Volume 3 Issue 1 (2023) Pages 47-58 P-ISSN:2798-2696 E-ISSIN:2798-0057

JOSTECH
Journal of Science and Technology
Website: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/jostech Email: jostech@uinib.ac.id

Orde Subgrup Terkecil Yang Memuat Suatu Himpunan Dengan 2 Unsur Dari Suatu Grup Hingga Siklik

Rasdin Sandria ✉[1], Jufra[2], Norma Muhtar[3]
Program Studi Matematika, Universitas Halu Oleo, Indonesia[1,2,3]
email: rasdinsandria4@gmail.com [1], jufralect@gmail.com [2], norma.muhtar@uho.ac.id [3]

Received 16 Januari 2023, Accepted 21 Maret 2023, Published 31 Maret 2023

Abstrak

Misalkan $(G,*)$ sebarang grup dan $A \subseteq G$ maka subgrup terkecil dari G yang memuat A adalah irisan dari semua subgrup dari G yang memuat A dan dinotasikan dengan $< A >$. Jika $A = \{x\}$ maka $< A >=< x >$, subgrup semacam ini kita kenal sebagai grup siklik dengan pembangun x, sehingga orde dari $< A >$ sama dengan orde dari x. Pada penelitian ini dilakukan observasi terhadap himpunan $< A >$ dengan tujuan untuk mengetahui sifat keanggotaan himpunan $< A >$ dan untuk mengetahui orde dari $< A >$ untuk kasus A berorde 2 dan lebih lanjut untuk A berorde n bila G grup hingga siklik dengan memanfaatkan akibat dari Teorema Lagrange.

Kata Kunci: Subgrup Terkecil, Teorema Lagrange, Orde, Grup siklik, Grup Hingga

Abstract

Suppose $(G,*)$ is any group and $A \subseteq G$ then the smallest subgroup of G containing A is the intersection of all subgroups of G containing A and denoted by $< A >$. If $A = \{x\}$ then $< A >=< x >$, such a subgroup we know as a cyclic group with generator x, such that the order of $< A >$ is the same as the order of x. In this research, observations were made on the set $< A >$ in order to know the nature of the membership of $< A >$ and the order of $< A >$ for the case A of order 2 and further for A of order n if G is a cyclic finite group using the effect of Lagrange Theorem.

Keywords: *Smallest Subgroup, Lagrange Theorem, Order, Cyclic Group, Finite Group*

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang menopang perkembangan budaya dan kehidupan manusia di berbagai belahan dunia sejak masa lalu, kini, dan masa yang akan datang dipengaruhi oleh kemajuan dalam bidang matematika. Menurut para ahli pendidikan matematika, matematika adalah ilmu yang membahas pola atau keteraturan (*pattern*) dan tingkatan (*order*)[1]. Saat ini seluruh kehidupan manusia menggunakan matematika, mulai dari perhitungan sederhana dalam kehidupan sehari-hari sampai pada perhitungan yang rumit seperti astronomi, geologi, informatika, dan lain sebagainya. Ilmu-ilmu lain yang menggunakan matematika sebagai alat bantu seperti ekonomi, sosial, biologi, dan lain sebagainya. Artinya, matematika dipakai untuk membantu perkembangan ilmu pengetahuan, yang secara langsung atau tidak langsung menjadi sarana kegiatan ilmiah[2]. Hal inilah yang menjadi landasan sehingga matematika sering kali ditempatkan pada puncak hierarki ilmu pengetahuan.

Ilmu matematika terbagi menjadi beberapa kelompok keilmuan, salah satu diantaranya adalah Aljabar. Aljabar adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang struktur, hubungan, dan kuantitas[3]. Kemudian seiring perkembangannya, aljabar terbagi menjadi 2 yaitu aljabar klasik dan aljabar modern atau yang lebih dikenal sebagai aljabar abstrak.

Aljabar klasik mempunyai ciri yang dominan yaitu bahwa setiap simbol yang dimaksud selalu mempunyai pengertian suatu bilangan tertentu, memanipulasi aljabar untuk menyelesaikan persamaan polinom, membuat algoritma-algoritma (aturan-aturan) persamaan polinom satu variabel dengan derajat tak lebih dari 4. Sedangkan aljabar abstrak, simbol-simbol matematika dapat diartikan lain, tidak hanya dan harus bilangan. Jadi simbol-simbol tersebut dapat berupa apa saja. Kata sifat abstrak yang menempel pada kata aljabar mempunyai arti bahwa aljabar yang dipelajari berupa sifat-sifat dan objek yang telah diabstraksikan [4].

Salah satu topik dalam aljabar abstrak adalah Grup. Suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan suatu operasi bintang $(*)$ dikatakan grup bila memenuhi 4 sifat yaitu tertutup, asosiatif, terdapat elemen identitas di G untuk setiap elemen G, dan terdapat elemen invers di G untuk setiap elemen G. Berdasarkan kardinalitasnya (orde), grup dibagi menjadi 2 jenis yaitu grup hingga dan grup tak hingga. Grup hingga adalah grup dengan banyak elemen yang berhingga, contohnya adalah himpunan $\{1, -1, i, -i\}$ terhadap operasi perkalian standar, sedangkan grup tak hingga adalah grup dengan banyak elemen yang tak hingga, contohnya adalah himpunan bilangan real terhadap operasi penambahan (+). Khusus pada penelitian ini, penulis hanya akan meninjau untuk grup hingga saja.

Suatu grup G dikatakan siklik bila terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga $G = \{x^n | n \in Z\}$, x yang demikian disebut pembangun (generator) dari G. Lebih lanjut, bila G grup hingga maka G disebut grup hingga siklik. Himpunan $\{x^n | n \in Z\}$ dapat juga ditulis dengan notasi $< x >$. Misal H adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari G, H dikatakan subgrup dari G bila H juga grup terhadap operasi yang sama dengan G. Kemudian untuk sebarang y elemen grup hingga siklik G, maka $< y > = \{y^n | n \in Z\}$ merupakan subgrup dari G, subgrup yang semacam ini disebut subgrup terkecil yang memuat y. Arti dari subgrup terkecil yang memuat y menyiratkan bahwa bila ada subgrup lain yang memuat y maka subgrup tersebut haruslah memuat $< y >$. Kemudian timbul beberapa pertanyaan, bisakah kita membentuk suatu subgrup terkecil yang memuat x dan y dimana $x, y \in G$? Jika bisa, bagaimana cara membangun himpunan tersebut? Lebih lanjut, bagaimana cara kita menentukan banyaknya anggota (orde) dari subgrup tersebut?

Berdasarkan masalah tersebut maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana cara membangun subgrup terkecil yang memuat suatu himpunan dan apa saja elemen pada subgrup tersebut dan untuk mengetahui bagaimana cara menentukan orde dari subgrup terkecil yang memuat suatu himpunan dengan 2 unsur.

METODOLOGI

Metode penelitian ini menggunakan metode kepustakaan (*library research*) dimana peneliti mempelajari berbagai sumber yang ada yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini. Adapun garis besar dari permasalahan yang akan dibahas dan langkah-langkah yang akan dilakukan adalah sebagai berikut.

(1) Membangun subgrup terkecil yang memuat suatu himpunan.
   (a) Mendefinisikan apa yang dimaksud dengan “subgrup terkecil yang memuat suatu himpunan”.
   (b) Mengambil sebarang grup G.
   (c) Mengambil sebarang subset dari G yang tak kosong, misal A.
   (d) Membuat himpunan A^* yang beranggotakan invers dari semua elemen A atau dinotasikan dengan $A^* = \{x^{-1} | x \in A\}$.
   (e) Mendefinisikan suatu “kata” pada A.
   (f) Membuat suatu himpunan W yang beranggotakan semua “kata” pada A.
   (g) Membuktikan bahwa W merupakan subgrup dari G.
   (h) Membuktikan bahwa W merupakan subgrup terkecil yang memuat A.
(2) Mencari orde dari subgrup terkecil yang memuat suatu himpunan dari suatu grup hingga siklik.
   (a) Mengambil sebarang grup hingga siklik G dengan $|G| \geq 2$.

(b) Mengambil sebarang himpunan $A \subseteq G$ dengan $|A| = 2$.
(c) Membentuk subgrup terkecil yang memuat A yaitu himpunan $< A >$.
(d) Mencari orde dari $< A >$ dengan memanfaatkan akibat dari Teorema Lagrange.
(e) Bila langkah (d) dapat diselesaikan maka dilanjutkan dengan menyelidiki apakah permasalahan dapat diperumum untuk $|A| > 2$ berdasarkan hasil pada langkah (d).

(3) Menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi dan Teorema Pendukung

Berikut diberikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan topik yang akan dibahas pada penelitian ini.

Definisi 1[5] *Suatu himpunan tak kosong G disebut grup jika dalam G didefinisikan suatu operasi $*$ sedemikian sehingga*

(a) Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$ (sifat tertutup).
(b) Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat asosiatif).
(c) Untuk setiap $a \in G$, $\exists e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ (eksistensi elemen identitas).
(d) Untuk setiap $a \in G$, $\exists a^{-1}$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (eksistensi elemen invers).

Lebih lanjut, jika G memenuhi sifat komutatif terhadap operasi $*$ yaitu $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ maka G disebut grup komutatif.

Definisi 2[6] *Suatu grup G dikatakan grup hingga jika G merupakan himpunan berhingga, jika tidak maka grup G dikatakan grup tak hingga. Orde dari suatu grup G ditulis dengan $|G|$ atau $o(G)$ menyatakan banyaknya elemen dari himpunan G.*

Definisi 3[7] *Misal $(G, *)$ suatu grup dengan elemen identitas e. Misal $a \in G$, a dikatakan mempunyai orde hingga jika terdapat $k \in N$ sedemikian sehingga $a^k = e$. Bila tidak terdapat k yang demikian maka a dikatakan berorde tak hingga. Dalam hal ini, bila a mempunyai orde hingga maka orde dari a adalah bilangan asli terkecil k yang mengakibatkan $a^k = e$ atau dituliskan dengan $|a| = min\{k \in N \mid a^k = e\}$.*

Definisi 4[8] *Misal $(G, *)$ grup dan H subset dari G yang tidak kosong. H disebut subgrup dari G jika $(H, *)$ juga grup.*

Catatan: Notasi $H \leq G$ digunakan untuk menyatakan bahwa H subgrup dari G.

Teorema 1[9] *Jika G grup dan $H \subseteq G$ maka ketiga pernyataan berikut ekuivalen:*

(1) H *adalah subgrup dari* G;

(2) H *memenuhi 3 syarat:*

- *(a) Elemen identitas di* G *ada di* H;
- *(b) Untuk setiap* $x, y \in H$ *maka* $xy \in H$;
- *(c) Untuk setiap* $x \in H$ *maka* $x^{-1} \in H$;

(3) H *memenuhi kondisi:*

- *(i) Elemen identitas di* G *ada di* H;
- *(ii) Jika* $x, y \in H$ *maka* $xy^{-1} \in H$.

Teorema 2[10] *Misalkan $(G, *)$ adalah grup serta H dan K adalah subgrup dari G maka*

(1) $H \cap K$ *subgrup dari* G*; dan*

(2) $H \cup K$ *subgrup dari* G *jika dan hanya jika* $H \subseteq K$ *atau* $K \subseteq H$.

Definisi 5[11] *Jika A adalah sebarang subset dari grup G. Definisikan*

$$< A >= \bigcap_{\substack{A \subseteq H \\ H \leq G}} H$$

$< A >$ *disebut subgrup yang dibangun oleh* A. *Jika* A *grup hingga berorde* n *dengan* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *maka* $< A >$ *dituliskan sebagai* $< a_1, a_2, \ldots, a_n >$.

Definisi 6[12] *Jika G adalah grup dan $H \subseteq G$ maka "subgrup terkecil dari G yang memuat H" adalah subgrup yang dibangun oleh H. Secara matematis, jika M adalah subgrup terkecil dari G yang memuat H maka $M =< H >$.*

Teorema 3 (Teorema Lagrange)[13] *Jika G suatu grup hingga dan H adalah subgrup G maka $|H|$ habis membagi $|G|$. Lebih lanjut, banyaknya koset kiri (kanan) yang berbeda dari H dalam G adalah $|G|/|H|$.*

Teorema 4[14] *Misalkan H dan K adalah 2 buah subgrup hingga dari grup G. Didefinisikan suatu himpunan $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$. Maka*

$$|HK| = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|}.$$

Sebagai catatan, Teorema 4 adalah akibat dari Teorema Lagrange.

Definisi 7[15] *Suatu grup $(G, *)$ dikatakan siklik jika terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga $G = < x > = \{x^n | n \in Z\}$.*

Proposisi 1[11] *Jika $H =< x >$, maka $|H| = |x|$.*

Subgrup Terkecil Yang Memuat Suatu Himpunan

Berdasarkan Definisi 5 dan 6 kita dapat menuliskan definisi subgrup terkecil yang memuat suatu himpunan yang tak kosong secara lebih ringkas sebagai berikut.

Definisi 8 *Misal* $(G,*)$ *grup dan* $A \subseteq G$ *serta* $A \neq \emptyset$. *Didefinisikan himpunan* $K = \{H \leq G | A \subseteq H\}$. $M \in K$ *dikatakan "subgrup terkecil dari* G *yang memuat* A*" jika* $\forall L \in K$ *berlaku* $M \subseteq L$.

Misal diambil sebarang himpunan A yang tak kosong yang merupakan subset dari suatu grup G. Selanjutnya akan didefinisikan suatu "kata" pada A sebagai berikut.

Definisi 9 *Misal* $(G,*)$ *grup dan* $y \in G$. *Diberikan* $A \subseteq G$ *yang tak kosong, kemudian didefinisikan himpunan* A^* *yang beranggotakan invers dari semua elemen* A *atau dinotasikan dengan* $A^* = \{a^{-1} | a \in A\}$. y *disebut suatu "kata" pada* A *jika* y *dapat dituliskan sebagai*

$$y = a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_t$$

dimana $a_i \in A \cup A^*$ *untuk suatu* $t \in \boldsymbol{N}$ *dengan* $i = 1,2,\dots,t$.

Selanjutnya didefinisikan himpunan W yang beranggotakan semua "kata" pada A atau dinotasikan dengan $W = \{y | y \text{ kata pada } A\}$. Berdasarkan Definisi 8, himpunan W dapat dituliskan sebagai berikut.

$$W = \{a_1^{c_1} * a_2^{c_2} * \dots * a_t^{c_t} \mid t \in \boldsymbol{N}, a_i \in A, c_i \in \{-1,1\}, i = 1,2,\dots,t\}.$$

Dengan manipulasi aljabar, W dapat disederhanakan menjadi

$$W = \left\{a_1^{d_1} * a_2^{d_2} * \dots * a_t^{d_t} \mid t \in \boldsymbol{N}, a_i \in A, d_i \in \boldsymbol{Z}, a_i \neq a_{i+1}, i = 1,2,\dots,t\right\}.$$

Dapat dicek bahwa W merupakan subgrup dari G sekaligus merupakan subgrup terkecil yang memuat himpunan A. Pertama akan ditunjukkan bahwa W merupakan subgrup dari $(G,*)$. Jelas bahwa $W \neq \emptyset$ karena $\exists y = e = a_1 * a_1^{-1} \in W$. Kemudian ambil dua buah unsur sebarang di W, misal y_1 dan y_2. Karena $y_1, y_2 \in W$ maka y_1 dan y_2 dapat dituliskan sebagai

$$y_1 = k_1 * k_2 * k_3 * \dots * k_m, \text{ untuk suatu } m \in \boldsymbol{N}$$

$$y_2 = l_1 * l_2 * l_3 * \dots * l_n, \text{ untuk suatu } n \in \boldsymbol{N}$$

dimana $k_i, l_j \in A \cup A^*$ dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$.

$$y_2^{-1} = (l_2 * l_2 * l_3 * \dots * l_n)^{-1}$$

$$y_2^{-1} = l_n^{-1} * l_{n-1}^{-1} * \dots * l_2^{-1} * l_1^{-1}$$

$$y_1 * y_2^{-1} = (k_1 * k_2 * \dots * k_m) * \left(l_n^{-1} * l_{n-1}^{-1} * \dots * l_2^{-1} * l_1^{-1}\right)$$

$$y_1 * y_2^{-1} = k_1 * k_2 * k_3 * \dots * k_m * l_n^{-1} * l_{n-1}^{-1} * \dots * l_2^{-1} * l_1^{-1}$$

Misal $z = y_1 * y_2^{-1}$ maka

$$z = k_1 * k_2 * k_3 * \dots * k_m * l_n^{-1} * l_{n-1}^{-1} * \dots * l_2^{-1} * l_1^{-1}$$

Selanjutnya akan ditinjau keanggotaan unsur l_j^{-1} dengan $j = 1,2,\dots n$. Karena $l_j \in A \cup A^*$ untuk setiap $j = 1,2,\dots,n$ maka ada 2 kasus yang mungkin.

(a) Jika $l_j \in A$ maka $l_j^{-1} \in A^*$

(b) Jika $l_j \in A^*$ maka $l_j^{-1} \in A$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $l_j^{-1} \in A \cup A^*$ untuk setiap $j = 1,2, \ldots, n$. Karena $k_i \in A \cup A^*$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, m$ dan $l_j^{-1} \in A \cup A^*$ untuk setiap $j = 1,2, \ldots, n$ maka dapat disimpulkan bahwa z merupakan suatu kata pada A. Jadi,

$$z = y_1 * y_2^{-1} \in W$$

Karena $e \in W$ dan jika diambil $y_1, y_2 \in W$ selalu berlaku $y_1 * y_2^{-1} \in W$ maka berdasarkan Teorema 1 terbukti bahwa W merupakan subgrup G.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa W merupakan subgrup terkecil dari G yang memuat A dengan cara menunjukkan bahwa W memenuhi Definisi 8. Berdasarkan Definisi 8, W dikatakan subgrup terkecil yang memuat A apabila memenuhi 2 hal berikut.

(a) $A \subseteq W$

(b) Jika diambil sebarang subgrup dari G yang memuat A misal T maka haruslah $W \subseteq T$.

Akan ditunjukkan bahwa W memenuhi kedua hal tersebut.

(a) Karena $\forall a \in A$ merupakan suatu kata di W maka $A \subseteq W$.

(b) Misal $T \leq G$ yang memuat A, akan ditunjukkan bahwa $W \subseteq T$. Ambil sebarang unsur di W misal $z = a_1 * a_2 * \ldots * a_k$ dengan $a_i \in A \cup A^*$. Tinjau 2 kasus berikut.
   (i) Jika $a_i \in A$ maka $a_i \in T$ karena $A \subseteq T$.
   (ii) Jika $a_i \in A^*$ maka $a_i^{-1} \in A \subseteq T$. Akibatnya $a_i^{-1} \in T$. Karena $T \leq G$ maka $\left(a_i^{-1}\right)^{-1} \in T$ sehingga $a_i \in T$.

   Karena untuk setiap i berlaku $a_i \in T$ dan $T \leq G$ maka $z \in T$. Karena untuk setiap $z \in W$ berlaku $z \in T$ maka $W \subseteq T$.

Jadi terbukti bahwa W merupakan subgrup terkecil yang memuat A.

Orde Subgrup Terkecil Yang Memuat Suatu Himpunan

Misal $(G, *)$ grup dan $A \subseteq G$ serta $A \neq \emptyset$. Berdasarkan pembahasan pada bagian sebelumnya, subgrup terkecil yang memuat himpunan A adalah

$$< A >= \left\{x_1^{d_1} * x_2^{d_2} * \ldots * x_t^{d_t} \middle| \, t \in \boldsymbol{N}, x_i \in A, d_i \in \boldsymbol{Z}, x_i \neq x_{i+1}, i = 1,2, \ldots, t\right\}$$

Lebih lanjut, jika G grup komutatif dan A subset dari G yang tak kosong dengan orde hingga, misal $|A| = k$ dengan $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ maka

$$< A > \, = \, < x_1, x_2, \ldots, x_k >$$

$$< A > \, = \left\{x_1^{e_1} * x_2^{e_2} * \ldots * x_k^{e_k} \middle| \, e_i \in \boldsymbol{Z}, i = 1,2, \ldots, k\right\}$$

Selanjutnya akan dicari orde dari $< A >$ untuk kasus $|A| = 2$ dari suatu grup yang komutatif. Khusus pada penelitian ini, penulis mengambil grup hingga siklik untuk merepresentasikan grup komutatif tersebut.

Proposisi 2 *Jika G grup hingga siklik maka setiap elemen di G berorde hingga.*

Bukti:

Misal G grup hingga siklik dan x merupakan pembangun dari G atau dituliskan dengan $G =< x >= \{ x^k \,| k \in \boldsymbol{Z}\}$. Berdasarkan Proposisi 1, maka $|G| = |x|$. Misal $|x| = n$ maka $x^n = e$. Ambil sebarang $y \in G$ maka terdapat $k \in \boldsymbol{Z}$ sedemikian sehingga $y = x^k$. Selanjutnya akan diperoleh

$$y^n = \left(x^k\right)^n = (x^n)^k = e^k = e$$

Karena terdapat $n \in \boldsymbol{N}$ sedemikian sehingga $y^n = e$ untuk setiap $y \in G$, maka setiap elemen di G berorde hingga, proposisi terbukti.

Misal diambil sebarang grup hingga siklik $(G, *)$, kemudian diambil sebarang himpunan A dengan $A \subseteq G$ dan $|A| = 2$. Tanpa mengurangi keumuman, misal $A = \{x_1, x_2\}$ maka akan diperoleh

$$< A > \; = \; < x_1, x_2 > \; = \left\{x_1^{e_1} * x_2^{e_2} \,\middle|\, e_1, e_2 \in \boldsymbol{Z}\right\}$$

Misal $B = \{x_1\}$, $C = \{x_2\}$, $H =< B >$ dan $K =< C >$.

$$H = \; < B > \; = \; < x_1 > \; = \{ x_1^m \,| m \in \boldsymbol{Z}\}$$
$$K = \; < C > \; = \; < x_2 > \; = \{ x_2^n \,| n \in \boldsymbol{Z}\}$$

Perhatikan bahwa H dan K secara berturut-turut merupakan grup siklik dengan generator x_1 dan x_2. Karena G grup dan $x_1, x_2 \in G$, akibatnya $\forall y_1 \in H$ dan $\forall y_2 \in K$ berlaku $y_1, y_2 \in G$. Sehingga $H \subseteq G$ dan $K \subseteq G$. Jadi, H dan K subgrup dari G. Berdasarkan Proposisi 1, diperoleh

$$|H| = |x_1|$$
$$|K| = |x_2|$$

Berdasarkan Proposisi 2, kita bisa menjamin bahwa H dan K berorde hingga. Selanjutnya, dengan melakukan observasi terhadap elemen $< A >$ ditemukan bahwa setiap elemen dari $< A >$ secara berturut-turut dihasilkan dari pengoperasian elemen himpunan H dengan elemen himpunan K atau dituliskan dengan

$$< A > \; = \left\{x_1^{e_1} * x_2^{e_2} \,\middle|\, x_1^{e_1} \in H, \; x_2^{e_2} \in K\right\}$$

Berdasarkan Teorema 4, himpunan $< A >$ dapat dituliskan sebagai

$$< A > \; = HK$$

Sehingga diperoleh orde dari $< A >$ adalah

$$| < A > | = \; < x_1, x_2 > \; = |HK| = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|}$$
$$| < A > | = \frac{|x_1| \times |x_2|}{|(< x_1 > \cap < x_2 >)|}$$

Selanjutnya akan ditinjau orde subgrup terkecil yang memuat himpunan A untuk kasus $|A| > 2$. Sebagai langkah awal, misalkan $|A| = 3$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. Subgrup terkecil yang memuat A adalah

$$< A > \; = \; < x_1, x_2, x_3 >$$
$$< A > \; = \left\{x_1^{e_1} * x_2^{e_2} * x_3^{e_3} \,\middle|\, e_1, e_2, e_3 \in \boldsymbol{Z}\right\}$$

Karena $x_1, x_2, x_3 \in A \subseteq G$ maka berlaku sifat asosiatif, sehingga $< A >$ juga dapat dituliskan sebagai

$$< A > \; = \; < x_1, x_2, x_3 >$$
$$< A >= \left\{ (x_1^{e_1} * x_2^{e_2}) * x_3^{e_3} \middle| \, e_1, e_2, e_3 \in \boldsymbol{Z} \right\}$$

Perhatikan bahwa $(x_1^{e_1} * x_2^{e_2}) \in \; < x_1, x_2 >$ dan $x_3^{e_3} \in \; < x_3 >$ sehingga diperoleh

$$< x_1, x_2, x_3 > \; = \left\{ (x_1^{e_1} * x_2^{e_2}) * x_3^{e_3} \middle| \, (x_1^{e_1} * x_2^{e_2}) \in \; < x_1, x_2 > \; ; x_3^{e_3} \in \; < x_3 > \right\}$$

Berdasarkan Teorema 4 diperoleh orde dari subgrup terkecil yang memuat A untuk kasus $|A| = 3$ adalah

$$| < x_1, x_2, x_3 > | = \frac{|< x_1, x_2 >| \times |< x_3 >|}{|(< x_1, x_2 > \cap < x_3 >)|}$$

Dari hasil ini, diperoleh kesimpulan bahwa untuk memperoleh orde subgrup terkecil yang memuat himpunan $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ diperlukan pengetahuan mengenai orde subgrup terkecil yang memuat himpunan $\{x_1, x_2\}$. Selanjutnya akan diselidiki apakah kesimpulan ini juga berlaku untuk $|A| > 3$.

Proposisi 3 *Jika $(G, *)$ grup hingga dan H subgrup dari G maka orde dari H berhingga.*

Bukti:
Karena G grup dan H subgrup G maka $H \subseteq G$. Akibatnya, $\forall x \in H$ berlaku $x \in G$. Karena G hingga akibatnya H juga hingga. Terbukti.

Proposisi 4 *Diberikan $(G, *)$ grup hingga siklik dengan $|G| \geq 2$ dan $A \subseteq G$ dengan $|A| = n \geq 2$. Misalkan $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ maka $< A >$ selalu dapat dinyatakan sebagai*

$$< A > \; = HK = \{h * k | h \in H, k \in K\}$$

Dengan $H =< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >$ dan $K =< x_n >$.

Bukti:
Akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi matematika. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, untuk $n = 2$ dan $n = 3$ jelas terbukti. Asumsikan untuk $n = t$ pernyataan benar sehingga berlaku

$$< A > \; = \; < x_1, x_2, ..., x_t >$$
$$< A >= H_1 K_1 = \{h * k | h \in H_1, k \in K_1\}$$

Dengan $H_1 =< x_1, x_2, ..., x_{t-1} >$ dan $K_1 =< x_t >$.
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = t + 1$ juga berlaku demikian.

$$< A > \; = \; < x_1, x_2, ..., x_t, x_{t+1} >$$
$$< A >= \left\{ x_1^{e_1} * x_2^{e_2} * ...* x_t^{e_t} * x_{t+1}^{e_{t+1}} \middle| \, e_i \in \boldsymbol{Z}, i = 1,2, ..., t, t + 1 \right\}$$

Karena $x_1, x_2, ..., x_t, x_{t+1} \in A \subseteq G$ maka sifat asosiatif berlaku, sehingga diperoleh

$$< A > \; = \left\{ ((x_1^{e_1} * x_2^{e_2} * ...* x_{t-1}^{e_{t-1}}) * x_t^{e_t}) * x_{t+1}^{e_{t+1}} \middle| \, e_i \in \boldsymbol{Z}, i = 1,2, ..., t, t + 1 \right\}$$

Perhatikan bahwa $((x_1^{e_1} * x_2^{e_2} * ...* x_{t-1}^{e_{t-1}}) * x_t^{e_t}) \in H_1 K_1$ dan $x_{t+1}^{e_{t+1}} \in < x_{t+1} >$ sehingga diperoleh

$$< A > \; = \; H_2K_2 = \{h * k | h \in H_2, k \in K_2\}$$

Dengan $H_2 = H_1K_1 =< x_1, x_2, ..., x_t >$ dan $K_2 =< x_{t+1} >$. Jadi berdasarkan prinsip induksi matematika pernyataan terbukti untuk setiap $n \geq 2$.

Akibatnya, jika diberikan $(G, *)$ grup hingga siklik dan $A \subseteq G$ dengan $|A| = n \geq 2$, berdasarkan Proposisi 3 dan Proposisi 4, dapat dijamin bahwa Teorema 4 selalu dapat digunakan untuk mencari orde dari subgrup terkecil yang memuat himpunan A. Jadi orde subgrup terkecil yang memuat A untuk kasus $|A| = n \geq 2$ dimana $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dirumuskan dengan

$$|< A >| \; = \; |< x_1, x_2, ..., x_n >|$$

$$| < A > | = \frac{|< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >| \times |< x_n >|}{|< x_1, x_2, ..., x_{n-1} > \cap < x_n > |} \quad (1)$$

Perhatikan Persamaan (1), untuk kasus $n = 3$ dibutuhkan 2 iterasi untuk mendapatkan solusi, untuk $n = 4$ dibutuhkan 3 iterasi untuk mendapatkan solusi dan seterusnya. Secara umum untuk kasus $n = k \geq 2$ dibutuhkan $(k - 1)$ iterasi. Jadi untuk n yang relatif besar, solusi dari Persamaan (1) cukup sulit untuk didapatkan. Untuk memudahkan kita mencari solusi dari Persamaan (1) diberikan proposisi berikut.

Proposisi 5 *Misalkan G grup hingga siklik dan $|G| \geq 2$, serta A adalah subset dari G dimana $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dengan $n \geq 2$.*

(a) Jika y adalah pembangun dari G dan $y \in A$ maka $| < A > | = |G|$.

(b) Jika $< x_1, x_2, ..., x_k > \; = G$ untuk suatu $k = 1,2, ..., n - 1$ maka $| < A > | = |G|$.

(c) Jika e adalah elemen identitas di G dan $e \in A$ maka

$$|< A >| = |< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >|.$$

(d) Jika $|G| = p$ dimana p bilangan prima maka $|< A >| = |G| = p$.

(e) Jika orde dari $< x_1, x_2, ..., x_k >$ relatif prima terhadap orde dari $< x_{k+1} >$ untuk suatu $k = 1,2, ..., n - 1$ maka

$$| < x_1, x_2, ..., x_k > \cap < x_{k+1} > | = 1.$$

Bukti:

(a) Karena y adalah pembangun dari G maka $< y > \; = G$, maka dengan menetapkan $x_n = y$ diperoleh

$$|< A >| = \frac{|< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >| \; \times \; |< x_n >|}{|< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >|}$$

$$| < A > | = | < x_n > | = |G|.$$

(b) Jika $< x_1, x_2, ..., x_k > \; = G$ untuk suatu $k = 2, ..., n - 1$ maka

$$| < x_1, x_2, ..., x_k > | = |G|.$$

Berdasarkan Persamaan (1) diperoleh

$$| < x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1} > | = \frac{|G| \times |< x_{k+1} >|}{|< x_{k+1} >|}$$

Sehingga $< x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1} > = G$. Jika $k + 1 = n$ maka bukti selesai. Jika $k + 1 < n$ maka dengan menerapkan kembali Persamaan (1) secara berulang sebanyak m perulangan sedemikian sehingga $(k + 1) + m = n$ akan diperoleh

$| < x_1, ..., x_{k+1} > | = | < x_1, ..., x_{(k+1)+m} > |$

Jadi berdasarkan uraian diatas diperoleh

$$| < A > | = | < x_1, x_2, ..., x_n > | = |G|.$$

(c) Karena e adalah elemen identitas di G dan $e \in A$ maka dengan menetapkan $x_n = e$ diperoleh

$$|< A >| = \frac{|< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >| \times |< e >|}{|< e >|}$$

$$| < A > | = |< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >|.$$

(d) Ambil sebarang $x \in A$ dengan $x \neq e_g$ maka $< x >$ adalah subgrup dari G sehingga berdasarkan Teorema Lagrange diperoleh orde dari $< x >$ haruslah habis membagi orde dari G. Akibatnya, karena $|G| = p$ dimana p prima dan $| < x > | \neq 1$ maka haruslah $|< x >| = p = |G|$. Dalam hal ini disimpulkan bahwa $< x > = G$ atau x merupakan pembangun dari G. Berdasarkan bagian (a) diperoleh $|< A >| = |G| = p$.

(e) Tinjau himpunan $< x_1, ..., x_{n-1} > \cap < x_n >$. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $S =< x_1, ..., x_{n-1} > \cap < x_n >$. Kemudian ambil sebarang $x \in S$. Berdasarkan definisi irisan dua buah himpunan diperoleh $x \in< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >$ dan $x \in< x_n >$ sehingga $S \subseteq < x_1, x_2, ..., x_{n-1} >$ dan $S \subseteq< x_n >$. Karena $< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >$ dan $< x_n >$ juga merupakan suatu grup maka S merupakan subgrup dari $< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >$ dan $< x_n >$. Berdasarkan Teorema Lagrange diperoleh orde dari S haruslah habis membagi orde dari $< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >$ dan $< x_n >$. Sehingga, jika orde dari $< x_1, x_2, ..., x_k >$ relatif prima terhadap orde dari $< x_{k+1} >$ untuk suatu $k = 1,2, ..., n - 1$ maka haruslah berlaku $| < x_1, x_2, ..., x_k > \cap < x_{k+1} > | = 1$.

SIMPULAN

Berdasarkan uraian pada bagian Hasil dan Pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

(1) Misalkan G grup dan A subset dari G yang tak kosong. Suatu himpunan misalkan M dikatakan "subgrup terkecil yang memuat A" jika $A \subseteq M$ dan untuk setiap N subgrup dari G dimana $A \subseteq N$ berlaku $M \subseteq N$. Jika M adalah subgrup terkecil yang memuat A maka $M =< A >$ atau dengan kata lain, M dibangun dengan cara mengiriskan semua subgrup dari G yang memuat A. Kemudian jika x adalah sebarang elemen dari M maka x adalah "kata" pada A (lihat Definisi 9).

(2) Jika G grup hingga siklik dan $A \subseteq G$ dengan $A = \{x_1, x_2\}$ maka orde subgrup terkecil yang memuat A diformulasikan sebagai berikut.

$$| < A > | = \frac{|x_1| \times |x_2|}{|(< x_1 > \cap < x_2 >)|}$$

Secara umum, jika $|A| = n \geq 2$ dengan $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ maka orde subgrup terkecil yang memuat A dirumuskan dengan

$$| < A > | = \frac{|< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >| \times |< x_n >|}{|< x_1, x_2, ..., x_{n-1} > \cap < x_n >|}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Shadiq, F. *Pembelajaran Matematika (Cara Meningkatkan Kemampuan Berpikir Siswa)*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2014.

[2] Sinaga, W., B. H. Parhusif, R. Tarigan, and S. Sitepu, "*Perkembangan Matematika dalam Filsafat dan Aliran Formalisme yang Terkandung dalam Filsafat Matematika." SEPREN : Journal of Mathematics Education and Applied, vol. 2, no. 2*, pp. 17-22, 2021.

[3] Rahayu, Annisa Melinia, Farid H Badruzzaman, and Erwin Harahap, "*Pembelajaran Aljabar Melalui Aplikasi Wolfram Alpha." Jurnal Matematika, vol. 20, no. 1, pp. 51-58, 2021.*

[4] Anggraini, and G. Sugita. *Buku Ajar Struktur Aljabar.* Sleman: Deepublish, 2020.

[5] Herstein, I. Nathan. *Abstract Algebra*, 3rd edition. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[6] Roman, S. *Fundamentals of Group Theory: An Advanced Approach.* New York: Birkhauser, 2011.

[7] Hungerford, T. William. *Abstract Algebra: An Introduction*, 3rd edition. Boston: Cengange Learning, 2012.

[8] Anderson, Marlow., and Todd Feil. *A First Course in Abstract Algebra: Rings, Groups, and Fields,* 2nd edition. Florida: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

[9] Humphreys John F.. *A Course in Group Theory.* New York: Oxford University Press, 1996.

[10] Saracino, D. *Abstract Algebra: A First Course.* 2nd edition. Illinois: Waveland Press Inc, 2008.

[11] Dummit, David S., and Richard M. Foote. *Abstract Algebra,* 3rd edition. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003.

[12] Fraleigh, J. B. *A First Course in Abstract Algebra: Pearson New International Edition*, 7th edition. London: Pearson Education Limited, 2013.

[13] Gallian, Joseph A.. *Contemporary Abstract Algebra,* 9th edition. Boston: Cengange Learning, 2015.

[14] Adhikari, Mahima R., and Avishek Adhikari. *Basic Modern Algebra with Applications*. India: Springer, 2014.

[15] Lal, Ramji. *Algebra 1: Groups, Rings, Fields and Arithmetic*. Singapore: Springer, 2017.