Volume 3 Issue 1 (2023) Pages 71-78 P-ISSN:2798-2696 E-ISSN:2798-0057

JOSTECH

Journal of Science and Technology

Website: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/jostech Email: jostech@uinib.ac.id

Penerapan Metode Newton Raphson Untuk Pencarian Akar Pada Fungsi Kompleks

Mohamad Syafi'i✉ [1], Rahmi Ridhallah[2], Rizki Amalia Nur[3],

[1,2,3] (Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia)

email: mohamadsyafii@uinib.ac.id[1], rahmiridhallah@gmail.com[2], rizkiamalianur388@gmail.com[3]

Received 19 Januari 2023, Accepted 24 Maret 2023, Published 31 Maret 2023

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan metode analitik dan metode numerik dalam menentukan akar persamaan dari suatu fungsi kompleks. Metode numerik yang digunakan pada penelitian ini Metode Newton Raphson. Pada penelitian diberikan dua contoh fungsi kompleks $f(z)$, setelah itu dicari akar persamaannya dengan menggunakan metode analitik dan metode Newton Raphson, kemudian dibandingkan hasil yang diperoleh. Pada penelitian ini diberikan dua contoh yaitu $f(z) = z^3 + 1$ dan $f(z) = z^4 + 16$. Pada contoh satu secara analitik diperoleh tiga akar yang berbeda, sedangkan perhitungan secara numerik dengan metode Newton Raphson diperoleh nilai yang konvergen ke salah satu akar yang telah didapatkan secara analitik. Pada contoh dua secara analitik diperoleh empat akar yang berbeda, sedangkan secara numerik dengan metode Newton Raphson demikian pula jika dilakukan dengan metode Newton Raphson diperoleh nilai yang konvergen ke salah satu akar yang telah didapatkan secara analitik.

Kata Kunci: Akar Persamaan, Fungsi Kompleks, *Newton Raphson*

Abstract

This study aims to compare analytical methods and numerical methods in determining the roots of equations of a complex function. The numerical method used in this research is the Newton Raphson method. In this study two examples of complex functions $f(z)$ were given, after which the roots of the equation were searched using the analytical method and the Newton Raphson method, then the results were compared. In this study, two examples are given, namely $f(z) = z^3 + 1$ and $f(z) = z^4 + 16$. In example one, three different roots were obtained analytically, while numerical calculations using the Newton Raphson method obtained a value that converged to one of the roots that had been obtained analytically. In example two, four different roots were obtained analytically, while numerically using the Newton Raphson method similarly if done using the Newton Raphson method, a value that converged to one of the roots that had been obtained analytically was obtained.

Keywords: *Equation Root, Complex Functions, Newton Raphson*

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Metode numerik adalah teknik-teknik yang digunakan untuk memformulasikan masalah matematis agar dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan. Salah satu manfaat penerapan metode numerik adalah bisa menyelesaikan persamaan linear dan nonlinear yang tidak bisa dipecahkan secara analitis. Pada metode numerik, terdapat dua metode yang digunakan untuk mencari solusi atau akar dari suatu persamaan non linier yaitu metode tertutup dan terbuka. Pencarian akar dengan metode tertutup biasanya menggunakan metode grafis, metode biseksi, dan metode regulafalsi, sedangkan pencarian akar dengan metode terbuka biasanya menggunakan iterasi satu titik, metode Newton Raphson [1]. Metode pencarian akar pada dasarnya mencari nilai x yang memenuhi $f(x) = 0$, pada prinsipnya menentukan titik potong grafik $y = f(x)$ dengan sumbu X [2].

Pada penelitian ini akan diterapkan metode Newton Raphson dalam pencarian akar suatu persamaan. Metode Newton Raphson merupakan salah satu metode terbuka yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan non linier dengan melakukan pendekatan terhadap kurva $f(x)$ dengan garis singgung pada suatu titik sebagai nilai awal, dan nilai taksiran selanjutnya adalah titik potong antara garis singgung kurva dengan sumbu X [3].

Beberapa penelitian sebelumnya terkait penyelesaian solusi suatu persamaan dengan metode Newton Raphson adalah perbandiangan metode Newton Raphson dan metode Secant untuk mencari akar persamaan dalam sistem persamaan non linier [4], perbandingan metode Newton Raphson modifikasi dan metode Secant modifikasi dalam penentuan akar persamaan [5], perbandingan metode biseksi dan metode Newton Rahpson dalam penyelesaian persamaan non linier [6], dan nilai awal pada metode Newton Raphson yang dimodifikasi dalam penentuan akar persamaan [7].

Pada penelitian ini, metode Newton Raphson akan digunakan untuk mencari akar persamaan dari fungsi kompleks. Sebuah bilangan kompleks z dinotasikan sebagai pasangan bilangan real (x, y) bisa dituliskan sebagai $z = (x, y)$ atau bisa dituliskan $z = x + iy$ dengan nilai x sebagai bilangan real dari z dan y adalah bagian imajiner dari z dan dapat dinotasikan $x = Re(z)$ dan $y = Im(z)$ dengan i adalah satuan khayal (*imaginary unit*) yang bersifat $i^2 = -1$ [8].

Adapun tujuan dari penilitian ini adalah mencari akar-akar pada fungsi kompleks dengan menggunakan metode Newton Raphson kemudian di interpretasikan fungsi tersebut menggunakan fraktal. Fraktal merupakan suatu kajian dalam ilmu matematika yang mempelajari mengenai bentuk atau geometri yang di dalamnya menunjukan sebuah proses pengulangan tanpa batas. *Julia Set* merupakan objek fraktal acak atau disebut sebagai *random fractal* yang dibentuk dengan memberi batasan-batasan daerah yang digunakan untuk menggambarnya. *Julia Set* ditemukan oleh Gaston Julia merupakan fraktal dimensi dua yang berkaitan dengan bilangan kompleks [9].

METODOLOGI

Metode penelitian yang dilakukan pada penelitian ini adalah studi literatur. Studi literatur merupakan penelitian yang dilakukan berdasarkan informasi dan data dengan bantuan karya tertulis. Dalam studi literatur, teknik pengumpulan data dilakukan dengan menelaah berbagai referensi atau literatur yan berkaitan dengan masalah yang ingin diselesaikan [10].

Melalui studi literatur, peneliti menelaah beberapa referensi untuk mengembangkan penelitian yang dilakukan. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam menentukan akar fungsi kompleks dengan menggunakan metode Newton Raphson adalah sebagai berikut:

1. Diberikan fungsi kompleks

   Misalkan S himpunan bilangan kompleks. Fungsi kompleks $f(z)$ pada S adalah aturan yang mengawankan $z \in S$ dengan bilangan kompleks w dan dinotasikan dengan $w = f(z)$. Dalam hal ini, S disebut domain dari f dan z dinamakan variabel kompleks.

   Fungsi peubah kompleks secara formal didefenisikan sebagai pasangan terurut dua bilangan kompleks (z, w) yang memenuhi syarat – syarat tertentu.

   Misal $w = u + iv$ adalah nilai fungsi f di $z = x + iy$, sehingga $u + iv = f(x + iy)$, Masing masing bilangan real u dan v bergantung pada variabel real x dan y, sehingga $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut dari variabel x dan y, yaitu :

   $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (1)

   Jika koordinat polar r dan θ pada x dan y digunakan, maka

   $u + iv = f(re^{i\theta})$

   hingga $f(z)$ dapat dituliskan dengan [8]

   $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ (2)
2. Ambil nilai awal (z_0)
3. Menghampiri akar fungsi kompleks dengan Metode Newton Raphson dengan menggunakan Matlab

   Secara umum Metode Newton Raphson dirumuskan sebagai berikut [11]:

   $$z_{i+1} = z_i + \frac{f(z_i)}{f'(z_i)}.$$
4. Menghitung akar persamaan fungsi kompleks secara analitik.
5. Menghitung galat mutlak (ε_m)

   $$\varepsilon_m = |Solusi\ Eksak - Solusi\ Numerik|$$
6. Membuat objek fraktal dari fungsi kompleks yang diberikan dengan menggunakan Matlab.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dilakukan proses pencarian akar pada fungsi kompleks secara analitik dan pendekatan numerik dengan menggunakan metode Newton

Raphson. Terdapat dua contoh kasus yang akan menjadi pembahasan pada penelitian ini adalah

a. $f(z) = z^3 + 1$

b. $f(z) = z^4 + 16$

Contoh 1: $\boldsymbol{f(z) = z^3 + 1}$

- Secara analitik

  $z^3 + 1 = 0$

  $z^3 = -1$

  $z^3 = 1(-1 + 0i)$ (sehingga diperoleh $r = 1$ dan $\theta = \pi + 2\pi k$) dengan $k = 0,1,2, \ldots$

  $z^3 = 1 \cdot 1(\cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k))$

  $z^3 = \cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k)$

  $z = (\cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k))^{\frac{1}{3}}$

  $z = \cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$

  Dengan $k = 0,1,2$

  Untuk $k = 0$

  $$\begin{aligned} z &= \cos\left(\frac{\pi+2\pi(0)}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi(0)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i \end{aligned}$$

  Untuk $k = 1$

  $$\begin{aligned} z &= \cos\left(\frac{\pi+2\pi(1)}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi(1)}{3}\right) \\ &= \cos(\pi) + i \sin(\pi) \\ &= -1 + 0\, i \\ &= -1 \end{aligned}$$

  Untuk $k = 2$

  $$\begin{aligned} z &= \cos\left(\frac{\pi+2\pi(2)}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi(2)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i \end{aligned}$$

  Sehingga fungsi $f(z) = z^3 + 1$ mempunyai tiga akar yaitu $z = -1$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$ dan $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$

- Pencarian akar persamaan secara numerik dengan menggunakan Metode Newton Raphson

  Diketahui $f(z) = z^3 + 1$, dengan menggunakan metode Newton Raphson akan dicari akar persamaan fungsinya, dengan nilai awal yang diberikan secara acak. Secara analatik telah didapatkan tiga akar yang berbeda pada contoh 1.

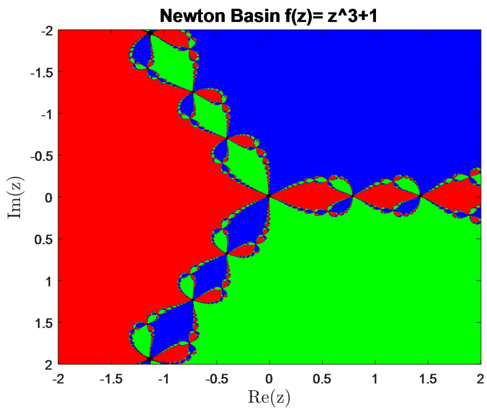
  Melalui pendekatan numerik dengan menggunakan metode Newton Raphson dan tiga nilai awal yang berbeda dalam pencarian akar persamaan pada contoh 1 ditunjukkan pada tabel di bawah ini,

Tabel 1. Pencarian Akar Persamaan Contoh 1 dengan Menggunakan Metode Newton Raphson

No.	Nilai Awal	Akar yang Diperoleh	Jumlah iterasi
1.	$0.5 + 1.7i$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$	9
2.	$-1.5 + i$	-1	8
3.	$1 - 0.5i$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$	10

dengan menggunakan metode Newton Raphson dan tiga nilai awal yang berbeda didapatkan 3 buah akar yang berbeda yang memenuhi $f(z) = 0$ yaitu $z =- 1$, $z = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ dan $z = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$. Perhitungan secara analitik dan numerik dalam menentukan akar persamaan pada fungsi $f(z) = z^3 + 1$ diperoleh tiga akar yang berbeda, berdasarkan tabel 1 galat mutlak yang diperoleh adalah 0.

Perhitungan pendekatan numerik dengan nilai awal yang diberikan, diperoleh tiga akar yang berbeda yang memenuhi $f(z) = 0$. Himpunan nilai awal pada Metode Newton Raphson yang konvergen ke salah satu akar dapat direpresentasikan dengan *Newton Basin* dalam bentuk fraktal seperti pada gambar 1 di bawah ini, dengan $-2 \leq x \leq 2$ dan $-2 \leq y \leq 2$



Gambar 1. Newton Basin $f(z) = z^3 + 1$

Berdasarkan gambar 1, daerah yang berwarna merah merupakan himpunan nilai awal (z_0) yang konvergen pada salah satu akar yang memenuhi $f(z) = 0$ yaitu $z =- 1$, sedangkan daerah yang berwarna hijau himpunan nilai awal yang konvergen ke salah datu akar yang memenuhi $f(z) = 0$ yaitu $z = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$, dan daerah yang berwarna biru merupakan himpunan nilai awal yang konvergen ke salah satu akar yang memenuhi $f(z) = 0$ yaitu $z = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

Contoh 2: $f(z) = z^4 + 16$

- Pencarian akar persamaan secara analitik

  $z^4 + 16 = 0$

  $z^4 =- 16$

  $z^4 = 16(- 1 + 0i)$ (sehingga diperoleh $r = 1$ dan $\theta = \pi + 2\pi k$) dengan $k = 0,1,2, \ldots$

$z^4 = 16 \cdot 1(\cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k))$

$z^4 = 16(\cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k))$

$z = (16(\cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k)))^{\frac{1}{4}}$

$z = 16^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)\right]$

$z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)\right]$

Dengan $k = 0,1,2,3$

Untuk $k = 0$

$$\begin{aligned} z &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi+2\pi(0)}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi(0)}{4}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\right) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2}i \end{aligned}$$

Untuk $k = 1$

$$\begin{aligned} z &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi+2\pi(1)}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi(1)}{4}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\right) \\ &= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \end{aligned}$$

Untuk $k = 2$

$$\begin{aligned} z &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi+2\pi(2)}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi(2)}{4}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\right) \\ &= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

Untuk $k = 3$

$$\begin{aligned} z &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi+2\pi(3)}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi(3)}{4}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\right) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

Sehingga fungsi $f(z) = z^4 + 16$ mempunyai empat akar yaitu $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ dan $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

- Pencarian akar persamaan secara numerik dengan menggunakan Metode Newton Raphson

  Diketahui $f(z) = z^4 + 16$, dengan menggunakan metode Newton Raphson akan dicari akar persamaan fungsinya dengan nilai awal yang diberikan secara acak. Diketahui bahwa secara analatik telah didapatkan empat akar yang berbeda pada kasus 2. Melalui pendekatan numerik dengan menggunakan metode Newton Raphson dan empat nilai awal yang berbeda dalam pencarian akar persamaan pada kasus 2 ditunjukkan pada tabel di bawah ini,

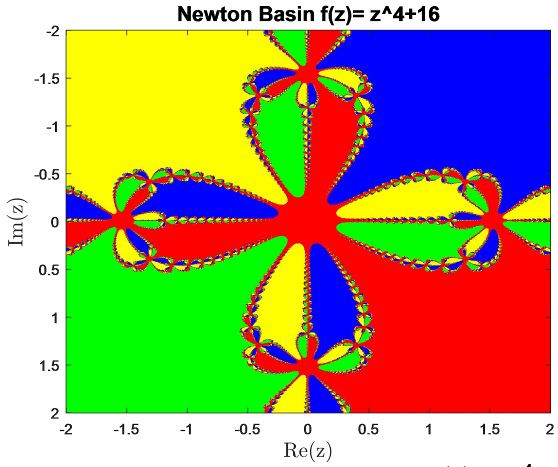
Tabel 2. Pencarian Akar Persamaan Contoh 2

dengan Menggunakan Metode Newton Raphson

No.	Nilai Awal	Akar yang Diperoleh	Jumlah iterasi
1.	$2 + 1.5i$	$\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	6
2.	$-0.2 - i$	$-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	8
3.	$1.5 - i$	$\sqrt{2} - \sqrt{2}i$	6
4	$-1 - 1.5i$	$-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$	6

dengan menggunakan metode Newton Raphson dan empat nilai awal yang berbeda didapatkan 4 buah akar berbeda yang memenuhi persamaan $f(z) = 0$ yaitu $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z =-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z =-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ dan $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Berdasarkan perhitungan secara analitik dan numerik dalam menentukan akar persamaan pada fungsi $f(z) = z^4 + 16$ diperoleh empat akar yang berbeda, berdasarkan tabel 1 galat mutlak yang diperoleh adalah 0.

Perhitungan secara numerik dengan nilai awal yang diberikan, diperoleh empat solusi yang berbeda yang memenuhi $f(z) = 0$. Himpunan nilai awal pada Metode Newton Raphson yang konvergen ke salah satu akar dapat direpresentasikan dengan *Newton Basin* dalam bentuk fraktal seperti pada gambar 2 di bawah ini, dengan $-2 \leq x \leq 2$ dan $-2 \leq y \leq 2$



Gambar 2. Newton Basin $f(z) = z^4 + 16$

Berdasarkan gambar 2, daerah yang berwarna merah merupakan himpunan nilai awal (z_0) yang konvergen pada salah satu akar yang memenuhi $f(z) = 0$ yaitu $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, sedangkan daerah yang berwarna hijau merupakan himpunan nilai awal yang konvergen pada salah satu akar yang memenuhi $f(z) = 0$ yaitu $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, daerah yang berwarna biru merupakan himpunan nilai awal yang konvergen pada salah satu akar yang memenuhi $f(z) = 0$ yaitu $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, dan daerah yang berwarna kuning merupakan himpunan nilai awal yang konvergen pada salah satu akar yang memenuhi $f(z) = 0$ yaitu $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

SIMPULAN

Adapun kesimpulan dalam penelitian ini adalah metode Newton Raphson dapat diterapkan dalam menentukan akar persamaan pada fungsi kompleks. Pada penelitian diberikan contoh kasus yaitu $f(z) = z^3 + 1$ dan $f(z) = z^4 + 16$, akar persamaan kedua contoh tersebut selain dapat ditentukan secara analitik juga dapat dihampiri dengan pendekatan numerik, dalam penelitian ini menggunakan metode Newton Raphson. Berdasarkan perhitungan secara analitik dan numerik dalam menentukan akar persamaan yang diberikan diperoleh hasil yang sama. Pendekatan numerik dengan metode Newton Raphson membutuhkan nilai awal dalam mencari akar suatu persamaan fungsi. Himpunan nilai awal dalam menentukan akar persamaan fungsi kompleks yang memenuhi $f(z) = 0$ dapat direpresentasikan dalam *Newton Basin* dalam bentuk fraktal.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. K. Mahmul and Yudhi, "Modifikasi Metode Newton-Raphson Untuk Mencari Solusi Persamaan Linear Dan Nonlinear," *Bul. Ilm. Mat. Stat dan Ter.*, vol. 6, no. 02, pp. 69–76, 2017.

[2] Rochmad, "Aplikasi Metode Newton Raphson Untuk Menghampiri Solusi Persamaan Non Linear," *J. MIPA*, vol. 36, no. 2, pp. 193–200, 2013.

[3] E. R. Wulan, S. M. Sukarti, and D. Zulkarnaen, "Perbandingan Tingkat Kecepatan Konvergensi dari Metode Newton Raphson dan Metode Secant Setelah Mengaplikasikan Metode Aiken ′ s dalam Perhitungan Akar Pangkat Tiga," *J. Mat. Integr.*, vol. 12, no. 1, pp. 35–42, 2016.

[4] E. Sunandar and Indrianto, "Perbandingan Metode Newton-Raphson & Metode Secant Untuk Mencari Akar Persamaan Dalam Sistem Persamaan Non-Linier," *PETIR J. Pengkaj. dan Penerapan Tek. Inform.*, vol. 13, no. 1, pp. 72–79, 2020.

[5] P. Batarius, "Perbandingan Metode Newton-Raphson Modifikasi Dan Metode Secant Modifikasi Dalam Penentuan Akar Persamaan," *Semin. Nas. Ris. dan Teknol. Terap. 8 (RITEKTRA 8)*, no. April, p. IK 53 – IK 64, 2018.

[6] R. D. Estuningsih and T. Rosita, "NEWTON RAPHSON DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINEAR," *War. Akab Vol.*, vol. 43, no. 2, pp. 21–23, 2019.

[7] P. Batarius, "Nilai Awal Pada Metode Newton Raphson yang Dimodifikasi dalam Penentuan Akar Persamaan," *Pi Math. Educ. J.*, vol. 1, no. 3, pp. 108–115, 2018.

[8] M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Complex Variable*. Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1981.

[9] F. Y. Solar, J. Titaley, and A. J. Rindengan, "Penerapan Geometri Fraktal Dalam Membuat Variasi Motif Batik Nusantara Berbasis Julia Set," *d'CartesiaN J. Mat. dan Apl.*, vol. 9, no. 2, pp. 189–193, 2021.

[10] M. Syafi'i and M. R. Alghazali, "Hampiran Solusi Persamaan Gelombang Dua Dimensi dengan Pendekatan Finite Difference," *Jostech J. Sci. Technol.*, vol. 2, no. 1, pp. 23–30, 2022.

[11] F. Dubeau and C. Gnang, "Fixed Point and Newton's Method in the Complex Plane," *Hindawi J. Complex Anal.*, vol. 2018, no. 4, pp. 1–11, 2018.