$$u_{i,j}^{n+1} = w \left(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n \right) + w \left(u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n \right) + (2 - 4w)\, u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}.$$

Berdasarkan skema diatas, misalkan $c = 1$, $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ dan $0 \le t \le 1$ dan diberikan Δt, Δx, serta Δy dapat dilihat pada gambar 1 dan gambar 2 solusi analitik mempunyai pola yang sama dengan solusi numerik dan solusi numerik menghampiri solusi analitiknya.



Gambar 1. Simulasi solusi numerik, solusi eksak dan absolute error Persamaan Gelombang 2D dengan $\Delta t = 0.01$ dan $\Delta x = \Delta y = 0.05$



Gambar 2. Simulasi solusi numerik, solusi eksak dan absolute error Persamaan Gelombang 2D dengan $\Delta t = 0.05$ dan $\Delta x = \Delta y = 0.1$

Pada gambar 1 diperoleh galat mutlak maksimal sebesar 0.004047840052938, sedangkan pada gambar 2 diperoleh galat mutlak maksimal sebesar 0.008832319604329. Berikut diberikan contoh pada table 1 tentang perbandingan solusi analitik dengan solusi numerik menggunakan pendekatan *finite difference* dengan $c = 1$, $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = \Delta y = 0.05$.

Tabel 1. Perbandingan solusi analitik dan solusi numerik dengan pendekatan *Finite Difference*

x	y	$u(x, y, t)$	eksak	Absolute Error
0	0.1	0	0	0
0.05	0.1	0.0482932956596152	0.0482932054869061	9.01727×10^{-8}
0.1	0.1	0.0953974501038314	0.0953972719787646	1.78125×10^{-7}
0.15	0.1	0.140152602720506	0.140152341029112	2.61691×10^{-7}
0.2	0.1	0.181456733118381	0.181456394304370	3.388140×10^{-7}
0.25	0.1	0.218292796526511	0.218292388932609	4.07594×10^{-7}
0.3	0.1	0.249753766811903	0.249753300474424	4.66337×10^{-7}
0.35	0.1	0.275064970473155	0.275064456874876	5.13598×10^{-7}
0.4	0.1	0.293603161673059	0.293602613460474	5.48213×10^{-7}
0.45	0.1	0.304911868619545	0.304911299291467	5.69328×10^{-7}
0.5	0.1	0.308712633416143	0.308712056991318	5.76424×10^{-7}

Berdasarkan simulasi pada gambar 1, gambar 2, dan tabel 1 dipilih nilai Δx, Δy, dan Δt yang memenuhi syarat kestabilan. Persamaan gelombang ini akan bersifat stabil jika $\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ (dimana $\Delta x = \Delta y$).

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh bahwa solusi numerik dengan metode *finite difference* mampu menghampiri solusi analitik persamaan gelombang dua dimensi yang diberikan, dan solusi numerik yang diberikan akan stabil jika memenuhi $\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ (dimana $\Delta x = \Delta y$).

DAFTAR PUSTAKA

[1] K. Mahmoodi, H. Ghassemi, and A. Heydarian, "Solving the Nonlinear Two-Dimension Wave Equation Using Dual Reciprocity Boundary Element Method," *Int. J. Partial Differ. Equations Appl.*, vol. 5, no. 1, pp. 19–25, 2017, doi: 10.12691/ijpdea-5-1-3.

[2] A. Yasid and D. Handayani, "PENGARUH FREKUENSI GELOMBANG BUNYI TERHADAP PERILAKU LALAT RUMAH (Musca domestica)," *J. Pembelajaran Fis.*, vol. 5, no. 2, pp. 190–196, 2011.

[3] F. Mirzaee and S. Bimesl, "Results in Physics A new approach to numerical solution of second-order linear hyperbolic partial differential equations arising

from physics and engineering n," *Results Phys.*, vol. 3, pp. 241–247, 2013, doi: 10.1016/j.rinp.2013.10.002.

[4] S. Jung and S. Min, "Stability of the Wave Equation with a Source," *Hindawi J. Funct. Spaces*, vol. 2018, no. 2, pp. 1–4, 2018, doi: https://doi.org/10.1155/2018/8274159.

[5] W. A. Strauss, *Partial Differential Equation (An Introduction)*. United States of America: John Wiley & Sons Inc, 2008.

[6] R. Munir, *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung, 2008.

[7] Hasan, T. Yulianto, R. Amalia, and Faisol, "Penerapan Metode Beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant," *Math J.*, vol. 2, no. 1, pp. 6–12, 2016.

[8] B. S. Sasongko, *Metode Numerik Dengan Scilab*. Yogyakarta: CV. Andi Offset, 2010.

[9] Y. A. Abdulkadir, "Comparison of Finite Difference Schemes for the Wave Equation Based on Dispersion," *J. Appl. Math. Phys.*, vol. 3, pp. 1544–1562, 2015, doi: http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2015.311179.

[10] A. J. M. Antunes, M. Sc, R. C. P. Leal-toledo, D. Sc, and O. Teixeira, "Finite Difference Method for Solving Acoustic Wave Equation Using Locally Adjustable Time-steps," *Procedia Comput. Sci.*, vol. 29, pp. 627–636, 2014, doi: 10.1016/j.procs.2014.05.056.

[11] V. A. Riestiana, R. Setiyowati, and V. Y. Kurniawan, "Numerical solution of the one dimentional shallow water wave equations using finite difference method: Lax-Friedrichs scheme," *AIP Conf. Proc.*, vol. 2326, no. 02002, pp. 1–8, 2021, doi: 10.1063/5.0039545.

[12] A. A. Noor, A. R. Putri, and M. Syafwan, "Solusi analitik dan numerik suatu persamaan gelombang satu dimensi," *J. Mat. UNAND*, vol. VIII, no. 4, pp. 1–8, 2020.

[13] M. Syafii, D. M. Putri, and A. Rahman, "Nullitas maksimum matriks hermitian digambarkan oleh graf g," *MAp (Mathematics Appl. J.*, vol. 3, no. I, pp. 53–61, 2021, doi: https://doi.org/10.15548/map.v3i1.2784.

[14] W. Pandia and I. Sitepu, "Penentuan Galat Persamaan Diferensial Biasa Orde 1 dengan Metode Numerik," *J. Mutiara Pendidik. Indones.*, vol. 6, no. 1, pp. 31–37, 2021, doi: https://doi.org/10.51544/mutiara%20pendidik.v6i1.1907.

[15] A. Gopal, M. Mahdi, S. Jagdish, and C. Bansal, "On Stability Analysis of Particle Swarm Optimization Algorithm," *Arab. J. Sci. Eng.*, vol. 45, no. 4, pp. 2385–2394, 2020, doi: 10.1007/s13369-019-03991-8.