Volume 4 Issue 1 (2024) Pages 49-62 P-ISSN:2798-2696 E-ISSIN:2798-0057

JOSTECH

Journal of Science and Technology

Website: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/jostech Email: jostech@uinib.ac.id

Aplikasi Metode Kendali LQR (*Linier Quadratic Regulator*) pada Sistem Suspensi Seperempat Mobil

Ezhari Asfa'ani ✉[1], **Anisa Rizki Sari** [2], **Lilis Harianti Hasibuan** [3]

Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [1,2,3]

email: ezhariasfaani@uinib.ac.id[1], anisarizkisari2002@gmail.com[2]

Received 08 Maret 2024, Accepted 30 Maret 2024, Published 31 Maret 2024

Abstrak

Penelitian ini membahas perancangan metode kendali *Linear Quadratic Regulator* (LQR) pada sistem suspensi mobil. Sistem suspensi mobil yang diperhatikan dibatasi oleh model seperempat mobil. Persamaan dinamis dari sistem seperempat mobil diturunkan dengan menerapkan Hukum Kedua Newton. Selanjutnya dibandingkan sistem suspensi tanpa kendali dengan sistem suspensi yang sudah diberi kendali. Sistem suspenpsi seperempat mobil tanpa kendali memiliki nilai eigen $-1{,}3658 + 0{,}0000i$; $0{,}9635 + 0{,}0000i$; $-0{,}0488 + 0{,}3156i$ dan $-0{,}0488 - 0{,}3156i$ yang artinya sistem tidak stabil. Sedangkan sistem suspensi seperempat mobil yang sudah diberi kendali LQR memiliki nilai eigen $-111{,}8113; -74{,}4464$; $-36{,}9243$ dan $-14{,}0242$ yang artinya sistem stabil asimtotik. Berdasarkan analisis nilai eigen dan simulasi numerik, kendali LQR dapat menstabilkan sistem suspensi seperempat mobil.

Kata Kunci: *Sistem suspensi seperempat mobil; kendali LQR.*

Abstract

This research discusses the design of the Linear Quadratic Regulator (LQR) control method for car suspension systems. The car suspension systems considered are limited to quarter car models. The dynamic equations of the quarter car system are derived by applying Newton's Second Law. Next, a suspension system without control is compared with a suspension system that has been given control. The uncontrolled quarter car suspension system has an eigenvalue of -1.3658 + 0.0000i; 0.9635 + 0.0000i; -0.0488 + 0.3156i and -0.0488 - 0.3156i which means the system is unstable. Meanwhile, the quarter car suspension system that has been given LQR control has an eigenvalue of -111.8113; -74.4464; -36.9243 and -14.0242 which means the system is asymptotically stable. Based on eigenvalue analysis and numerical simulation, LQR control can stabilize the quarter car suspension system.

Keywords: *Quarter Car Suspension System; LQR Control.*

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Istilah kendali pada artikel ini mengacu pada metode penanganan sistem sedemikian sehingga sistem dinamis menjadi yang diinginkan. Sistem kendali melibatkan dua sistem dinamik yang terhubung dan saling mempengaruhi satu sama lain. Dalam melakukan desain kendali sangat penting untuk menghasilkan sistem yang stabil. Kemudian menghitung koreksi yang diperlukan berdasarkan model dan memerintahkan sistem untuk bergerk sesuai dengan hasilnya [1].

Salah satu metode kendali dapat digunakan untuk mencapai tujuan diatas adalah menggunakan metode kendali LQR berdasarkan model seperepat mobil. Kendali LQR adalah salah satu metode dengan algoritma desain kendali. Kendali LQR merupakan pengembangan dari metode *pole-placement*, yang secara garis besar fungsi kendali LQR adalah menentukan matriks *feedback* yang dipasangkan pada sistem sedemikian sehingga mampu menstabilkan sistem dengan meminimalkan fungsi tujuan yang diperlukan [2].

Mobil merupakan alat transportasi yang sangat menunjang bagi kehidupan manusia, dimana terdapat sistem suspensi untuk memberikan kenyamanan dalam berkendara akibat ketidakrataan permukaan jalan [3][4]. Sistem suspensi merupakan bagian dinamis pada kendaraan otomotif yang berfungsi menunjang kemampuan penahan jalan kendaraan, menahan beban kendaraan akibat beban statis, dan mengisolasi badan kendaraan dari gangguan yang diakibatkan oleh gaya eksitasi kendaraan. Dengan menggunakan sistem suspensi yang baik diharapkan dapat mencapai keselamatan, kenyamanan, keandalan mekanik dan masa pemakaian yang lama [5]

Dalam penelitian ini dikaji model matematika dan masalah pengendalian sistem suspensi pada model kendaraan seperempat mobil. Desain kendali LQR dengan menggunakan simulasi MATLAB dapat dirancang melalui model matematika dari Persamaan dinamis sistem dan Persamaan *state space*. Sistem dengan kendali LQR diharapkan mampu mengendalikan sistem suspensi dengan baik, yang memiliki respon keluaran sistem menjadi cepat dan tidak memiliki *error steady state*.

Dengan mengurangi getaran akibat ketidakrataan jalan dan kecepatan kendaraan, sistem suspensi pada mobil membantu pengemudi merasa lebih nyaman saat berkendara. Dengan mencari kenyamanan dalam berkendara kemudian dibuat model matematika sistem dan diberikan kendali pada sistem supaya stabil sehingga pengendara nyaman di mobil.

Tujuan dari penulisan artikel ini, yaitu:

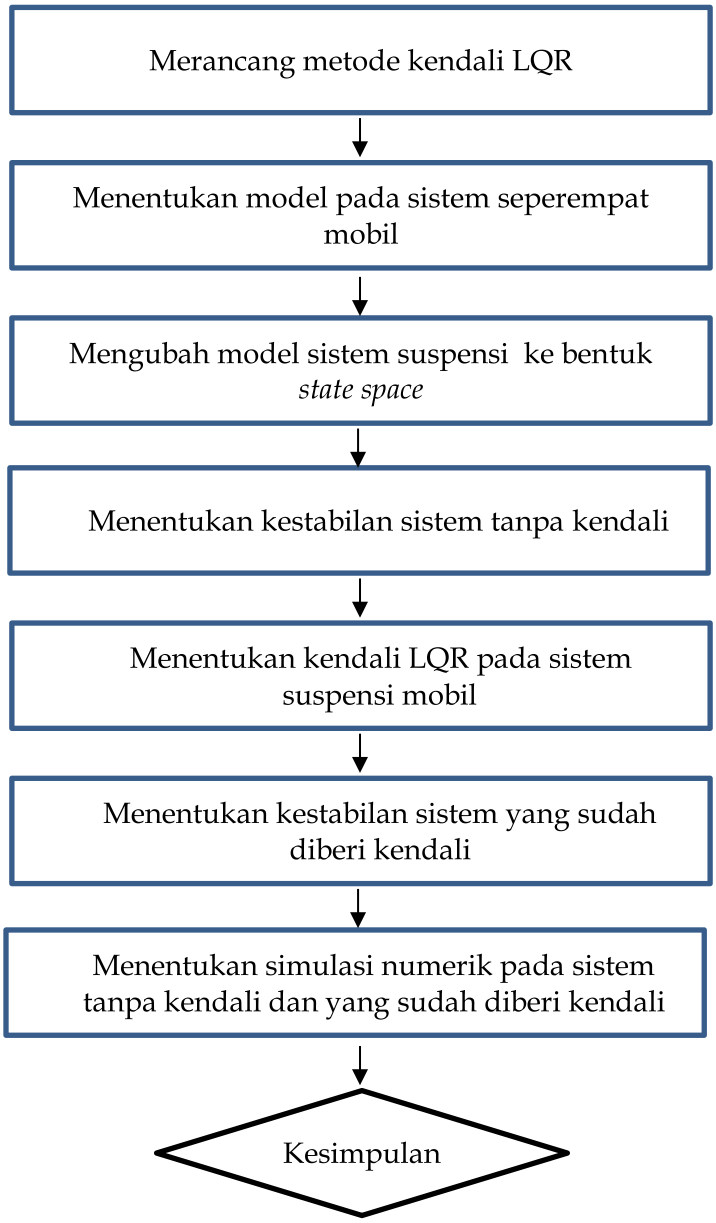
1. Untuk merancang metode kendali LQR pada sistem suspensi mobil.
2. Mensimulasikan desain kendali LQR yang dibuat menggunakan matlab.

Manfaat yang diperoleh dalam penulisan artikel ini yaitu:

1. Untuk dapat dijadikan sebagai rujukan atau referensi penelitian selanjutnya.
2. Untuk dapat menerepkan dan mengembangkan pengetahuan terkait sistem suspensi mobil, sehingga ilmu yang diperoleh dapat diaplikasikan.
3. Menambah pengetahuan penulis terkait metode kendali LQR aplikasinya pada sistem suspensi mobil.

METODOLOGI

Jenis penelitian yang akan digunakan pada artikel ini adalah studi literatur dan simulasi komputer menggunakan Matlab [6] . Langkah-langkah sebagai berikut ini:



Gambar 1. Diagram Alir Penelitian

Bentuk umum sistem n persamaan diferensial linear homogen koefisien konstan dengan n variabel tak bebas adalah

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

dengan a_{ij} konstanta-konstanta real. Sistem diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ [7].

Berikut definisi nilai eigen yang akan digunakan untuk menentukan kestabilan sistem linear

Definisi 1 [8][9] *Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$, yaitu $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan $\mathbf{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.*

Teorema berikut menjelaskan kestabilan sistem linear homogen

Teorema 2 [10]**.** *Diberikan sistem Persamaan diferensial linier $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, dengan matriks A memiliki nilai eigen yang berbeda $\lambda_{1,\dots,}\lambda_k$ dimana $(k \leq n)$. Titik setimbang $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stabil asimtotik, jika dan hanya jika $\Re(\lambda_i) < 0$ untuk $i = 1,2,\dots,k$. Titik $\mathbf{x} = 0$ stabil jika dan hanya jika $\Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk $i = 1,2,\dots,k$ dan lebih jauh setiap nilai eigen dengan $\Re(\lambda_i) = 0$ berhubungan dengan vektor-vektor eigen bebas linier yang jumlahnya sama dengan multiplisitas λ_1.*

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan diuraikan tentang metode kendali LQR, model sistem suspensi seperempat mobil, mengubah sistem tersebut kedalam bentuk *state space,* kestabilan sistem tanpa kendali, kendali LQR pada sistem suspensi mobil, kestabilan sistem yang sudah diberi kendali dan simulasi numerik pada sistem seperempat mobil.

Metode Kendali LQR

Kendali *Linear Quadratic Regulator* (LQR) merupakan bagian dari kendali optimal. Kendali optimal menyediakan metode desain/merancang kendali untuk sistem multivariabel, di mana matriks kendali ditentukan melalui meminimalkan fungsi tujuan [11]. Kendali LQR ditentukan oleh fungsi tujuan yang berbentuk kuadratik, dan sistem yang berbentuk linier [12].

Diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{1}$$

Akan ditentukan matriks **K** dari vektor kendali optimal

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x}(t) \tag{2}$$

sehingga dapat meminimalkan fungsi tujuan

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u})dt \tag{3}$$

dimana Q adalah matriks semidefinite positif dan R adalah definite positive.

Dengan memsubtitusikan Persamaan (2) ke Persamaan (1) diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - BK = (A - BK)\mathbf{x}$$

Diasumsikan bahwa matriks $A - BK$ stabil, atau bahwa nilai eigen dari $A - BK$ memiliki bagian real negatif.

Dengan subtitusikan Persamaan (2) ke Persamaan (3) menghasilkan,

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T (Q + K^T RK)\mathbf{x}\, dt$$

Misalkan,

$$\mathbf{x}^T (Q + K^T RK)\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T P\mathbf{x})$$

dimana P adalah matriks definit positif. Kemudian diperoleh,

$$\mathbf{x}^T(Q + K^T RK)\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T P\mathbf{x} - \mathbf{x}^T P\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T[(A - BK)^T P + P(A - BK)]\mathbf{x}$$

Sehingga,

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T RK) \tag{4}$$

Dari fungsi tujuan J dapat dievaluasi sebagai

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^\mathbf{T}(Q + K^T RK)\mathbf{x}\, dt = -x^T[(A - BK)^T P + P(A - BK)]\mathbf{x}$$

Karena semua nilai eigen dari $A - BK$ diasumsikan memiliki bagian real negatif,maka $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow \mathbf{0}$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \mathbf{x}^T(Q + K^T RK)\mathbf{x}\, dt \\ &= \left[-\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T P\mathbf{x})dt\right] \\ &= [\mathbf{x}^T P\mathbf{x}]_0^\infty \\ J &= \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) \end{aligned} \tag{5}$$

Dengan demikian, fungsi tujuan J dapat diperoleh dari kondisi awal $\mathbf{x}(0)$ dan P.

Selanjutnya akan dicari solusi dari masalah kendali LQR. Karena R telah diasumsikan sebagai matriks definit positif atau matriks simetris real, maka dapat ditulis,

$$R = T^T T$$

dimana T adalah matriks nonsingular. Sehingga Persamaan (4) dapat ditulis sebagai

$$A^T P - K^T B^T + PA - PBK + Q + K^T T^T TK = 0$$

Yang dapat ditulis ulang sebagai,

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1}B^T P]^T[TK - (T^T)^{-1}B^T P] - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Minimalkan J ekuivalen dengan meminimalkan,

$$\mathbf{x}^T[TK - (T^T)^{-1}B^T)^T[TK - (T^T)^{-1}B^T P]\mathbf{x}$$

terhadap K. Karena pernyataan terakhir nonnegatif, maka

$$TK = (T^T)^{-1}B^T$$

Sehingga diperoleh,

$$K = T^{-1}(T^T)^{-1}B^T P = R^{-1}B^T P \tag{6}$$

Dengan demikian kendali optimal LQR adalah [13]

$$\mathbf{u}(\mathrm{t}) = -K\mathbf{x}(t) = -R^{-1}B^T P\mathbf{x}(t)$$

dimana matriks P harus memenuhi Persamaan (4) atau Persamaan tereduksi berikut:

$$A^T P + PA - BPR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{7}$$

Contoh 1. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diasumsikan kendali berbentuk

$$\mathbf{u}(\mathrm{t}) = -K\mathbf{x}(\mathrm{t})$$

Akan ditentukan matriks K yang optimal sehingga minimalkan,

$$\mathrm{J} = \int_0^\infty (x^T Qx + \mathbf{u^2})dt$$

dimana

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\mu \geq 0)$$

Akan dicari matriks P yang merupakan solusi dari Persamaan aljabar Riccati (7). Perhatikan bahwa matriks A real dan matriks Q simetris real, sehingga matriks P adalah matriks simetris real. Oleh karena itu, diperoleh;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1][0 \quad 1]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Persamaan ini disederhanakan menjadi,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas didapat Persamaan,

$$1 - p_{12}^2 = 0$$
$$p_{11} - p_{12}p_{22} = 0$$
$$\mu + 2p_{12} - p_{22}^2 = 0$$

Akibatnya diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu + 2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu + 2} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} K &= R^{-1}B^TP \\ &= [1][0 \quad 1]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= [p_{12} \quad p_{22}] = \left[1 \quad \sqrt{\mu + 2}\right] \end{aligned}$$

Dengan demikian, kendali LQR adalah,

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} = -x_1 - \sqrt{\mu + 2}x_2 \tag{8}$$

Perhatikan bahwa kendali yang diberikan oleh Persamaan (8) menghasilkan hasil yang optimal untuk setiap keadaan awal di bawah fungsi tujuan yang diberikan.

Maka didapat Persamaan karakteristik sebagai beriku :

$$|sI - A + BK| = s^2 + \sqrt{\mu + 2}\, s + 1 = 0$$

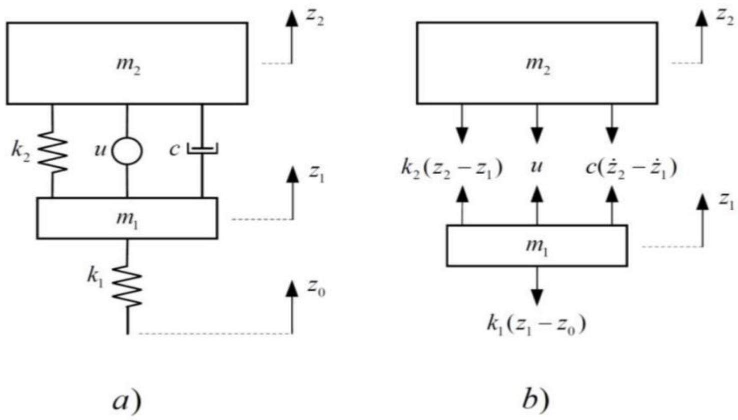
Jika $\mu = 1$, maka

$$s = -0{,}866 + j\,0.5, \qquad s = -0{,}866 - j\,0.5$$

Karena bagian *real negative*, maka sistem stabil setelah diberi kendali LQR.

Model Sistem Suspensi Seperempat Mobil

Akan dimodelkan sistem suspensi seperempat mobil



Gambar 2. **(a) Model sistem seperempat mobil, (b) Diagram bebas sistem suspensi mobil** [14]

dimana

m_1 : Massa *unsprung*
m_2 : Massa *sprung*
u : Gaya yang dihasilkan aktuator
c : Koefisien redaman
k_1 : Konstanta pegas antara *unsprung* dan ban mobil
k_2 : Konstanta pegas antara *unsprung* dan *sprung*
z_0 : Posisi jalan
z_1 : Posisi massa *unsprung* secara vertikal
z_2 : Posisi massa *sprung* secara vertikal

Persamaan dinamis dari sistem suspensi diturunkan berdasarkan hukum kedua Newton. Pada unsprung bekerja 4 gaya yaitu:

1. Gaya pegas antara unsprung dan sprung
   Karena $F = k.x$ [15]
   F : gaya pegas
   k : konstanta pegas
   x : pertambahan panjang pegas akibat dari gaya
   Maka diperoleh gaya pegas pada *unsprung* adalah
   $$F_1 = k_2(z_2 - z_1)$$
2. Gaya yang dihasilkan oleh aktuator $F_2 = u$
3. Gaya redaman
   Karena $F = c\frac{dy}{dt}$ [16]
   F : gaya redaman
   c : koefisien redaman
   $\frac{dy}{dt}$: kecepatan
   Maka diperoleh gaya redaman pada *unsprung* adalah $F_3 = c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$
4. Gaya pegas antara unsprung dan ban mobil
   Karena $F = k.x$
   F : gaya pegas
   k : konstanta pegas
   x : pertambahan panjang pegas akibat dari gaya

Maka diperoleh gaya pegas pada *unsprung* adalah

$$F_4 = -k_1(z_1 - z_0)$$

Karena gaya pegas antara unsprung dan ban mobil arah ke bawah, maka gaya tersebut bernilai negatif

Berdasarkan Hukum kedua Newton yaitu

$$\sum F = ma$$

maka didapat:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = ma$$
$$k_2(z_2 - z_1) + u + c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_1(z_1 - z_0) = m_1\ddot{z}_1.$$

Akibatnya

$$k_2z_2 - k_2z_1 + u + c\dot{z}_2 - c\dot{z}_1 - k_1z_1 + k_1z_0 = m_1\ddot{z}_1$$
$$\ddot{z}_1 = \frac{k_2z_2}{m_1} - \frac{k_2z_1}{m_1} + \frac{1}{m_1}u + \frac{c\dot{z}_2}{m_1} - \frac{c\dot{z}_1}{m_1} - \frac{k_1z_1}{m_1} + \frac{k_1z_0}{m_1}$$
$$\ddot{z}_1 = \frac{c}{m_1}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - \frac{k_1+k_2}{m_1}z_1 + \frac{k_2}{m_1}z_2 + \frac{1}{m_1}u + \frac{k_1}{m_1}z_0 \tag{9}$$

Selanjutnya akan diuraikan gaya-gaya pada sprung:

1. Gaya pegas antara *sprung* dan *unsprung*

   Karena $F = k.x$

   F : gaya pegas

   k : konstanta pegas

   x : pertambahan panjang pegas akibat dari gaya

   Maka diperoleh gaya pegas pada *sprung* adalah

   $$F_1 = -k_2(z_2 - z_1)$$

   Karena gaya pegas antara *sprung* dan *unsprung* arah ke bawah maka gaya tersebut bernilai negatif

   Karena k_2 pada *sprung* arah ke bawah maka bernilai negatif
2. Gaya yang dihasilkan oleh aktuator $F_2 = -u$
3. Gaya redaman

   Karena $F = c\frac{dy}{dt}$

   F : gaya redaman

   c : koefisien redaman

   $\frac{dy}{dt}$: kecepatan

   Maka diperoleh gaya redaman pada *sprung* adalah $F_3 = -c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$.

   Karena gaya redaman antara *sprung* dan *unsprung* arah kebawah, maka gaya tersebut bernilai negatif.

   Berdasarkan hukum kedua Newton yaitu

   $$\sum F = ma$$

   maka didapat:

   $$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = ma$$
   $$-k_2(z_2 - z_1) - u - c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = m_2\ddot{z}_2$$

   Akibatnya

   $$-k_2z_2 + k_2z_1 - u - c\dot{z}_2 + c\dot{z}_1 = m_2\ddot{z}_2$$
   $$\ddot{z}_2 = \frac{-k_2z_2}{m_2} + \frac{k_2z_1}{m_2} - \frac{1}{m_2}u - \frac{c\dot{z}_2}{m_2} + \frac{c\dot{z}_1}{m_2}$$

$$\ddot{z}_2 = -\frac{c}{m_2}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - \frac{k_2}{m_2}(z_2 - z_1) - \frac{1}{m_1}u \quad (10)$$

dari Persamaan (9) dan (10) diperoleh model sistem suspensi seperempat mobil.

Mengubah Sistem kedalam Bentuk State Space

Misalkan:

$$x_1 = z_1, x_2 = \dot{z}_1, x_3 = z_2$$
$$x_4 = \dot{z}_2, w = z_0$$

Model suspensi seperempat mobil yang telah didapatkan yaitu:

$$\ddot{z}_1 = \frac{c}{m_1}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - \frac{k_1+k_2}{m_1}z_1 + \frac{k_2}{m_1}z_2 + \frac{1}{m_1}u + \frac{k_1}{m_1}z_0 \quad (11)$$

$$\ddot{z}_2 = -\frac{c}{m_2}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - \frac{k_2}{m_2}(z_2 - z_1) - \frac{1}{m_1}u \quad (12)$$

Karena $x_1 = z_1$, maka $\dot{x}_1 = \dot{z}_1 = x_2$
Karena $x_2 = \dot{z}_1$, maka $\dot{x}_2 = \ddot{z}_1$
Karena $x_3 = z_2$, maka $\dot{x}_3 = \dot{z}_2 = x_4$
Karena $x_4 = \dot{z}_2$ maka $\dot{x}_4 = \ddot{z}_2$
Akibatnya,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{c}{m_1}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - \frac{k_1+k_2}{m_1}z_1 + \frac{k_2}{m_1}z_2 + \frac{1}{m_1}u + \frac{k_1}{m_1}z_0 \\ x_4 \\ -\frac{c}{m_2}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - \frac{k_2}{m_2}(z_2 - z_1) - \frac{1}{m_1}\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{-c}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{c}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{-1}{m_2} \end{bmatrix}\mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{w}$$

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{-c}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{c}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-c}{m_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{-1}{m_2} \end{bmatrix}, \text{dan } D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga model sistem seperempat mobil dapat ditulis dalam bentuk *state space*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + D\mathbf{w}$$

dengan,
x : vektor *state*
u : vektor kendali
w : vektor gangguan

Kestabilan Sistem Tanpa Kendali

Akan ditentukan solusi model tanpa kendali ($\mathbf{u} = 0$) dan tanpa gangguan ($\mathbf{w} = 0$).

Misalkan:
m_1 = 28,58 kg
m_2 = 288,9 kg

$c\ \ =\ 1300$ Ns/m
$k_1 = 1{,}559\ \times\ 10^5 = 155900$ N/s
$k_2 = 19{,}96 \times 10^3 = 199600$ Ns/m
Karena

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{-c}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{Sc}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{c}{m_2} & \dfrac{-k_2}{m_2} & \dfrac{-c}{m_2} \end{bmatrix}$$

maka didapat

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1{,}2439 & -0{,}0045 & 0{,}06984 & 0{,}0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}0691 & 0{,}0004 & -0{,}069 & -0{,}0004 \end{bmatrix}$$

Dengan program MATLAB diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $-1{,}3658\ +\ 0{,}0000i;\ 0{,}9635\ +\ 0{,}0000i; -0{,}0488\ +\ 0{,}3156i$ dan $-0{,}0488\ -\ 0{,}3156i$. Karena terdapat $\Re(\lambda_i) > 0$, maka didapat sistem suspensi seperempat mobil tidak stabil.

Kendali LQR Pada Sistem Suspensi Mobil

Akan ditentukan kendali LQR pada sistem suspensi mobil tanpa gangguan ($\mathbf{w} = 0$). Diperoleh sistem suspensi mobil

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{-c}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{c}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{c}{m_2} & \dfrac{-k_2}{m_2} & \dfrac{-c}{m_2} \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_1} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Akan dicari kendali LQR

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$$

dimana $K = R^{-1}B^TP$, yang meminimalkan fungsi tujuan

$$\mathrm{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^\mathbf{T}Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^\mathbf{T}R\mathbf{u})dt.$$

Misalkan:
$m_1 =\ 28{,}58$ kgs
$m_2 =\ 288{,}9$ kgs
$c\ \ \ =\ 850$ Ns/m
$k_1\ \ = 1{,}5596\ \times\ 10^5 = 155900$ N/s
$k_2\ \ = 1 \times 10^5 = 100000$ N/s
Sehingga diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8{,}9538 & -0{,}0297 & 3{,}4990 & 0{,}0297 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}3461 & 0{,}0029 & -0{,}0029 & -0{,}0029 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0350 \\ 0 \\ -0{,}0035 \end{bmatrix}$$

Kemudian dipilih

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^8 \end{bmatrix}$$

dan

$$R = 1$$

Dengan program MATLAB, diperoleh matriks kendali sebagai berikut

$$K = lqr(A, B, Q, R)$$
$$K = [7{,}8970 \quad 0{,}0712 \quad 2{,}0000 \quad 0{,}1293]$$

Karena, $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$, maka diperoleh kendali LQR adalah

$$\mathbf{u} = -[7{,}8970 \quad 0{,}0712 \quad 2{,}0000 \quad 0{,}1293]\mathbf{x}$$

Kestabilan Sistem yang Sudah diberi Kendali

Model sistem suspensi seperempat mobil dapat ditulis daalam bentuk *state space* berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

Karena $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$, maka

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x}$$

Misalkan

$$A_c = A - BK$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8{,}9538 & -0{,}0297 & 3{,}4990 & 0{,}0297 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}3461 & 0{,}0029 & -0{,}0029 & -0{,}0029 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0350 \\ 0 \\ -0{,}0035 \end{bmatrix} [7{,}8970 \quad 0{,}0712 \quad 2{,}0000 \quad 0{,}1293]$$

Sehingga dengan program MATLAB diperoleh :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}0001 & 0 & 0 \\ -1{,}8853 & -0{,}0087 & -0{,}0350 & -0{,}0037 \\ 0 & 0 & 0{,}000 & 0{,}0000 \\ 0{,}3462 & 0{,}0029 & 0{,}0035 & -0{,}0004 \end{bmatrix}$$

Dengan program MATLAB diperoleh nilai eigen dari matriks A_c adalah $-111{,}8113$; $-74{,}4464$; $-36{,}9243$ dan $-14{,}0242$. Karena $\Re(\lambda_i) < 0, i = 1{,}2{,}3$ dan 4, maka berdasarkan Teorema 2 didapat sistem suspensi seperempat mobil stabil asimtotik.

Simulasi Numerik pada Sistem Tanpa Kendali

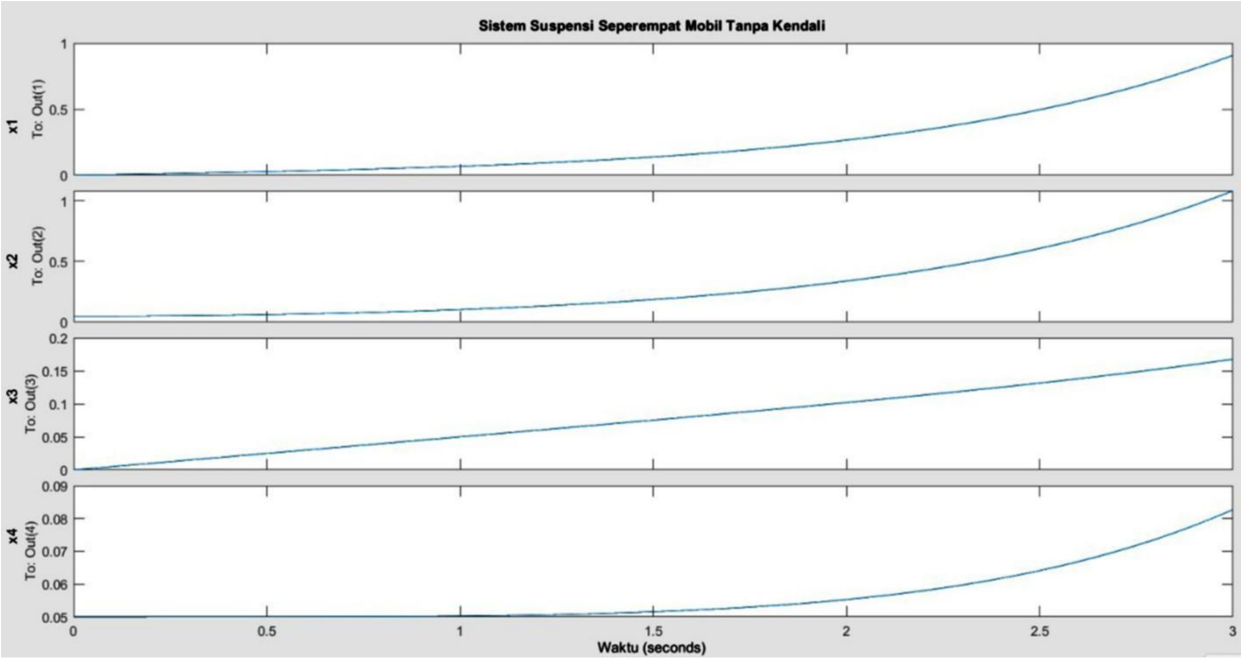
Telah diperoleh sistem seperempat mobil tanpa kendali yaitu:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1{,}{,}2439 & -0{,}0045 & 0{,}06984 & 0{,}0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}0691 & 0{,}0004 & -0{,}069 & -0{,}0004 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan program MATLAB, diperoleh simulasi numerik dari sistem seperempat mobil sebagai berikut



Gambar 3. Respon pada sistem yang belum diberi kendali untuk model sistem suspensi mobil

Berdasarkan Gambar 3 dapat dilihat bahwa solusi untuk waktu menuju tak terhingga tidak mendekati nol, yang berarti sistem seperempat mobil tanpa kendali tidak stabil.

Keterangan:

$x_1 = z_1$: Posisi *Unsprung*

$x_2 = \dot{z}_1$: Kecepatan *Unsprung*

$x_3 = z_2$: Posisi *Sprung*

$x_4 = \dot{z}_2$: Kecepatan *Sprung*

Maka posisi dan kecepatan unsprung (bagian kendaraan yang tidak ditopang oleh sistem suspensi) tanpa kendali tidak stabil. Begitu juga untuk posisi dan kecepatan sprung (bagian kendaraan yang ditopang oleh sistem suspensi) tanpa kendali tidak stabil.

Simulasi Numerik pada Sistem yang Sudah Diberi Kendali

Telah diperoleh sistem seperempat mobil dengan kendali yaitu:

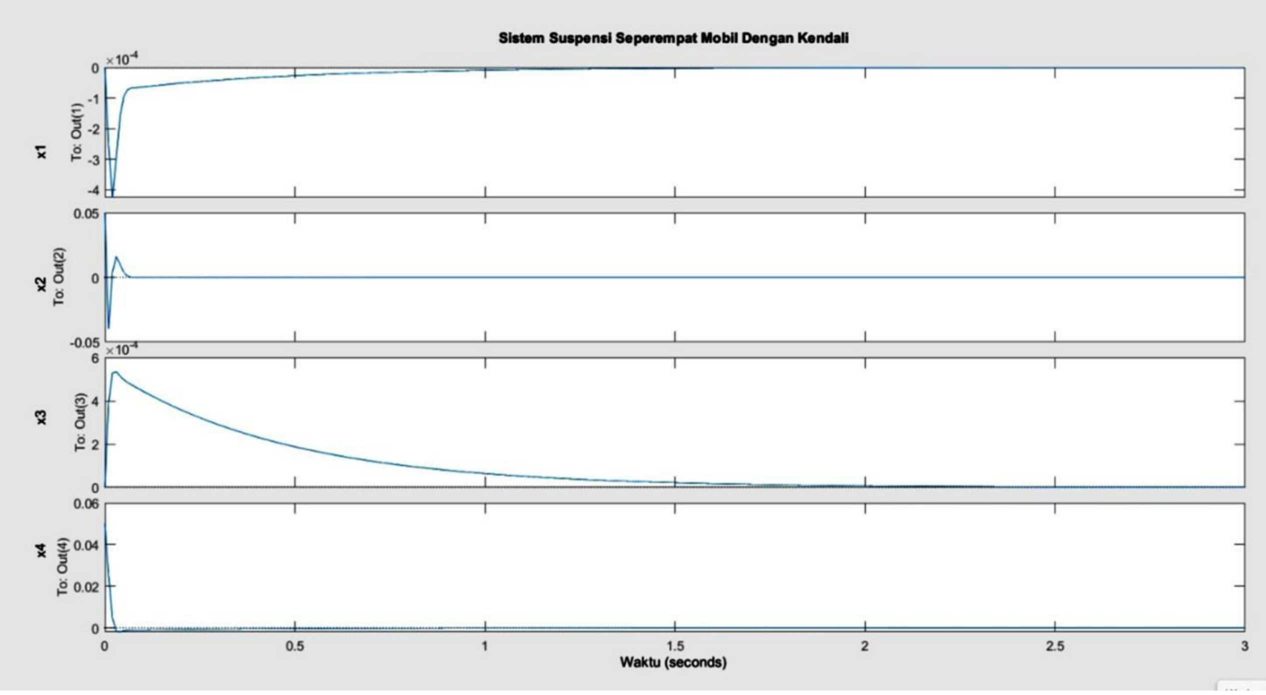
$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8{,}9538 & -0{,}0297 & 3{,}4990 & 0{,}0297 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}3461 & 0{,}0029 & -0{,}0029 & -0{,}0029 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0350 \\ 0 \\ -0,0035 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan program MATLAB, diperoleh simulasi numerik dari sistem sebagai berikut



Gambar 4. Respon pada sistem yang sudah diberi kendali untuk model sistem suspensi mobil

Berdasarkan Gambar 4 dapat dilihat bahwa perilaku solusi untuk waktu menuju tak terhingga mendekati nol, yang berarti sistem seperempat mobil dengan kendali stabil asimtotik.

Keterangan:

$x_1 = z_1$: Posisi *Unsprung*

$x_2 = \dot{z}_1$: Kecepatan *Unsprung*

$x_3 = z_2$: Posisi *Sprung*

$x_4 = \dot{z}_2$: Kecepatan *Sprung*

Maka posisi dan kecepatan unsprung (bagian kendaraan yang tidak ditopang oleh sistem suspensi seperti ban, roda dan lainya) setelah diberi kendali stabil asimtotik. Begitu juga untuk posisi dan kecepatan sprung (bagian kendaraan yang ditopang oleh sistem suspensi seperti bodi, rangka, mesin, penumpang dan lainnya) setelah diberi kendali stabil asimtotik. Oleh karena itu kendali LQR dapat menstabilkan sistem suspensi seperempat mobil yang meningkatkan kenyamanan dalam berkendara.

SIMPULAN

Berdasarkan analisis nilai eigen dan simulasi numerik, diperoleh sistem suspenpsi seperempat mobil tanpa kendali memiliki nilai eigen $-1,3658 + 0,0000i$; $0,9635 + 0,0000i$; $-0,0488 + 0,3156i$ dan $-0,0488 - 0,3156i$ yang artinya sistem tidak stabil. Sedangkan sistem suspensi seperempat mobil yang sudah diberi kendali memiliki nilai eigen $-111{,}8113; -74{,}4464; -36{,}9243$ dan $-14{,}0242$ yang artinya sistem stabil asimtotik. Oleh karena itu kendali LQR dapat menstabilkan sistem suspensi seperempat mobil yang meningkatkan kenyamanan dalam berkendara.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis sampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu sehingga artikel karya ilmiah ini dapat diselesaikan dengan baik. Semoga bantuan yang telah diberikan baik moril maupun material mendapat balasan pahala dari Allah SWT, dan sebuah harapan dari penulis semoga artikel ini dapat bermafaat bagi penulis dan para pembaca semua pada umumnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Salmah, *Teori Sistem Kendali Linier dan Aplikasinya*. Gajah Mada University Press, 2020.
[2] K. Ogata, *Modern control engineering*. Prentice Hall Upper Saddle River, 2009.
[3] D. M. Putra, D. Marindani, Program, S. Teknik, E. Jurusan, dan T. Elektro, Analisis Sistem Suspensi Mobil Menggunakan Kendali Logika Fuzzy.
[4] J. L. Coyte, D. Stirling, H. Du, dan M. Ros, "Seated Whole-Body Vibration Analysis, Technologies, and Modeling: A Survey," *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, vol. 46, no. 6, hlm. 725–739, Jun 2016, doi: 10.1109/TSMC.2015.2458964.
[5] I. Nyoman Sutantra, *Teknologi dan Konstruksi Otomotif*. Surabaya: Guna Widya, 2010.
[6] A. Tjolleng dan B. Nusantara, "Pengantar pemrograman MATLAB: Panduan praktis belajar MATLAB," 2017. [Daring]. Tersedia pada: https://www.researchgate.net/publication/334945947
[7] Shepley l. Ross, *Introduction To Ordynary Differential Equation*. New York: Jhon Wiley & Sons, 1989.
[8] Anton dan Rorres, *Aljabar Linier Elementer*, Eigth edition. 2004.
[9] E. Sari, A. Sani, dan M. Kabil Djafar, "Analisis Model Epidemi Penyebaran Tuberkulosis Dengan Struktur Umur," 2023.
[10] G.J Olsder, *Mathematic Systems Theory* , Second Edition. 1997.
[11] Subiono, "Sistem Linear dan Kontrol Optimal," 2013.
[12] P.N. Paraskevopoulos, *Modern Control Engineering*. CRC Press, 2017.
[13] Bryson, *Applied optimal control: optimization, estimation, and control*. Routledge, , 2018.
[14] Nur Uddin, "Optimal Control Design of Active Suspension System Based on Quarter Car Model," *INFOTEL*, 2019.
[15] Inany Furoidah, *Fisika Dasar 1*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama, 1997.
[16] Daryanto, *Fisika Teknik*. Jakarta: Rineka Cipta, 1997.