



Analisis Model Epidemi Penyebaran Tuberkulosis Dengan Struktur Umur

Erna Sari ^{✉1}, Asrul Sani², Muh. Kabil Djafar³

Program Studi Matematika, Universitas Halu Oleo, Indonesia^{1,2,3}

email: ernas1125@gmail.com¹, saniasrul.math@gmail.com², kabil@bobbelajar.com³

Received 17 April 2023,

Accepted tanggal 10 Oktober 2023,

Published 10 Oktober 2023

Abstrak

Tuberkulosis (TB) adalah penyakit menular akibat infeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis* (Mtb) yang menyerang paru-paru. Penelitian ini menggunakan model SEIRS dengan dua kelompok umur yaitu kelompok anak (c) dan kelompok dewasa (a). Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan model SEIRS penyebaran penyakit tuberkulosis dengan struktur umur dan perilaku penyelesaiannya. Adapun langkah-langkah dalam melakukan analisis model dapat dilakukan dengan cara menentukan titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar, dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dengan cara linearisasi di sekitar titik kesetimbangan. Hasil simulasi yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, artinya penyakit akan menghilang seiring waktu dan titik kesetimbangan endemik stabil jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu, artinya ada penyebaran penyakit dalam populasi.

Kata Kunci: Tuberkulosis; SEIRS; Model Epidemi; Kestabilan Titik Kesetimbangan; Bilangan Reproduksi Dasar.

Abstract

Tuberculosis (TBC) is a contagious disease caused by infection with the bacterium *Mycobacterium tuberculosis* (Mtb), which attacks the lungs. This study uses the SEIRS model with two age groups, group child (c) and group adult (a). The purpose of this research is to determine SEIRS model of the spread tuberculosis disease with age structure and its completion behavior. The steps in analyzing of the model can be done by determining the equilibrium point, determine the basic reproduction number, and analyze the stability of the disease-free equilibrium point by linearizing around the equilibrium point. The simulation result are disease-free equilibrium point is the asymptotic stable if the basic reproduction number is less than one, and it means that the disease will disappear over time, and the endemic equilibrium point is stable if the basic reproduction number is more than one, meaning there is disease spread in the population.

Keywords: Tuberculosis; SEIRS; Epidemic Model; Stability of Equilibrium Points; Basic Reproduction Number

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Tuberkulum Bacillus / Tuberkulosis (TB) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis* (Mtb). Pada tahun 1882 ilmuwan Robert Koch berhasil menemukan kuman tuberkulosis yang merupakan penyebab penyakit ini [1]. Penyakit ini biasanya ditularkan melalui inhalasi percikan ludah dari orang yang terinfeksi oleh *Mycobacterium tuberculosis*. Gejala seseorang yang merupakan penderita TB antara lain batuk selama tiga minggu atau lebih, batuk dengan disertai darah, sakit di dada selama tiga minggu atau lebih, serta demam selama tiga minggu atau lebih [2].

Berdasarkan data World Health Organization (WHO) tahun 2021, menyatakan bahwa tuberkulosis sebagian besar menyerang orang dewasa di tahun-tahun paling produktif, namun semua kelompok umur memiliki resiko terinfeksi tuberkulosis [3]. Orang dengan sistem kekebalan tubuh yang lemah seperti orang dengan HIV, kurang gizi, diabetes atau orang yang merokok, memiliki risiko lebih tinggi untuk terkena tuberkulosis [4].

Dalam memahami penyebaran penyakit tuberkulosis, diperlukan suatu model matematika yang diperoleh melalui proses menerjemahkan masalah kehidupan sehari-hari ke dalam bahasa matematika yang disebut pemodelan matematika [5]. Dari model matematika tersebut akan terbentuk suatu sistem persamaan diferensial yang dapat diketahui suatu titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya. Model dasar tentang penyebaran penyakit pertama kali dirumuskan oleh Kermack dan Mckendrick pada tahun 1927. Dalam modelnya, Kermack-Mckendrick membagi populasi total menjadi tiga kelas, yaitu *Susceptible* (S) merupakan individu rentan, *Infected* (I) adalah individu yang terinfeksi, dan *Recovered* (R) merupakan individu yang telah sembuh [6].

Ada beberapa model epidemi penyebaran penyakit di antaranya adalah SI, SIR, SEIR, dan SEIRS. Model matematika yang digunakan untuk meneliti penyebaran tuberkulosis dengan struktur umur dalam penelitian ini adalah model epidemi SEIRS dengan membagi kelompok umur menjadi dua yaitu kelompok anak dan kelompok dewasa. Model epidemi SEIRS membagi populasi menjadi empat, yaitu *susceptible* (rentan), *exposed* (laten), *infected* (infeksi) dan *recovery* (R). Populasi *recovery* diasumsikan tidak kebal terhadap penyakit sehingga bisa terinfeksi kembali.

Selama penyebaran tuberkulosis perlu diperhatikan bahwa setelah terinfeksi, beberapa individu akan segera mengembangkan penyakit tuberkulosis (dalam beberapa minggu), sebelum sistem kekebalan tubuh dapat melawan bakteri tuberkulosis tersebut. Meski demikian, banyak pula orang dengan infeksi tuberkulosis yang tidak pernah mengembangkan penyakit tuberkulosis disebut dengan individu laten [7]. Iannelli dan Milner [8] berpendapat bahwa struktur usia penting ketika memodelkan penyakit jangka panjang, karena kemungkinan individu yang terinfeksi menjadi individu yang menular dan sembuhnya pasien yang kambuh adalah variabel.

Beberapa penelitian yang dilakukan tentang penyebaran penyakit tuberkulosis dan penelitian tentang model SEIR, di antaranya seperti penelitian tentang penyebaran tuberkulosis dengan periode laten yang dilakukan oleh Tracy Atkins [9]. Penelitian tentang kestabilan model epidemi SEIR dibahas oleh Roni Tri Putra beserta rekannya [10]. Penelitian tentang model SEIR pada penyakit pneumonia yang dibahas oleh Syarifuddin Side beserta rekannya tahun 2021 [11]. Penelitian tentang model tuberkulosis dengan pengobatan dan kekambuhan dibahas oleh Zhong-Kai Guo beserta rekannya [7]. Penelitian tentang dampak vaksinasi dalam penyebaran tuberkulosis menggunakan model matematis dibahas oleh Nkamba beserta rekannya [4].

Berdasarkan uraian tersebut, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk untuk mengetahui langkah-langkah membuat dan mengetahui model matematika penyakit tuberkulosis dengan struktur umur, serta menganalisis kestabilan model epidemi penyebaran tuberkulosis. Analisis kestabilan yang dimaksud adalah mengetahui kestabilan dari berbagai titik kesetimbangannya. Penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan dan menjadi sumber informasi tentang penyebaran tuberkulosis, sehingga dapat digunakan sebagai bahan rujukan yang dapat diaplikasikan dalam dunia kesehatan, serta dapat pula menjadi informasi pada penelitian selanjutnya yang serupa.

METODOLOGI

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan atau *library research* yaitu penelitian yang menggunakan teknik pengumpulan data dengan melakukan pengkajian dan membaca beberapa bahan referensi berupa buku, jurnal, literatur, catatan, internet dan berbagai laporan yang berkaitan dengan judul penelitian.

Adapun Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Membangun model SEIRS untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dengan struktur umur.
 - a. Merumuskan asumsi-asumsi yang berkaitan dengan tuberkulosis.
 - b. Menentukan variabel dan parameter model SEIRS.
 - c. Membuat diagram penyebaran tuberkulosis model SEIRS.
 - d. Membentuk model matematika SEIRS.
2. Menganalisis model SEIRS untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dengan struktur umur
 - a. Menentukan titik kesetimbangan model SEIRS.

Definisi 1 [12] Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, di mana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Titik \mathbf{x}^* disebut titik kesetimbangan dari sistem persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ jika memenuhi $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$.
 - b. Menentukan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) menggunakan matriks *next generation*.
 - c. Menentukan tipe kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobian.

Definisi 2 [13] Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

3. Melakukan simulasi numerik dengan menggunakan Maple 13 dan menginterpretasikan hasil yang diperoleh.
4. menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

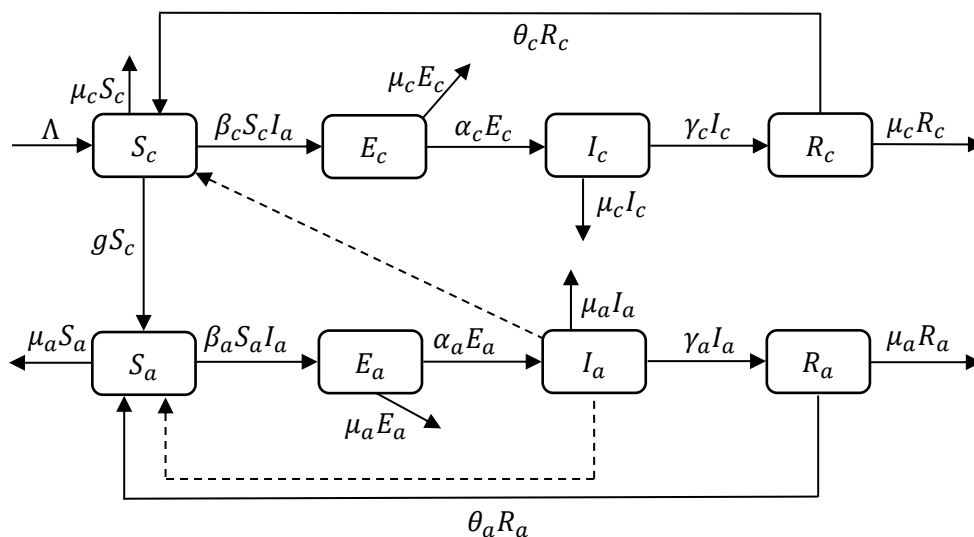
Model SEIRS untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Struktur Umur

Dalam model penyebaran tuberkulosis terstruktur berdasarkan usia, populasinya dibagi menjadi populasi anak (c) dan populasi dewasa (a). Populasi individu dibagi menjadi delapan subpopulasi yaitu subpopulasi anak rentan (S_c), subpopulasi dewasa rentan (S_a), subpopulasi anak terpapar (E_c), subpopulasi dewasa terpapar (E_a), subpopulasi anak terinfeksi (I_c), subpopulasi dewasa terinfeksi (I_a) dan subpopulasi anak sembuh (R_c), subpopulasi dewasa sembuh (R_a).

Ada beberapa asumsi yang digunakan yaitu:

1. Semua bayi yang lahir termasuk *susceptible* (Rentan) artinya tidak memiliki kekebalan.
2. Terdapat masa inkubasi (periode laten) dalam proses penularan penyakit tuberkulosis.
3. Individu dalam periode laten tidak dapat menularkan penyakit.
4. Individu anak dan dewasa yang rentan dapat terinfeksi jika berinteraksi dengan individu dewasa yang terinfeksi.
5. Individu anak yang terinfeksi tidak dapat menularkan penyakit kepada anak rentan dan dewasa rentan.
6. Kematian dapat terjadi karena penyakit.
7. Individu yang sembuh masih bisa terinfeksi kembali (tidak kebal).

Berdasarkan asumsi-asumsi dapat dibentuk model matematika untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dengan struktur umur sebagai berikut:



Gambar 1. Skema Tuberkulosis Dengan Umur

Diperoleh model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis dengan struktur umur yang berupa sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_c}{dt} &= \Lambda + \theta_c R_c - \beta_c S_c I_a - (\mu_c + g) S_c \\
 \frac{dE_c}{dt} &= \beta_c S_c I_a - (\alpha_c + \mu_c) E_c \\
 \frac{dI_c}{dt} &= \alpha_c E_c - (\gamma_c + \mu_c) I_c \\
 \frac{dR_c}{dt} &= \gamma_c I_c - (\mu_c + \theta_c) R_c \\
 \frac{dS_a}{dt} &= g S_c + \theta_a R_a - \beta_a S_a I_a - \mu_a S_a \\
 \frac{dE_a}{dt} &= \beta_a S_a I_a - (\alpha_a + \mu_a) E_a \\
 \frac{dI_a}{dt} &= \alpha_a E_a - (\gamma_a + \mu_a) I_a \\
 \frac{dR_a}{dt} &= \gamma_a I_a - (\mu_a + \theta_a) R_a
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dengan $\Lambda, \beta_c, \beta_a, \alpha_c, \alpha_a, \gamma_c, \gamma_a, \theta_c, \theta_a, \mu_c, \mu_a, g > 0$.

Tabel 1. Daftar Variabel

Simbol	Definisi	keterangan
$S_c(t)$	Anak rentan pada waktu ke-t	Individu
$E_c(t)$	Anak terpapar pada waktu ke-t	Individu
$I_c(t)$	Anak terinfeksi pada waktu ke-t	Individu
$R_c(t)$	Anak sembuh pada waktu ke-t	Individu
$S_a(t)$	Dewasa rentan pada waktu ke-t	Individu
$E_a(t)$	Dewasa terpapar pada waktu ke-t	Individu
$I_a(t)$	Dewasa terinfeksi pada waktu ke-t	Individu
$R_a(t)$	Dewasa sembuh pada waktu ke-t	Individu

Tabel 2. Daftar Parameter

Simbol	Definisi	keterangan
Λ	Angka kelahiran	Parameter
g	Laju kelangsungan hidup anak	Parameter
β_c	Laju penularan TB pada individu anak	Parameter
β_a	Laju penularan TB pada individu dewasa	Parameter
α_c	Laju inkubasi pada individu anak	Parameter
α_a	Laju inkubasi pada individu dewasa	Parameter
γ_c	Laju kesembuhan pada individu anak	Parameter
γ_a	Laju kesembuhan pada individu dewasa	Parameter
θ_c	Laju kehilangan kekebalan pada individu anak	Parameter
θ_a	Laju kehilangan kekebalan pada individu dewasa	Parameter
d_c	Laju kematian pada individu anak	Parameter
d_a	Laju kematian pada individu dewasa	Parameter

Analisis Model Epidemi Tuberkulosis dengan Struktur Umur

Penentuan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan (ekuilibrium) adalah titik yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Titik kesetimbangan digunakan untuk menentukan nilai bilangan reproduksi dasar dan diperlukan dalam menganalisis penyebaran penyakit [5].

Akan dicari titik kesetimbangan berdasarkan persamaan (1). Titik kesetimbangan diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan

$$\frac{dS_c(t)}{dt} = \frac{dE_c(t)}{dt} = \frac{dI_c(t)}{dt} = \frac{dR_c(t)}{dt} = \frac{dS_a(t)}{dt} = \frac{dE_a(t)}{dt} = \frac{dI_a(t)}{dt} = \frac{dR_a(t)}{dt} = 0$$

Persamaan (1) memiliki dua jenis titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1), diperoleh:

Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (S_c, E_c, I_c, R_c, S_a, E_a, I_a, R_a) = \left(\frac{\Lambda}{(\mu_c + g)}, 0, 0, 0, \frac{gS_c}{\mu_a}, 0, 0, 0 \right) \quad (2)$$

Dan titik kesetimbangan endemik

$$E_1 = (S_c^*, E_c^*, I_c^*, R_c^*, S_a^*, E_a^*, I_a^*, R_a^*) \quad (3)$$

dengan

$$S_c^* = \frac{E_c(\alpha_c + \mu_c)(\gamma_c + \mu_c)}{\beta_c E_a \alpha_c}$$

$$E_c^* = \frac{\beta_c S_c E_a \alpha_c}{(\alpha_c + \mu_c)(\gamma_c + \mu_c)}$$

$$I_c^* = \frac{\alpha_c E_c}{(\gamma_c + \mu_c)}$$

$$R_c^* = \frac{\gamma_c \alpha_c E_c}{(\mu_c + \theta_c)(\gamma_c + \mu_c)}$$

$$S_a^* = \frac{(\alpha_a + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a)}{\beta_a \alpha_a}$$

$$E_a^* = \frac{\beta_a S_a I_a}{(\alpha_a + \mu_a)}$$

$$I_a^* = \frac{\alpha_a E_a}{(\gamma_a + \mu_a)}$$

$$R_a^* = \frac{\gamma_a I_a}{(\mu_a + \theta_a)}$$

Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar disimbolkan dengan \mathcal{R}_0 berguna untuk menghitung jumlah rata-rata kasus individu rentan yang terinfeksi yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi yang masuk ke dalam suatu populasi rentan [14]. Nilai reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks *next generation* [15]. Matriks *next generation* (K) dapat diperoleh dengan melakukan pelinearan terhadap subsistem terinfeksi yaitu E_c, I_c, E_a, I_a , diperoleh

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta_c S_c I_a \\ 0 \\ \beta_a S_a I_a \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\alpha_c + \mu_c)E_c \\ -\alpha_c E_c + (\gamma_c + \mu_c)I_c \\ (\alpha_a + \mu_a)E_a \\ -\alpha_a E_a + (\gamma_a + \mu_a)I_a \end{bmatrix}$$

Masing-masing diturunkan terhadap E_c, I_c, E_a, I_a , diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_c S_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_a S_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} (\alpha_c + \mu_c) & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_c & (\gamma_c + \mu_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_a + \mu_a) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_a & (\gamma_a + \mu_a) \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_c + \mu_c)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_c}{(\alpha_c + \mu_c)(\gamma_c + \mu_c)} & \frac{1}{(\gamma_c + \mu_c)} & \frac{1}{(\alpha_a + \mu_a)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_a}{(\alpha_a + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a)} & \frac{1}{(\gamma_a + \mu_a)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substitusi nilai E_0 pada F diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_c \Lambda}{(\mu_c + g)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_a g \Lambda}{\mu_a (\mu_c + g)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dihitung matriks K

$$K = FV^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_c \Lambda \alpha_a}{(\mu_c + g)(\alpha_a + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a)} & \frac{\beta_c \Lambda}{(\mu_c + g)(\gamma_a + \mu_a)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_a g \Lambda \alpha_a}{\mu_a (\mu_c + g)(\alpha_a + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a)} & \frac{\beta_a g \Lambda}{\mu_a (\mu_c + g)(\gamma_a + \mu_a)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det|\lambda I - K| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \frac{\beta_c \Lambda \alpha_a}{(\mu_c + g)(\alpha_a + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a)} & \frac{\beta_c \Lambda}{(\mu_c + g)(\gamma_a + \mu_a)} \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{\beta_a g \Lambda \alpha_a}{\mu_a (\mu_c + g)(\alpha_a + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a)} & \frac{\beta_a g \Lambda}{\mu_a (\mu_c + g)(\gamma_a + \mu_a)} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Diperoleh nilai eigen

$$\lambda_{1,2,3} = 0 \text{ dan } \lambda_4 = \frac{\beta_a g \Lambda \alpha_a}{\mu_a (\mu_c + g)(\alpha_a + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a)}$$

Sehingga diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_a g \Lambda \alpha_a}{\mu_a (\mu_c + g)(\alpha_a + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a)}$$

Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan.

Selanjutnya untuk analisis kestabilan diperoleh sesuai teorema berikut:

1. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{(\mu_c+g)}, 0,0,0, \frac{gS_c}{\mu_a}, 0,0,0 \right)$ stabil asimtotik lokal.
2. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik $E_1 = (S_c^*, E_c^*, I_c^*, R_c^*, S_a^*, E_a^*, I_a^*, R_a^*)$ stabil.

Simulasi Numerik

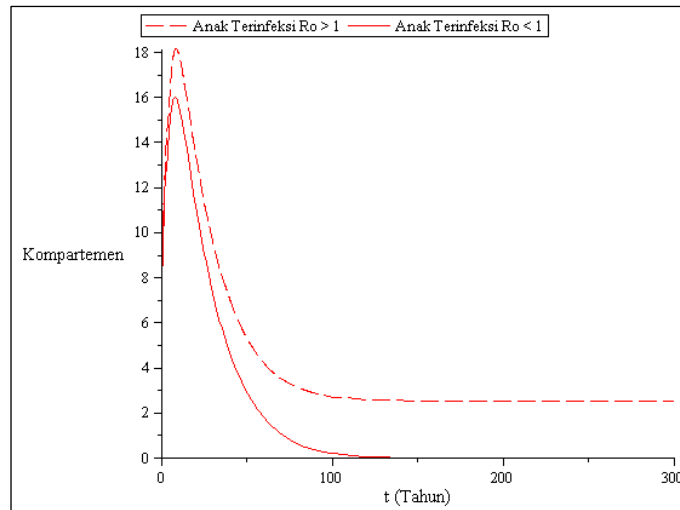
Simulasi numerik dilakukan untuk melihat bagaimana perilaku Sistem (1) pada waktu tertentu dengan memvariasikan parameter-parameter tertentu yang akan mempengaruhi kestabilan model. Pemilihan parameter didasarkan pada studi yang dilakukan oleh berbagai sumber terpercaya. Nilai-nilai parameter yang diambil disajikan dalam Tabel 3, dengan syarat awal yang akan digunakan dalam simulasi model ini adalah sebarang nilai awal untuk variabel populasi anak terinfeksi dan dewasa terinfeksi.

Tabel 3. Nilai Parameter untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$

No	Parameter	Nilai
1	Λ	0.8333
2	g	0.0714
3	β_c	0.01
4	α_c	0.3333
5	γ_c	0.0185
6	θ_c	0.83
7	μ_c	0.05741
8	β_a	0.001
9	α_a	0.3333
10	γ_a	0.0139
11	θ_a	0.873
12	μ_a	0.05751

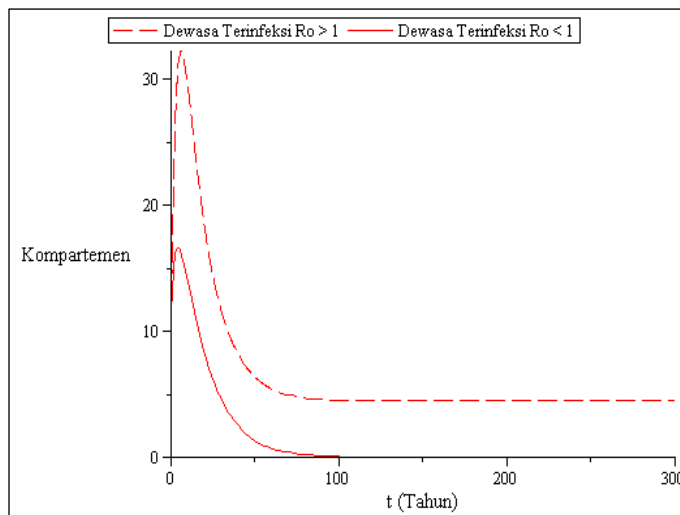
Hasil Simulasi

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 3 dan sebarang nilai awal, maka diperoleh hasil simulasi di titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik pada populasi individu anak terinfeksi dan individu dewasa terinfeksi dengan menggunakan Software Maple 13 dapat dilihat pada grafik berikut.



Gambar 2. Grafik anak terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\mathcal{R}_0 < 1$

Gambar 2 menunjukkan perbandingan kasus infeksi pada kelompok anak saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan kelompok anak saat $\mathcal{R}_0 > 1$ yang mengalami naik turun dengan laju infeksi tuberkulosis sebesar $\beta_c = 0.01$. Grafik merah garis bersambung menunjukkan grafik populasi pada kelompok anak terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 = 0.0959 < 1$ yang mengalami kenaikan, kemudian menurun perlahan hingga mencapai titik di mana kelompok anak terinfeksi tidak mengalami perubahan atau kondisi setimbang di sekitar $I_c = 0$ dan stabil di titik tersebut. Sedangkan grafik merah garis putus-putus merupakan grafik populasi pada kelompok anak terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 = 9.5959 > 1$ yang mengalami kenaikan, kemudian menurun perlahan hingga mencapai kondisi setimbang di sekitar titik kesetimbangan endemik dan stabil di titik tersebut.



Gambar 3. Grafik dewasa terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\mathcal{R}_0 < 1$

Gambar 3 menunjukkan perbandingan kelompok individu dewasa terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan kelompok dewasa terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 > 1$. Grafik merah garis bersambung menunjukkan populasi pada kelompok dewasa terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dengan laju infeksi tuberkulosis sebesar $\beta_a = 0.001$ yang mengalami kenaikan, kemudian menurun hingga mencapai titik di mana kelompok dewasa terinfeksi tidak mengalami perubahan atau kondisi setimbang di sekitar $I_a = 0$ dan stabil di sekitar titik tersebut. Sedangkan grafik berwarna merah garis putus-putus menunjukkan

grafik populasi pada kelompok dewasa terinfeksi saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dengan laju penyebaran tuberkulosis sebesar $\beta_a = 0.1$ yang mengalami kenaikan, kemudian menurun perlahan hingga mencapai kondisi setimbang di titik kesetimbangan endemik dan stabil di titik tersebut.

Berdasarkan Gambar 2 dan Gambar 3 saat $\mathcal{R}_0 < 1$ kondisi titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) bersifat stabil, menunjukkan bahwa penyakit akan menghilang seiring waktu sehingga tidak ada lagi individu yang terinfeksi.

Berdasarkan Gambar 2 dan Gambar 3 terlihat bahwa saat $\mathcal{R}_0 > 1$, titik kesetimbangan endemik (E_1) bersifat stabil asimtotik lokal. Akibatnya masih terjadi penyebaran tuberkulosis pada kelompok anak rentan dan kelompok dewasa rentan dan akan terus meningkat sehingga menjadi wabah.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dipaparkan sebelumnya, maka dapat di simpulkan bahwa berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_a g \Lambda \alpha_a}{\mu_a (\mu_c + g) (\alpha_a + \mu_a) (\gamma_a + \mu_a)}$$

diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) akan stabil asimtotik saat $\mathcal{R}_0 < 1$, ini menunjukkan bahwa penyebaran penyakit akan menghilang dalam jangka waktu tertentu sehingga tidak ada lagi individu yang terinfeksi penyakit dan populasi akan bebas dari penyakit. Sedangkan, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) tidak stabil, sehingga menyebabkan munculnya titik kesetimbangan endemik (E_1) positif yang stabil asimtotik, yang menunjukkan bahwa terjadi penyebaran penyakit di dalam populasi dan sewaktu-waktu dapat berkembang menjadi wabah.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Asrul Sani, M.Sc., Ph.D dan Bapak Dr. Muh. Kabil Djafar, S.T., M.Si yang telah membimbing dan memberikan arahan serta masukan sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] A. Wahdi dan D. R. Puspitosari, *Mengenal Tuberkulosis*. Purwokerto: CV.Pena Persada, 2021.
- [2] J. Crofton, H. L. Rieder, C.-Y. Chiang, R. Gie, dan D. Enarson, *Clinical Tuberculosis*, 3rd Ed. Oxford: Macmillan Publishers Limited, 2009.
- [3] WHO, "World Health Organization, Factsheet on the world tuberculosis report," 2021. <https://www.who.int/en/news-room/fact-sheets/detail/tuberculosis>
- [4] L. N. Nkamba, T. T. Manga, F. Agouanet, dan M. L. M. Manyombe, "Mathematical model to assess vaccination and effective contact rate impact in the spread of tuberculosis," *J. Biol. Dyn.*, vol. 13, no. 1, hal. 26–42, 2019, doi: 10.1080/17513758.2018.1563218.
- [5] A. Puspitosari, Kamira, dan N. Asiyah, "Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Penyebaran Tuberkulosis (TB) dengan Terapi dan," *J. Sains Dan Seni ITS*, vol. 8, no. 2, hal. A58–A64, 2019.
- [6] M. Soleh dan S. Rahma, "Model SEIR Penyakit Campak Dengan Vaksinasi Dan Migrasi," *J. Sains, Teknol. dan Ind.*, vol. 9, no. 2, hal. 113–123, 2012.
- [7] Z. Guo, H. Xiang, dan H. Huo, "Analysis of an age-structured tuberculosis model with

- treatment and relapse," *J. Math. Biol.*, vol. 82, no. 45, hal. 1–37, 2021, doi: 10.1007/s00285-021-01595-1.
- [8] M. Iannelli dan F. Milner, *The Basic Approach to Age-Structured Population Dynamics. Models, methods and numerics*. Dordrecht: Springer Science + Business Media, 2017.
- [9] T. Atkins, "Modeling Transmission Dynamics Of Tuberculosis Including Various Latent Periods," *Electron. Theses Diss.*, vol. 3682, hal. 2004–2019, 2008.
- [10] R. T. Putra, Sukatik, dan S. Nita, "Kestabilan Model Epidemi Seir dengan Matriks Hurwitz," *Poli Rekayasa*, vol. 11, no. 2, hal. 74–82, 2016.
- [11] S. Side, W. Sanusi, dan A. Bohari, "Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Makassar," *JMathCos (Journal Math. Comput. Stat.*, vol. 4, no. 1, hal. 1–12, 2021.
- [12] P. N. V. Tu, *Dynamical System: An Introduction with Applications in Economics and Biology*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [13] H. Anton dan C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, 11th Ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2014.
- [14] O. Diekmann dan J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Disease: Model Building, Analysis and Interpretation*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [15] F. Brauer, P. van den Driessche, dan J. Wu, *Mathematical Epidemiology (Lecturer Notes in Mathematics 1945)*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.