Volume 4 Issue 1 (2024) Pages 1-6 P-ISSN:2798-2696 E-ISSIN:2798-0057
JOSTECH
Journal of Science and Technology
Website: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/jostech Email: jostech@uinib.ac.id

Barisan Cauchy pada Ruang Semimetrik Terbatas

Ilham Dangu Rianjaya ✉[1], Amelia Putri[2], Syarto Musthofa[3]
[1] (Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia)
[2] (Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia)
[3] (Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia)

email: ilham.rianjaya@uinib.ac.id[1], ap6540687@gmail.com[2], syartom@uinib.ac.id[3]

Received 11 Februari 2024, Accepted 27 Maret 2024, Published 31 Maret 2024

Abstrak

Ruang semimetrik yang terbatasi oleh ruang metrik artinya ada ruang metrik yang kelipatannya dengan suatu bilangan konstanta positif membatasi ruang semimetrik di bawah dan di atas. Selain itu, di ruang semimetrik, barisan konvergen belum tentu memenuhi kriteria Cauchy. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat barisan di ruang semimetrik yang memenuhi sifat keterbatasan. Selain itu, digunakan metode pembuktian secara analitik. Hasil yang diperoleh antara lain, ekuivalensi kekonvergenan barisan, dan pemenuhan kriteria Cauchy di ruang semimetrik terbatas dan ruang metrik yang membatasinya. Selain itu, sifat kelengkapan pada salah satu ruang juga menyebabkan ruang lainnya memenuhi sifat kelengkapan.

Kata Kunci: *Barisan Cauchy; barisan konvergen; ruang semimetrik; ruang metrik.*

Abstract

Semimetric spaces with bounded property means that it is bounded below and bounded above by constant multiples of a metric space. Moreover, in semimetric spaces, every convergent sequence is not necessarily to be a Cauchy sequence. This study aims to examine the property of sequences of semimetric spaces with boundary property. In this work, analytical method of proof is used. The results obtained are the equivalence of the convergence of the sequence, and the fulfillment of the Cauchy criterion in the finite semimetric space and the metric space that bounds it. In addition, the completeness property in one space also causes the other space to fulfill the completeness property.

Keywords: *Cauchy sequence; convergent sequence; semimetric spaces; metric spaces.*

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Ruang metrik adalah himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi metrik $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat kepositifan, simetris dan ketaksamaan segitiga [1]. Dalam perkembangannya, ruang metrik sering diperumum dengan memodifikasi sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh fungsi metrik (lihat [2], [3], [4], [5]). Salah satunya adalah ruang semimetrik. Pada ruang semimetrik, fungsi metrik d hanya perlu memenuhi sifat kepositifan dan sifat simetris [2]. Dengan tidak berlakunya ketaksamaan segitiga mengakibatkan barisan konvergen di ruang semimetrik belum tentu memenuhi kriteria Cauchy.

Lebih lanjut, istilah ruang semimetrik terbatas diperkenalkan di [6]. Pada penelitian tersebut didefinisikan versi lemah dari ketaksamaan segitiga pada ruang metrik dan sifat keterbatasan pada ruang semimetrik. Salah satu hasil yang diperoleh yaitu ruang semimetrik yang terbatas ekuivalen dengan ruang metrik yang membatasinya.

Kemudian, pada tahun 2015, Kirk dan Shahzad mengkaji terkait teorema titik tetap pada ruang semimetrik dan barisan Cauchy pada ruang semimetrik. Dalam hal ini, barisan Cauchy ditunjukkan dengan menggunakan kriteria jumlahan (CS) [7]. Barisan Cauchy ini kemudian digunakan untuk membuktikan teorema titik tetap yang diperkenalkan dalam penelitian tersebut.

Terlihat hubungan sifat barisan dari ruang semimetrik yang terbatas kurang menjadi perhatian. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas tentang sifat barisan konvergen di ruang semimetrik yang memenuhi sifat keterbatasan tersebut. Seperti, Bagaimana hubungan antara sifat kekonvergenan barisan dan pemenuhan kriteria Cauchy di ruang semimetrik terbatas dan ruang metrik yang menjadi batas. Selain itu, akan dilihat bagaimana hubungan kelengkapan dari ruang metrik dan ruang semimetrik yang dibatasinya.

METODOLOGI

Berikut ini definisi dari ruang semimetrik yang diperkenalkan oleh Branciari (2000):

Definisi 1 [3] Misal X himpunan tak kosong dan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang memenuhi sifat-sifat berikut

1. (Sifat Kepositifan) $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
2. (Sifat Simetris) $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi semimetrik d disebut ruang semimetrik dan dinotasikan dengan (X, d).

Contoh 1: Misal $X \subseteq \mathbb{R}$, dan $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Perhatikan bahwa fungsi d memenuhi sifat kepositifan karena $|x - y| \geq 0$ dan $|x - y| = 0$ jika dan hanya jika $x = y$. Begitu juga untuk sifat simetris pada fungsi d, berlaku karena $|x-y|$ bersifat simetris. Oleh karena itu (X,d) ruang semimetrik.

Sebagaimana pada definisi barisan konvergen, barisan Cauchy dan Kelengkapan pada $\mathbb{R}$, definisi-definisi tersebut juga berlaku pada ruang semimetrik (X,d) sebagai berikut:

Definisi 2 [7] *Misal (X,d) merupakan ruang semimetrik. Barisan (x_n) di X disebut konvergen ke x apabila*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

atau untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $N\in\mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n\geq N$ mengakibatkan $d(x_n,x)<\varepsilon$.

Definisi 3 [7] *Misal (X,d) merupakan ruang semimetrik. Barisan (x_n) di X disebut memenuhi kriteria Cauchy atau d-Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $N\in\mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m,n\geq N$ mengakibatkan $d(x_n,x)<\varepsilon$.*

Definisi 4 [7] *Suatu ruang semimetrik (X,d) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy memiliki limit.*

Definisi 5 [6] Ruang semimetrik (X,d) disebut memiliki sifat keterbatasan apabila ada ruang metrik (X,ρ) dan konstan positif c_1 dan c_2 sedemikian sehingga untuk setiap $x,y\in X$, berlaku

$$c_1\rho(x,y)\leq d(x,y)\leq c_2 d(x,y). \tag{1}$$

Berikut ini contoh ruang semimetrik yang memenuhi sifat keterbatasan.

Contoh 2: Misal $X=[0,1]$ dan fungsi d adalah fungsi semimetrik yang terdefinisi pada Contoh 1. Jelas bahwa maks$\{|x-y|: x,y\in[0,1]\}=1$ dan min$\{|x-y|: x,y\in[0,1]\}=0$. Maka ada ruang metrik (X,ρ) untuk fungsi metrik $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ dengan $\rho(x,y)=|x-y|$ berlaku

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|x-y| \leq &\frac{|x-y|}{1+|x-y|}\leq |x-y|\\ \frac{1}{2}\rho(x,y)\leq &\quad d(x,y)\quad \leq \rho(x,y)\end{aligned}$$

Berdasarkan hal-hal yang telah dibahas sebelumnya, tujuan dari penelitian ini adalah untuk melihat sifat kekonvergenan barisan pada ruang semimetrik terbatas. Selain itu, kriteria Cauchy serta sifat kelengkapan pada ruang semimetrik terbatas juga akan dibahas sebagai akibat dari sifat kekonvergenannya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1 *Misal (X, d) merupakan ruang semimetrik yang terbatas pada ruang metrik (X, ρ) yang memenuhi ketaksamaan (1). Barisan (x_n) konvergen di (X, d), jika dan hanya jika (x_n) konvergen pada (X, ρ).*

Bukti: Diketahui (X, ρ) dan (X, d) berurut-turut merupakan ruang metrik dan ruang semimetrik yang terbatas pada (X, d). Karena itu, ada bilangan konstan real positif c_1 dan c_2 sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi ketaksamaan (1). Misal (x_n) barisan yang konvergen ke x di (X, d), artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < c_1\varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$. Akibatnya berdasarkan ketaksamaan (2)

$$\rho(x_n x) \leq \frac{d(x_n, x)}{c_1} < \frac{c_1\varepsilon}{c_1} = \varepsilon.$$

Artinya (x_n) merupakan barisan konvergen di (X, ρ).

Sebaliknya, misal (x_n) konvergen ke x' pada $(X. \rho)$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli N sedemikian sehingga untuk $n \geq N$ berlaku $d(x_n, x') < \frac{\varepsilon}{c_2}$. Akibatnya,

$$d(x_n, x) \leq c_2\rho(x_n, x) < c_2\frac{\varepsilon}{c_2} = \varepsilon.$$

Jadi (x_n) juga merupakan barisan konvergen di (X, d). ■

Akibat *Misal (X, d) merupakan ruang semimetrik yang terbatas pada ruang metrik (X, ρ) yang memenuhi ketaksamaan (1). Jika (x_n) konvergen di (X, d) maka (x_n) barisan Cauchy di (X, d).*

Bukti: Diketahui (X, ρ) dan (X, d) berurut-turut merupakan ruang metrik dan ruang semimetrik yang terbatas pada (X, d). Misal (x_n) sebarang barisan konvergen di (X, d) Berdasarkan Teorema sebelumnya, diperoleh bahwa (x_n) konvergen di (X, ρ). Dengan kata lain, jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ maka ada bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n \geq N$ ketaksamaan $\rho(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2c_2}$ terpenuhi. Akibatnya untuk $n, m \geq N$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq c_2\rho(x_n, x_m) \\ &\leq c_2\big(\rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)\big) \\ &< c_2\left(\frac{\varepsilon}{2c_2} + \frac{\varepsilon}{2c_2}\right) \\ &= c_2\frac{\varepsilon}{c_2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi barisan (x_n) memenuhi kriteria Cauchy di (X, d). ■

Teorema 1 *Misal (X, d) merupakan ruang semimetrik yang terbatas pada ruang metrik (X, ρ) yang memenuhi ketaksamaan (1). Barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di (X, d), jika dan hanya jika (x_n) Cauchy di (X, ρ).*

Bukti: Ambil sebarang barisan Cauchy (x_n) di (X, d). Ini artinya untuk seberang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n, m \geq N$ mengakibatkan $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon c_1$ berlaku. Namun, karena (X, d) terbatas pada (X, ρ) maka

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{d(x_n, x_m)}{c_1} < \frac{\varepsilon c_1}{c_1} = \varepsilon.$$

Jadi (x_n) merupakan barisan Cauchy di (X, ρ).

Sebaliknya, jika diambil sebarang barisan Cauchy (x_n) di (X, ρ). Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{c_2}$ berlaku untuk setiap $n, m \geq N$. Berdasarkan ketaksamaan ( ), mengakibatkan

$$d(x_n, x_m) \leq c_2 \rho(x_n, x_m) < c_2 \frac{\varepsilon}{c_2} = \varepsilon.$$

Dengan kata lain, (x_n) juga merupakan barisan Cauchy di (X, ρ). ■

Akibat 1 *Misal (X, d) merupakan ruang semimetrik yang terbatas pada ruang metrik (X, ρ) yang memenuhi ketaksamaan (1). Ruang semimetrik (X, d) $lengkap$ jika dan hanya jika ruang metrik (X, ρ) lengkap.*

Bukti: Misal (X, d) lengkap. Ambil sebarang barisan Cauchy (x_n) di (X, ρ). Maka menurut Teorema 2 barisan (x_n) juga Cauchy di (X, d). Akibatnya barisan (x_n) konvergen di (X, d). Lebih jauh, berdasarkan Teorema 1, barisan (x_n) juga konvergen di (X, ρ). Dengan kata lain (X, ρ) lengkap.

Sebaliknya, misal (X, ρ) lengkap. Ambil sebarang barisan (x_n) yang memenuhi kriteria Cauchy di (X, d). Menurut teorema 2, barisan (x_n) juga Cauchy di (X, ρ) sehingga (x_n) konvergen di (X, ρ). Kemudian, menurut Teorema 1, barisan (x_n) juga konvergen di (X, ρ). Karena pengambilan (x_n) sebarang, maka diperoleh bahwa (X, d) lengkap. ■

SIMPULAN

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh dapat disimpulkan bahwa jika (X, d) merupakan ruang semimetrik yang terbatas pada ruang metrik (X, ρ), maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku:

1. Barisan (x_n) konvergen di (X, d) jika dan hanya jika (x_n) konvergen di (X, ρ)
2. Jika (x_n) konvergen di (X, d) maka (x_n) Cauchy di (X, d).
3. Barisan Cauchy (x_n) di (X, d) jika dan hanya jika (x_n) Cauchy di (X, ρ)
4. Ruang semimetrik (X, d) lengkap jika dan hanya jika ruang metrik (X, ρ) lengkap

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. O'Searcoid, *Metric spaces*. Springer Science & Business Media, 2006.
[2] W. A. Wilson, "On semi-metric spaces," *American Journal of Mathematics*, vol. 53, no. 2, hlm. 361–373, 1931.
[3] A. Branciari, "A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces," *Publ. Math. Debrecen*, vol. 57, no. 1–2, hlm. 31–37, 2000.
[4] Z. Kadelburg dan S. Radenovic, "On generalized metric spaces: a survey," *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 1, hlm. 3–13, 2014.
[5] S. Czerwik, "Contraction mappings in $ b $-metric spaces," *Acta mathematica et informatica universitatis ostraviensis*, vol. 1, no. 1, hlm. 5–11, 1993.
[6] R. Fagin dan R. Kumar, "Comparing top k lists," *SIAM Journal on discrete mathematics*, vol. 17, no. 1, hlm. 134–160, 2003.
[7] W. Kirk dan N. Shahzad, "Fixed points and Cauchy sequences in semimetric spaces," *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, vol. 17, hlm. 541–555, 2015.