



## SUATU $f_q$ -DERIVASI PADA $BE$ -ALJABAR

Endah Dwi Jayanti<sup>✉1</sup>

Jurusan Syariah dan Ekonomi Islam, Sekolah Tinggi Agama Islam Negeri Bengkalis, Riau<sup>1</sup>

email: [endahdwijayanti77@gmail.com](mailto:endahdwijayanti77@gmail.com)

Received 17 Maret 2024, Accepted 26 Maret 2024, Published 31 Maret 2024

### Abstrak

Pada artikel ini, diberikan konsep  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar dengan cara mendefinisikan terlebih dahulu suatu pemetaan  $\varphi_q^f$  yang merupakan *self-map* dari  $BE$ -aljabar. Berdasarkan definisi tersebut, dikonstruksi konsep  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar. Hasil penelitian ini berupa definisi  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar dan sifat-sifatnya. Adapun sifat-sifat tersebut dikonstruksi dari pemetaan  $\varphi_q^f$ , sifat *regular*, himpunan tetap (*fixed set*), dan kernel dari  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar.

**Kata Kunci:**  $f_q$ -derivasi; kernel; himpunan tetap;  $BE$ -aljabar.

### Abstract

In this article, the concept of  $f_q$ -derivation in  $BE$ -algebra is given by first defining a mapping  $\varphi_q^f$ , which is a self-map of  $BE$ -algebra. Based on this definition, the concept of  $f_q$ -derivation in  $BE$ -algebra is constructed. The results of this research are the definition of  $f_q$ -derivation in  $BE$ -algebra and its properties. These properties are constructed from the mapping  $\varphi_q^f$ , regular, fixed set, and kernel of a  $f_q$ -derivation in  $BE$ -algebra.

**Keywords:**  $f_q$ -derivation; kernel; fixed set;  $BE$ -algebra.

✉ Corresponding author

## PENDAHULUAN

$BE$ -aljabar merupakan generalisasi dari  $BCK$ -aljabar.  $BE$ -aljabar yang diperkenalkan oleh H. S. Kim and Y. H. Kim [1] didefinisikan sebagai suatu aljabar  $(E; *, 1)$  tipe  $(2, 0)$  yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:  $(BE1)$   $a * a = 1$ ,  $(BE2)$   $a * 1 = 1$ ,  $(BE3)$   $1 * a = a$ , dan  $(BE4)$   $a * (b * c) = b * (a * c)$  untuk setiap  $a, b, c \in E$ . Kajian tentang  $BE$ -aljabar juga sudah dibahas oleh Kim [2]. Pada pembahasan tersebut diberikan lebih banyak sifat dan konsep dari suatu  $BE$ -aljabar.

$BP$ -aljabar merupakan salah satu struktur aljabar yang dalam pengkonstruksinya masih berkaitan dengan  $BCK$ -aljabar.  $BP$ -aljabar yang didefinisikan oleh Ahn dan Han [3] adalah suatu aljabar  $(P; *, 0)$  tipe  $(2, 0)$  yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:  $(BP1)$   $a * a = 0$ ,  $(BP2)$   $a * (a * b) = b$ ,  $(BP3)$   $(a * c) * (b * c) = a * b$  untuk setiap  $a, b, c \in P$ . Pada pembahasan  $BP$ -aljabar juga dibahas hubungannya dengan beberapa aljabar lainnya.

Suatu konsep dalam aljabar abstrak adalah derivasi. Konsep derivasi yang dimaksud disini adalah suatu fungsi yang memetakan suatu himpunan ke dirinya sendiri berdasarkan suatu aturan tertentu. Konsep derivasi telah dibahas pada  $BE$ -aljabar oleh Kim dan Lee [4]. Suatu *self-map*  $d$  dari  $BE$ -aljabar  $(E; *, 1)$  disebut derivasi di  $X$  jika untuk setiap  $a, b \in E$  memenuhi  $\varphi(a * b) = (a * \varphi(b)) \vee (\varphi(a) * b)$ , dengan mendefinisikan  $a \vee b = (b * a) * a$  untuk setiap  $a, b \in E$ . Kim dan Davvaz [5] mendiskusikankan gagasan  $f$ -derivasi dalam  $BE$ -aljabar dengan mempertimbangkan suatu endomorfisma  $f$ . Selain itu, sebagai perluasan dari konsep derivasi dan  $f$ -derivasi dalam  $BE$ -aljabar, Kim dalam [6] dan [7] juga membahas gagasan generalisasi derivasi dan generalisasi  $f$ -derivasi dalam  $BE$ -aljabar. Konsep generalisasi derivasi dan  $f$ -derivasi ini melibatkan dua pemetaan terhadap dirinya sendiri dalam definisinya. Selain itu, Yanti et al. [8] juga membahas konsep  $f$ -derivasi di aljabar lainnya, yaitu  $BN_1$ -aljabar.

Anhari et al. membahas konsep  $t$ -derivasi dan  $q$ -derivasi pada  $BE$ -aljabar dalam [9] dan [10]. Konstruksi definisi  $q$ -derivasi ini mengacu pada penelitian  $t$ -derivasi di  $BP$ -aljabar dalam [11], yang dimulai dengan mendefinisikan pemetaan  $\varphi_q(a) = q * a$  dengan  $q, a \in BE$ -aljabar  $(E; *, 1)$ , kemudian mendefinisikan konsep  $q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar dan menentukan sifat-sifatnya.

Adapun jenis derivasi lainnya yang telah dibahas oleh para peneliti adalah konsep  $f_q$ -derivasi di  $BM$ -aljabar [12],  $f_q$ -derivasi di  $BN_1$ -aljabar [13], dan  $f_q$ -derivasi di  $BP$ -aljabar [14]. Seperti halnya pendefinisian  $q$ -derivasi, pengkonstruksian  $f_q$ -derivasi, juga melibatkan

pemetaan yang mirip dengan  $\varphi_q$ , namun disertakan suatu pemetaan  $f$  yang merupakan endomorfisma. Fitria et al. [15] telah mengkaji perkembangan  $q$ -derivasi dalam konteks BE-aljabar dengan melibatkan dua pemetaan ke dirinya sendiri dalam aljabar tersebut serta suatu endomorfisma  $f$ .

Berdasarkan gagasan  $q$ -derivasi pada BE-aljabar oleh Anhari et al. [10] dan  $f_q$ -derivasi di BP-aljabar oleh Gemawati et al. [14], diperkenalkan suatu jenis derivasi sebagai pengembangan dari  $q$ -derivasi di BE-aljabar, yakni  $f_q$ -derivasi. Selanjutnya, sifat-sifat  $f_q$ -derivasi di BE-aljabar ditentukan, termasuk sifat-sifat himpunan tetap dan kernel dari  $f_q$ -derivasi di BE-aljabar.

## METODOLOGI

Pada bagian ini, diberikan beberapa definisi yang diperlukan untuk mengkonstruksi hasil utama penelitian, yaitu definisi dan teori dasar tentang BE-aljabar, derivasi di BE-aljabar, dan  $t$ -derivasi di BE-aljabar yang semua konsep tersebut telah dibahas dalam [1], [2], [4], [10], dan [14].

**Definisi 2.1.** [1] Suatu aljabar  $(E; *, 1)$  tipe  $(2, 0)$  dikatakan BE-aljabar jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(BE1) \ a * a = 1,$$

$$(BE2) \ a * 1 = 1,$$

$$(BE3) \ 1 * a = a,$$

$$(BE4) \ a * (b * c) = b * (a * c),$$

untuk setiap  $a, b, c \in E$ .

Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Didefinisikan relasi  $\leq$  pada  $E$  sebagai  $a \leq b$  jika dan hanya jika  $a * b = 1$  untuk setiap  $a, b \in E$ .

**Definisi 2.2.** [2] Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar dan  $F$  subhimpunan tak kosong dari  $E$ .  $F$  dikatakan *filter* dari  $E$  jika

$$(F1) \ 1 \in F,$$

$$(F2) \ x \in F \text{ dan } a * b \in F \text{ mengakibatkan } b \in F.$$

**Definisi 2.3.** [2] Suatu BE-aljabar  $(E; *, 1)$  dikatakan *self-distributive* jika  $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$  untuk setiap  $a, b, c \in E$ .

**Proposisi 2.4.** [2] Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar, maka identitas berikut berlaku untuk setiap  $a, b, c \in E$ .

$$(P1) \ a * (b * a) = 1,$$

$$(P2) \ a * ((a * b) * b) = 1,$$

(P3) Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar *self-distributive*. Jika  $a \leq b$ , maka  $c * a \leq c * b$  dan  $b * c \leq a * c$ .

Konsep derivasi di BE-aljabar telah dibahas dalam [4]. Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Didefinisikan  $a \vee b = (b * a) * a$  untuk setiap  $a, b \in E$ .

**Definisi 2.5.** [4] Suatu *self-map*  $d$  pada BE-aljabar  $(E; *, 1)$  disebut derivasi di  $E$  jika  $\varphi(a * b) = (a * \varphi(b)) \vee (\varphi(a) * b)$  untuk setiap  $a, b \in E$ .

**Definisi 2.6.** [4] Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Suatu pemetaan *self-map*  $\varphi$  dari  $E$  dikatakan *regular* jika  $\varphi(1) = 1$ .

Konsep himpunan tetap dan kernel dari suatu derivasi di BE-aljabar telah dibahas dalam [4]. Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar dan  $\varphi$  adalah derivasi di  $E$ . Didefinisikan himpunan tetap (*fixed set*) dari  $\varphi$  sebagai

$$Fix_{\varphi}(E) = \{a \in E : \varphi(a) = a\},$$

untuk setiap  $a \in E$ , dan kernel dari  $\varphi$  sebagai

$$Kerd(E) = \{a \in E : \varphi(a) = 1\}, \text{ untuk setiap } a \in E.$$

**Definisi 2.7.** [4] Misalkan  $(E; *, 1)$  dan  $(F; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Suatu pemetaan  $f: E \rightarrow F$  disebut homomorfisma jika memenuhi

$$f(a * b) = f(a) * f(b),$$

untuk setiap  $a, b \in E$ . Homomorfisma  $f$  disebut endomorfisma jika  $f: E \rightarrow E$ .

**Definisi 2.8.** [10] Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Suatu pemetaan  $\varphi_q$  dari  $E$  ke dirinya sendiri didefinisikan sebagai  $\varphi_q(a) = q * a$  untuk setiap  $q, a \in E$ .

**Definisi 2.9.** [10] Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Suatu pemetaan  $\varphi_q$  dari  $E$  ke dirinya sendiri disebut  $q$ -derivasi di  $E$  jika untuk setiap  $a, b \in E$  memenuhi

$$\varphi_q(a * b) = (a * \varphi_q(b)) \vee (\varphi_q(a) * b)$$

Konsep  $f_q$ -derivasi di BP-aljabar telah dibahas dalam [14]. Misalkan  $(P; *, 0)$  suatu BP-aljabar, dinotasikan  $p \wedge q = q * (q * p)$  untuk setiap  $p, q \in P$ . Kemudian, didefinisikan suatu pemetaan  $\varphi_q^f$  dari  $P$  ke dirinya sendiri dengan  $\varphi_q^f(x) = f(x) * q$  untuk setiap  $x, q \in P$ .

**Definisi 2.10.** [14] Suatu pemetaan  $\varphi_q^f$  dari BP-aljabar  $(P; *, 0)$  ke dirinya sendiri disebut *inside*  $f_q$ -derivasi di  $P$  jika memenuhi  $\varphi_q^f(x * y) = \varphi_q^f(x) * f(y)$  untuk setiap  $x, y \in P$  dan disebut *outside*  $f_q$ -derivasi di  $P$  jika memenuhi  $d_q^f(x * y) = f(x) * \varphi_q^f(y)$ . Pemetaan  $\varphi_q^f$  disebut  $f_q$ -derivasi di  $P$  jika  $\varphi_q^f$  merupakan *inside* sekaligus *outside*  $f_q$ -derivasi di  $P$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini merupakan hasil dari penelitian, yaitu definisi dari  $f_q$ -derivasi pada BE-aljabar dan sifat-sifatnya.

**Definisi 3.1.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Suatu pemetaan  $\varphi_q^f$  dari  $E$  ke dirinya sendiri didefinisikan sebagai  $\varphi_q^f(a) = q * a$  untuk setiap  $q, a \in E$ .

**Teorema 3.2.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah pemetaan dari  $E$  ke dirinya sendiri.

- (i)  $f(a) \leq \varphi_q^f(a)$  untuk setiap  $a \in E$ ,
- (ii)  $\varphi_1^f(a) \leq f(a)$  untuk setiap  $a \in E$ .

**Bukti.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah pemetaan dari  $E$  ke dirinya sendiri.

- (i) Berdasarkan Aksioma BE4, BE1, dan BE2 untuk setiap  $a \in E$  diperoleh

$$\begin{aligned} f(a) * \varphi_q^f(a) &= f(a) * (q * f(a)) \\ &= q * (f(a) * f(a)) && \text{[Aksioma BE4]} \\ &= q * 1 && \text{[Aksioma BE1]} \\ f(a) * \varphi_q^f(a) &= 1 && \text{[Aksioma BE2]} \end{aligned}$$

Karena  $f(a) * \varphi_q^f(a) = 1$ , maka terbukti bahwa  $f(a) \leq \varphi_q^f(a)$  untuk setiap  $a \in E$ .

- (ii) Berdasarkan Aksioma BE3 dan BE1 untuk setiap  $a \in E$  diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi_1^f(a) * f(a) &= (1 * f(a)) * f(a) \\ &= f(a) * f(a) \quad \text{[Aksioma BE3]}\end{aligned}$$

$$\varphi_1^f(a) * f(a) = 1. \quad \text{[Aksioma BE1]}$$

Karena  $\varphi_1^f(a) * f(a) = 1$ , maka terbukti bahwa  $\varphi_1^f(a) \leq f(a)$  untuk setiap  $a \in E$ .

**Teorema 3.3.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Jika  $\varphi_q^f$  adalah pemetaan dari  $E$  ke dirinya sendiri, maka  $\varphi_q^f(a * b) = f(a) * \varphi_q^f(b)$  untuk setiap  $a, b \in E$ .

**Bukti.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah pemetaan dari  $E$  ke dirinya sendiri. Karena  $f$  adalah endomorfisma, maka  $f(a * b) = f(a) * f(b)$ . Kemudian, berdasarkan Aksioma BE4, untuk setiap  $a, b \in E$  diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi_q^f(a * b) &= q * f(a * b) \\ &= q * (f(a) * f(b)) \quad \text{[} f \text{ endomorfisma ]} \\ &= f(a) * (q * f(b)) \quad \text{[Aksioma BE4]}\end{aligned}$$

$$\varphi_q^f(a * b) = f(a) * \varphi_q^f(b).$$

Jadi, terbukti bahwa  $\varphi_q^f(a * b) = f(a) * \varphi_q^f(b)$  untuk setiap  $a, b \in E$ .

**Definisi 3.4.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Suatu *self-map*  $\varphi_q^f$  dari  $E$  dikatakan *regular* jika  $\varphi_q^f(1) = 1$  untuk suatu  $q \in E$ .

**Teorema 3.5.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar. Jika  $\varphi_q^f$  adalah pemetaan dari  $E$  ke dirinya sendiri, maka  $\varphi_q^f$  *regular*.

**Bukti.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah pemetaan dari  $E$  ke dirinya sendiri. Karena  $f$  adalah endomorfisma dan dari Aksioma BE1, maka  $f(1) = f(a * a) = f(a) * f(a) = 1$  untuk setiap  $a \in E$ . Kemudian, berdasarkan Aksioma BE2 diperoleh  $\varphi_q^f(1) = q * f(1) = q * 1 = 1$ . Dengan demikian terbukti bahwa  $\varphi_q^f$  *regular*.

**Teorema 3.6.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar *self-distributive*. Jika  $\varphi_q^f$  adalah pemetaan dari  $E$  ke dirinya sendiri, maka  $\varphi_q^f$  adalah endomorfisma.

**Bukti.** Karena  $(E; *, 1)$  adalah BE-aljabar *self-distributive* dan  $f$  adalah endomorfisma, maka  $\varphi_q^f(a * b) = q * f(a * b) = q * (f(a) * f(b)) = (q * f(a)) * q * f(b) = \varphi_q^f(a) * \varphi_q^f(b)$ .

Terbukti bahwa  $\varphi_q^f$  adalah homomorfisma. Karena  $\varphi_q^f$  adalah pemetaan dari  $E$  ke dirinya sendiri, maka terbukti bahwa  $\varphi_q^f$  adalah endomorfisma.

Selanjutnya, berdasarkan definisi  $\varphi_q^f$  dan definisi  $q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar, diperoleh konsep  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar.

**Definisi 3.7.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar. Suatu pemetaan  $\varphi_q^f$  dari  $E$  ke dirinya sendiri disebut  $f_q$ -derivasi di  $E$  jika untuk setiap  $a, b \in E$  memenuhi

$$\varphi_q^f(a * b) = (f(a) * \varphi_q^f(b)) \vee (\varphi_q^f(a) * f(b)).$$

Berikut ini diberikan sifat eksistensi  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar yang menyatakan bahwa selalu terdapat suatu  $\varphi_q^f$  di  $BE$ -aljabar, yaitu  $\varphi_1^f$  yang merupakan  $f_1$ -derivasi di  $BE$ -aljabar.

**Teorema 3.8.** Jika  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar, maka  $\varphi_1^f$  adalah  $f_1$ -derivasi di  $E$ .

**Bukti.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar. Dari Aksioma  $BE3$  diperoleh  $\varphi_1^f(a * b) = 1 * f(a * b) = f(a * b) = f(a) * f(b)$  untuk setiap  $a, b \in E$ . Kemudian, dari Aksioma  $BE3$  dan  $BE1$  diperoleh

$$\begin{aligned} (f(a) * \varphi_1^f(b)) \vee (\varphi_1^f(a) * f(b)) &= (f(a) * (1 * f(b))) \vee ((1 * f(a)) * f(b)) \\ &= (f(a) * f(b)) \vee (f(a) * f(b)) \\ &= ((f(a) * f(b)) * (f(a) * f(b))) * (f(a) * f(b)) \\ &= 1 * (f(a) * f(b)) \end{aligned}$$

$$(f(a) * \varphi_1^f(b)) \vee (\varphi_1^f(a) * f(b)) = f(a) * f(b).$$

Jadi, terbukti bahwa  $\varphi_1^f(a * b) = (f(a) * \varphi_1^f(b)) \vee (\varphi_1^f(a) * f(b))$  untuk setiap  $a, b \in E$ .

Oleh karena itu, terbukti bahwa  $\varphi_1^f$  adalah  $f_1$ -derivasi di  $E$ .

Selanjutnya, dibahas sifat-sifat  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar.

**Teorema 3.9.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar. Jika  $\varphi_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $E$ , maka  $\varphi_q^f(a) = \varphi_q^f(a) \vee f(a)$  untuk setiap  $a \in E$ .

**Bukti.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $E$ . Berdasarkan Aksioma  $BE2$  dan  $BE3$ , untuk setiap  $a \in E$  diperoleh

$$\begin{aligned} \varphi_q^f(a) &= \varphi_q^f(1 * a) \\ &= (f(1) * \varphi_q^f(a)) \vee (\varphi_q^f(f(1)) * f(a)) \\ &= (1 * \varphi_q^f(a)) \vee (\varphi_q^f(1) * f(a)) \\ &= \varphi_q^f(a) \vee ((q * f(1)) * f(a)) \\ &= \varphi_q^f(a) \vee ((q * 1) * f(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \varphi_q^f(a) \vee (1 * f(a)) \\ &= \varphi_q^f(a) \vee f(a) \end{aligned}$$

$$\varphi_q^f(a) = \varphi_q^f(a) \vee f(a).$$

Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $E$ . Didefinisikan himpunan tetap (*fixed set*) dengan  $Fix_{\varphi_q^f}(E) = \{a \in E \mid \varphi_q^f(a) = f(a)\}$ . Kemudian, didefinisikan kernel dari  $\varphi_q^f$  dengan  $Ker\varphi_q^f = \{a \in E \mid \varphi_q^f(a) = 1\}$ .

Berikut ini diberikan sifat himpunan tetap dari  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar.

**Teorema 3.10.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $E$ . Jika  $a, b \in Fix_{\varphi_q^f}(E)$ , maka  $a \vee b \in Fix_{\varphi_q^f}(E)$  untuk setiap  $a, b \in E$ .

**Bukti.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $E$ . Karena  $a \in Fix_{\varphi_q^f}(E)$ , maka  $\varphi_q^f(a) = f(a)$  untuk setiap  $a \in E$ . Kemudian, dari Aksioma  $BE1$  dan  $BE3$  diperoleh

$$\begin{aligned} \varphi_q^f(a \vee b) &= \varphi_q^f((b * a) * a) \\ &= [f(b * a) * \varphi_q^f(a)] \vee [\varphi_q^f(b * a) * f(a)] \\ &= [(f(b) * f(a)) * f(a)] \vee [((f(b) * \varphi_q^f(a)) \vee (\varphi_q^f(b) * f(a))) * f(a)] \\ &= [(f(b) * f(a)) * f(a)] \vee [((f(b) * f(a)) \vee (f(b) * f(a))) * f(a)] \\ &= [(f(b) * f(a)) * f(a)] \vee [(f(b) * f(a)) * f(a)] \\ &= (f(b) * f(a)) * f(a) \end{aligned}$$

$$\varphi_q^f(a \vee b) = f(a) \vee f(b).$$

Jadi, terbukti bahwa  $a \vee b \in Fix_{\varphi_q^f}(E)$ .

Selanjutnya, diberikan sifat kernel dari  $f_q$ -derivasi di  $BE$ -aljabar.

**Teorema 3.11.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $E$ .

- (i) Jika  $a \in Ker\varphi_q^f$ , maka  $a \vee b \in Ker\varphi_q^f$  untuk setiap  $b \in E$ .
- (ii) Jika  $b \in Ker\varphi_q^f$ , maka  $a * b \in Ker\varphi_q^f$  untuk setiap  $a \in E$ .

**Bukti.** Misalkan  $(E; *, 1)$  adalah  $BE$ -aljabar dan  $\varphi_q^f$  adalah  $f_q$ -derivasi di  $E$ .

- (i) Karena  $a \in Ker\varphi_q^f$ , maka  $\varphi_q^f(a) = 1$ . Kemudian, dari Aksioma  $BE2$  diperoleh

$$\varphi_q^f(a \vee b) = \varphi_q^f((b * a) * a)$$

$$\begin{aligned}
 &= [(f(b * a)) * \varphi_q^f(a)] \vee [\varphi_q^f(b * a) * f(a)] \\
 &= [f(b * a) * 1] \vee [\varphi_q^f(b * a) * f(a)] \\
 &= 1 \vee [\varphi_q^f(b * a) * f(a)] \\
 &= [(\varphi_q^f(b * a) * f(a)) * 1] * 1 \\
 \varphi_q^f(a \vee b) &= 1.
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa jika  $a \in \text{Ker} \varphi_q^f$ , maka  $a \vee b \in \text{Ker} \varphi_q^f$  untuk setiap  $b \in E$ .

(ii) Misalkan  $b \in \text{Ker} \varphi_q^f$ , maka  $\varphi_q^f(b) = 1$ . Dari Aksioma BE2 diperoleh

$$\begin{aligned}
 \varphi_q^f(a * b) &= (f(a) * \varphi_q^f(b)) \vee (\varphi_q^f(a) * f(b)) \\
 &= (f(a) * 1) \vee (\varphi_q^f(a) * f(b)) \\
 &= 1 \vee (\varphi_q^f(a) * f(b)) \\
 &= ((\varphi_q^f(a) * f(b)) * 1) * 1 \\
 \varphi_q^f(a * b) &= 1.
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa jika  $b \in \text{Ker} \varphi_q^f$ , maka  $a * b \in \text{Ker} \varphi_q^f$  untuk setiap  $a \in E$ .

## SIMPULAN

Pada artikel ini, didefinisikan konsep  $f_q$ -derivasi di BE-aljabar sebagai bentuk pengembangan dari konsep  $q$ -derivasi di BE-aljabar. Pendefinisian  $f_q$ -derivasi di BE-aljabar diawali dengan mendefinisikan suatu pemetaan  $\varphi_q^f$  yang merupakan *self-map* di BE-aljabar. Kemudian, dibuktikan beberapa sifat dari  $\varphi_q^f$  di BE-aljabar. Selanjutnya, didefinisikan konsep  $f_q$ -derivasi di BE-aljabar dan dibahas sifat-sifatnya. Pada bagian akhir, diperoleh sifat-sifat himpunan tetap (*fixed set*) dan kernel dari  $f_q$ -derivasi di BE-aljabar berdasarkan elemen-elemennya.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] H. Sik Kim and Y. Hee Kim, "ON BE-ALGEBRAS," 2006.
- [2] K. H. Kim, "A NOTE ON BE-ALGEBRAS," 2010.
- [3] S. Shin Ahn and J. Soon Han, "ON BP-ALGEBRAS," 2013.
- [4] K. H. Kim and S. M. Lee, "ON DERIVATIONS OF BE-ALGEBRAS," *Honam Mathematical Journal*, vol. 36, no. 1, pp. 167–178, Mar. 2014, doi: 10.5831/hmj.2014.36.1.167.
- [5] K. H. Kim and B. Davvaz, "ON f-DERIVATIONS OF BE-ALGEBRAS," *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, vol. 28, no. 1, pp. 127–138, Feb. 2015, doi: 10.14403/jcms.2015.28.1.127.

- 
- [6] K. H. Kim, "ON GENERALIZED DERIVATIONS OF BE-ALGEBRAS," *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, vol. 27, no. 2, pp. 227–236, May 2014, doi: 10.14403/jcms.2014.27.2.227.
- [7] K. H. Kim and S. M. Lee, "On generalized f-derivations of BE-algebras," *International Mathematical Forum*, vol. 9, pp. 523–531, 2014, doi: 10.12988/imf.2014.4228.
- [8] R. G. Yanti, H. Handayani, and E. Fitria, "f-Derivasi di BN1-aljabar", *Journal of Science and Technology*, vol. 2, issue 1, 2022.
- [9] W. Anhari, "On t-Derivations of BE-algebras," *INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICS AND COMPUTER RESEARCH*, vol. 10, no. 06, Jun. 2022, doi: 10.47191/ijmcr/v10i6.04.
- [10] W. Anhari, "On Q-Derivations of BE-Algebras," *INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICS AND COMPUTER RESEARCH*, vol. 10, no. 08, Aug. 2022, doi: 10.47191/ijmcr/v10i8.04.
- [11] T. Fuja Siswanti and S. Gemawati, "t-Derivations in BP-Algebras," 2021. [Online]. Available: <https://sintechcomjournal.com/index.php/stc/index>
- [12] E. Yattaqi, S. Gemawati, and I. Hasbiyati, "fq-derivasi di BM-aljabar," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 2, pp. 155–166, Jun. 2021, doi: 10.34312/jjom.v3i2.10379.
- [13] S. Gemawati, A. Sirait, M. M, and E. Fitria, "fq-Derivations of BN1-Algebras," *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, vol. 67, no. 11, pp. 1–13, Nov. 2021, doi: 10.14445/22315373/ijmtt-v67i11p501.
- [14] S. Gemawati and E. Fitria, "f q-DERIVATION OF BP-ALGEBRAS," 2023.
- [15] E. Fitria, E. Dwi Jayanti, and S. Gemawati, "GENERALISASI q-DERIVASI DI BE-ALJABAR GENERALIZATION q-DERIVATION IN BE-ALGEBRA."