

APPLICATION OF RAPID TEST CONTROL FOR PREVENTION PNEUMONIA IN CHILDREN

APLIKASI KENDALI RAPID TEST UNTUK PENCEGAHAN PENYAKIT PNEUMONIA PADA ANAK-ANAK

¹Nilwan Andiraja, ²Adly Saddam Khadafi, ³Muhammad Firdaus, ⁴Vania Anjani, ⁵Dini Sahrani

^{1,2,3,4,5}Program Studi Matematika, FST, UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Indonesia

E-mail: ¹nilwanandiraja@gmail.com, ²12250415705@students.uin-suska.ac.id, ³12250415635@students.uin-suska.ac.id, ⁴12250421242@students.uin-suska.ac.id, ⁵dinisyahrani1234@gmail.com

Received: August 2025; Accepted: September 2025; Published: October 2025

Abstract

Pneumonia is a disease which is having similar symptoms like ISPA. It is probably that making many parents did not realize if their children severe Pneumonia. Because according to Indonesia ministry health, there was significant increasingly Pneumonia cases year by year from 2021 to 2024, in 2024 is a year with highest Pneumonia cases, almost 800.000 Pneumonia cases even BPJS report, budget for Pneumonia therapy is highest than other diseases. Then, we need to make a quick preventative action, one of them is optimal control with rapid test. Rapid test is needed in order to detect an individual severe Pneumonia. In order, the aim will success so we need to develop SEIR model with add a control of rapid test to the exposed class. The addition is needed because children have symptom acquiring a certainty Pneumonia infected or not so the therapy will be quick and correct. After that, we need to find the optimal control of rapid test and then to describe the effect of optimal control on the exposed, infected, and recovered classes. The parameters values need to input to the equations which was given a control and next, we have to calculate with used sweep method step forward-backward and with helped by MATLAB software obtain the final result. The result is with control the number individual infected Pneumonia decreasing since initial time till 100th days, meanwhile without control the number individual infected increase till 10th days and after that the plot becomes decrease till 40th days.

Keywords: Optimal Control, Rapid Test, Pneumonia.

Abstrak

Pneumonia merupakan penyakit yang memiliki gejala mirip seperti ISPA. Hal ini mungkin yang membuat banyak orang tua tidak menyadari bahwa anaknya terkena Pneumonia. Sebab menurut Kemenkes RI, ada peningkatan Pneumonia setiap tahun mulai tahun 2021 sampai tahun 2024, dengan tahun 2024 merupakan tahun dengan kasus tertinggi mencapai 800 ribu kasus Pneumonia bahkan BPJS melaporkan dana untuk pengobatan Pneumonia tertinggi mengalahkan penyakit yang lain. Maka perlu segera dilakukan pencegahan dengan cepat, salah satunya dengan kendali optimal dengan *rapid test*. *Rapid test* perlu dilakukan agar dapat mendeteksi individu terinfeksi Pneumonia. Agar tujuan ini tercapai maka dikembangkan model SEIR dengan menambahkan kendali *rapid test* pada kelas *exposed*. Penambahan ini perlu dilakukan agar setiap anak yang

*Corresponding author.

© 2025. Author.

p-ISSN: 2580-6726

e-ISSN: 2598-2133

bergejala mendapatkan kepastian terinfeksi Pneumonia atau tidak, sehingga pengobatan lebih tepat. Setelah itu harus dicari kendali optimal *rapid test* dan selanjutnya untuk melihat pengaruh kendali terhadap kelas *exposed*, *infected*, dan *recovered* maka nilai-nilai parameter perlu diinput ke persamaan-persamaan yang telah diberi kendali dan di kalkulasi dengan metode *sweep step forward-backward* dan dengan bantuan *software MATLAB* diperoleh hasil akhir. Hasil yang diperoleh bahwa terdapat penurunan individu terinfeksi dengan kendali sejak awal hari ke-0 sampai hari ke-100, sementara tanpa kendali terjadi peningkatan individu terinfeksi sampai waktu ke-10 dan baru turun pada waktu setelah ke-10 sampai ke-40.

Kata kunci: Kendali Optimal, *Rapid Test*, Pneumonia.

PENDAHULUAN

Pneumonia adalah bentuk infeksi dari pernapasan akut yang mempengaruhi paru-paru manusia. Paru-paru terdiri dari kantung kecil yang disebut alveoli, yang tersisi udara pada saat orang yang sehat bernapas. Namun ketika orang menderita pneumonia, alveoli akan terisi dengan cairan serta nanah yang mengakibatkan pernapasan akan terasa sakit dan juga jumlah kadar oksigen jadi terbatas (WHO, 2022). Di Indonesia, menurut berita diketahui bahwa jumlah penderita pneumonia terus meningkat dari tahun ke tahun dengan data tahun 2024 merupakan data tertinggi dari 5 tahun terakhir yakni mencapai 800 ribu kasus (CNN, 2024). Hal ini sangat mengkhawatirkan karena mayoritas penderita yakni anak-anak dan lansia. Hal ini sejalan dengan pernyataan wakil menkes bahwa bukan hanya di Indonesia bahkan di Dunia terdapat hampir 700 ribu anak meninggal atau hampir setiap 43 detik seorang anak meninggal karena pneumonia sebuah penyakit yang seharusnya dapat dicegah. Sementara itu sejalan seperti sebuah garis yang berbanding lurus, menurut data BPJS, penyakit pneumonia menduduki peringkat pertama penggunaan data kesehatan sebesar Rp. 8,7 Triliun, mengalahkan penyakit TBC bahkan kanker (Kemenkes, 2024). Hal yang mengagetkan dan menyedihkan bahwa diketahui pneumonia kebanyakan terjadi pada anak-anak karena ada hubungannya dengan terpaparnya anak-anak terkena asap rokok, dikarenakan orang tua atau orang yang lebih tua memiliki kebiasaan dan ketidak tahuan akibat kelalaian yang menyebabkan anak-anak menjadi korban (Kemenkes, 2023).

Sehingga dari informasi diatas dapat dikatakan bahwa ancaman penyakit pneumonia nyata dan dekat dengan kita terutama balita dan anak-anak yang belum memiliki imunitas atau kekebalan tubuh yang kuat karena dapat menyebabkan kematian (Sobihannur et al., 2025). Sehingga perlu dilakukan berbagai upaya pencegahan dari berbagai arah, baik arah ilmu kesehatan dan tentu arah penelitian matematika dalam rangka mendukung pencegahan penularan penyakit di tengah-tengah masyarakat khususnya pencegahan penyebaran pneumonia.

Model matematika merupakan salah satu alat yang sangat bermanfaat dalam mempelajari penyebaran penyakit menular. Model SEIR (*Susceptible–Exposed–Infected–Recovered*) adalah salah satu model epidemiologi yang sering digunakan untuk menggambarkan proses penularan penyakit yang memiliki masa inkubasi, seperti pneumonia. Beberapa penelitian model matematika SEIR seperti

pemodelan penyakit diabetes mellitus (Nurazizah et al., 2024), pemodelan penyakit Tifus (Irwan et al., 2023), pemodelan penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi (Liza & Panjaitan, 2024), pemodelan penyebaran epidemic dengan factor lingkungan (Pamungkas & Prasetya, 2024), pemodelan matematika penyakit Tuberkolosis di Jawa Barat (Nafisah & Adi, 2024), pemodelan penyakit dengan karantina (Hardianti, 2024) dari seluruh penelitian tersebut memiliki satu kesimpulan yang sama bahwa penyakit-penyakit tersebut akan menghilang.

Sementara itu penggunaan prinsip Pontryagin dengan metode *sweep* dengan bantuan Runge-Kutta orde 4 di pemodelan penyebaran penyakit diantaranya, penyebaran virus ebola (Sumardi, Norasia, et al., 2023), pemodelan penyebaran penyakit Nipah (Sumardi, Allo, et al., 2023), pemodelan matematika perokok (Asmianto et al., 2024), pemodelan penyebaran penyakit Tuberkolosis di Jawa timur (Sari et al., 2024), pemodelan penyebaran demam berdarah (Nisa & Syata, 2024), kendali optimal pada masalah COVID-19 dengan vaksinasi dan pengobatan (Malo et al., 2025). Selain pada penyakit, prinsip Pontryagin juga dapat digunakan pada persoalan lingkungan untuk mengendalikan konsentrasi CO dan NO₂ (Lutfiana & Didik, 2022). Kesimpulan dari penelitian tersebut model matematika dengan penggunaan Pontryagin dapat menurunkan atau mengendalikan penyebaran penyakit atau memperbaiki kondisi.

Secara khusus, pemodelan matematika untuk penyakit pneumonia diantaranya pemodelan pneumonia di makasar tapi belum ada kendali (Side et al., 2021), kendali penyakit pneumonia dengan penyuluhan kesehatan-skreening kesehatan-pengobatan tapi belum ada *rapid test* (Almutairi & El-shahed, 2025), model matematika penyakit pneumonia dengan vaksinasi tapi belum ada kendali (Zhafran, 2022), model matematika penyakit pneumonia dengan vaksinasi dan pengobatan tapi belum ada kendali (Beta et al., 2022), sementara itu model lain dalam penelitian tentang penyakit Pneumonia dengan vaksinasi dan karantina tapi belum ada kendali (Kamiila & Prawoto, 2023), penelitian lain tentang model matematika penyakit pneumonia dengan carier tapi belum ada kendali (Jelita & Ahmad, 2022).

Sementara itu penelitian terdahulu mengenai kendali optimal diantaranya aplikasi kendali adaptif pada penyakit kolera dengan kendali karantina tapi belum ada kendali *rapid test* (Ayu & Aulia, 2021), aplikasi kendali dengan vaksinasi pada COVID-19 tapi belum *rapid test* dan belum penyakit Pneumonia (Mu'tamar et al., 2021). Penelitian tersebut belum ada *rapid test* pada model penyakitnya, padahal untuk mengendalikan suatu penyakit yang gampang menular seperti Pneumonia perlu dilakukan *rapid tests*. Beberapa penelitian tentang *rapid test* diantaranya, penelitian kendali testing dan perawatan pada COVID-19 (Sianipar & Sinaga, 2024), dan penelitian tentang pentingnya rapid test untuk mendeteksi varian virus baru dengan pendekatan statistik Bayesian (Sita et al., 2024).

Sampai saat ini, program pneumonia lebih mengutamakan pengendalian pneumonia pada usia di bawah lima tahun. Pneumonia pada anak dapat ditandai dengan timbulnya batuk serta gejala sesak napas, kadang pula disertai dengan rasa sesak pada bagian bawah dada (TDDK) dan keterbatasan napas cepat, tergantung usia dari penderita. Untuk meningkatkan efektivitas dalam menanggulangi penyebaran Pneumonia, model SEIR dapat dikembangkan lebih lanjut dengan menambahkan unsur kendali berupa intervensi medis atau non-medis, seperti pengujian (*testing*) dan pengobatan. Dengan memasukkan variabel kendali, dapat dirancang strategi optimal yang bertujuan untuk menekan jumlah individu yang terinfeksi dan menurunkan angka kematian akibat penyakit ini.

Dalam penelitian ini, akan dikaji model SEIR dengan kendali optimal pada penyebaran penyakit Pneumonia pada anak-anak. Analisis dilakukan melalui pendekatan metode numerik menggunakan *Runge-Kutta* orde 4 untuk menyelesaikan system diferensial dinamik secara maju (*forward*) dan persamaan *costate* secara mundur (*backward*). Simulasi numerik akan dilakukan untuk melihat efektifitas kendali dalam penyakit Pneumonia.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif karena pada penelitian ini mengembangkan model matematika terdahulu tentang pemodelan penyebaran penyakit pneumonia pada balita (Side et al., 2021). Penelitian terdahulu telah menggunakan model SEIR untuk memodelkan secara matematika penyakit Pneumonia pada balita atau anak. Model SEIR merupakan model matematika yang membagi sebuah populasi ke dalam 4 kelas yaitu:

1. *Susceptible* yang berisi semua individu yang rentan dalam populasi. Pada penelitian ini semua anak termasuk anak yang baru lahir dimasukkan ke dalam kelas ini. Selanjutnya setiap anak di kelas ini memiliki peluang meninggal secara alami tanpa sakit Pneumonia atau *ter-exposed* (terkena/terpapar) Pneumonia sehingga berpindah ke belikutnya.
2. *Exposed* yang berisi semua anak yang telah terkena atau tertular penyakit dengan memiliki gejala-gejala mirip Pneumonia tapi belum terinfeksi sempurna dan belum dapat menularkan. Sehingga untuk memastikan anak-anak terkena Pneumonia atau tidak maka diberikan *rapid test* sebagai kendali pada kelas ini.
3. *Infected* yang berisi semua anak yang telah positif dinyatakan terinfeksi Pneumonia berdasarkan hasil *rapid test* yang dilakukan di kelas *exposed*. Pada kelas ini dilakukan vaksinasi sehingga terdapat laju kesembuhan individu terinfeksi.

4. *Recovered* yang berisi anak-anak yang telah dinyatakan sembuh dari Pneumonia yang berasal dari kelas *Infected*.

Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan rentang bulan Mei 2025 sampai Juli 2025, penelitian dilakukan di Prodi Matematika FST UIN Sultan Syarif Kasim Riau.

Target/Subjek Penelitian/Populasi dan Sampel Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan model matematika SEIR penyebaran penyakit Pneumonia yang didasarkan dari penelitian (Side et al., 2021). Bentuk model SEIR yaitu,

$$\frac{ds}{dt} = \pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta I}{N} + \mu + \rho\right)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - (\mu + \gamma)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - (\mu + \varepsilon)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon I + \rho S - \mu R$$

Dengan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Terdapat kelahiran dan kematian dalam suatu populasi.
2. Tidak terdapat migrasi.
3. Setiap individu yang lahir akan menjadi rentan.
4. Setiap individu yang terdeteksi akan menjadi terinfeksi.
5. Masa inkubasi penyakit pneumonia (singkat) 7-14 hari.
6. Penyakit berbahaya, jika terinfeksi dapat menimbulkan kematian.
7. Individu yang rentan jika di vaksinasi akan kebal terhadap penyakit.
8. Individu yang telah sembuh akan kebal terhadap penyakit pneumonia dan tidak menjadi rentan kembali.

Model SEIR tersebut akan ditambahkan kendali u yaitu *rapid test* yang akan ditambahkan ke kelas *Exposed (E)*. Sampel data untuk penelitian ini menggunakan nilai-nilai parameter, untuk data-data kelas *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Recovered* yang diambil dari penelitian terdahulu (Side et al., 2021). Hal ini untuk melihat apakah terdapat pengaruh kendali *rapid test* pada penelitian tersebut.

Prosedur

Prosedur yang dilakukan pada penelitian yaitu mengembangkan sistem persamaan diferensial model matematika dengan menambahkan faktor kendali pada model matematika yang telah ada. Kendali berupa rapid test yang dinotasikan dengan u , diberikan pada kelas *Exposed* (E). Kemudian membuat fungsi tujuan yang sesuai dengan kelas yang akan di minimalkan dan sesuai dengan kendali yang diberikan. Setelah itu dengan menggunakan Prinsip Pontryagin, dibentuk fungsi Hamiltonian seterusnya dibentuk persamaan *costate* dan dari fungsi Hamiltonian juga akan diperoleh fungsi kendali optimal.

Selanjutnya, akan dibentuk persamaan numerik untuk model SEIR, persamaan *costate* dan fungsi kendali optimal. Bentuk numerik yang diperoleh hasil dari penggunaan Runge-Kutta orde 4. Persamaan numerik SEIR akan menggunakan metode *sweep* langkah maju (*step forward*) sementara untuk persamaan *costate* akan menggunakan metode *sweep* langkah mundur (*step backward*). Setelah itu, nilai-nilai parameter dari penelitian terdahulu, akan diinputkan ke dalam persamaan numerik untuk model SEIR, persamaan *costate* dan fungsi kendali optimal. Data yang diinput diolah menggunakan *software* Matlab menghasilkan grafik untuk kelas *Exposed*, *Infected* dan *Recovered*. Terakhir dilakukan interpretasi grafik dan membuat kesimpulan dari hasil grafik yang ada.

Data, Instrumen, dan Teknik Pengumpulan Data

Data model matematika dalam penelitian ini menggunakan model matematika SEIR dan data nilai-nilai parameter dari penelitian terdahulu oleh (Side et al., 2021).

Teknik Analisis Data

Analisa data nilai parameter pada penelitian ini dengan cara menginputkan nilai parameter ke persamaan SEIR dan persamaan *costate*. Dengan metode *sweep* langkah maju (*step forward*) dan mundur (*step backward*) dikalkulasi dengan bantuan *software* MATLAB, setelah diperoleh grafik kemudian di analisis kecenderungan grafik untuk interpretasi grafik kelas *Exposed*, *Infected* dan *Recovered*.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Model matematika SEIR untuk penyebaran penyakit Pneumonia pada balita dan anak-anak pada penelitian ini didasarkan dari penelitian terdahulu oleh (Side et al., 2021). Hal yang berbeda penelitian ini dengan penelitian sebelumnya adalah adanya penambahan satu kendali yakni *rapid test* dan membentuk fungsi tujuan untuk model matematika SEIR penyakit Pneumonia. *Rapid test* yang diberikan dinotasikan dengan symbol u , diberikan kepada individu di kelas E . Kendali u diberikan di kelas E karena individu di kelas ini telah menunjukkan gejala-gejala mirip Pneumonia tapi belum dapat

menularkan ke individu lain. Sehingga jika u diberikan di kelas E , kita dapat mendeteksi dengan cepat seorang individu terkena penyakit Pneumonia atau tidak, maka jika hasil *rapid test* menunjukkan positif maka dapat dengan cepat dilakukan pengobatan terhadap individu. Sehingga akan lebih banyak nyawa balita dan anak-anak akan tertolong dari ganasnya penyakit Pneumonia.

Sebelum membentuk persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan untuk penyakit Pneumonia, perlu dinotasikan beberapa notasi agar model yang dibentuk dapat mudah dipahami dan memudahkan analisa model penyakit Pneumonia. Adapun notasi-notasi sebagai berikut:

Tabel 1. Variabel/Parameter Model Penyakit Pneumonia	
Simbol	Aspek Penilaian
S	Jumlah individu yang rentan
E	Jumlah individu yang laten
I	Jumlah individu yang terinfeksi
R	Jumlah individu yang sembuh
π	Laju kelahiran
μ	Laju kematian
βI	Laju individu dari rentan ke laten
γ	Laju individu yang terinfeksi
ε	Laju kesembuhan individu terinfeksi
ρ	Proporsi individu yang divaksinasi
μ_c	Tingkat kematian individu karena Pneumonia
u	Proporsi individu yang di <i>rapid test</i>

Maka berdasarkan notasi-notasi diatas, maka model matematika sistem persamaan diferensial dinamik SEIR untuk penyebaran penyakit peneumonia pada balita setelah diberi kendali *rapid test* (u) pada kelas E yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta I}{N} + \mu + \rho\right)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - (\mu + \gamma)uE$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma uE - (\mu_c + \mu + \varepsilon)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon I + \rho S - \mu R$$

Selanjutnya di bentuk fungsi tujuan untuk waktu akhir t_f dengan tujuan menganalisa individu yang terinfeksi penyakit Pneumonia setelah diberikan vaksinasi di kelas S ,

$$J(u) = \int_0^{t_f} \left(I + \frac{cu^2}{2} \right) dt$$

Kemudian dibentuk fungsi Hamiltonian,

$$H = \left(I + \frac{cu^2}{2}\right) + (\lambda_1) \left(\pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta I}{N} + \mu + \rho\right)S \right) + (\lambda_2) \left(\frac{\beta IS}{N} - (\mu + \gamma)uE \right) + (\lambda_3)(\gamma uE - (\mu_c + \mu + \varepsilon)I) + (\lambda_4)(\varepsilon I + \rho S - \mu R)$$

Berdasarkan fungsi Hamiltonian diatas, kemudian dibentuk persamaan *costate* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial S} = -\left(-\lambda_1\left(\frac{\beta I}{N} + \mu + \rho\right) + \lambda_2\frac{\beta I}{N} + \lambda_4\rho\right) \\ &= \lambda_1\frac{\beta I}{N} + \lambda_1\mu + \lambda_1\rho - \lambda_2\frac{\beta I}{N} - \lambda_4\rho \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial E} = -(-\lambda_2(\mu + \gamma)u + \lambda_3\gamma u) \\ &= \lambda_2u + \lambda_2\gamma - \lambda_3\gamma u \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial I} = -\left(1 - \lambda_1\frac{\beta S}{N} + \lambda_2\frac{\beta S}{N} - \lambda_3(\mu_c + \mu + \varepsilon) + \lambda_4\varepsilon\right) \\ &= -1 + \lambda_1\frac{\beta S}{N} - \lambda_2\frac{\beta S}{N} + \lambda_3\mu_c + \lambda_3\mu + \lambda_3\varepsilon - \lambda_4\varepsilon \\ \dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial R} = -(-\lambda_4\mu) \\ &= \lambda_4\mu\end{aligned}$$

Selain persaaan *costate*, dari fungsi Hamiltonian juga diperoleh kendai u yaitu:

$$u^* = \frac{\lambda_2 E(\mu + \gamma) - \lambda_3 \gamma E}{c}$$

dengan batasan kendali yang ditetapkan yaitu $0 \leq u^* \leq 1$, kendali optimal dapat dinyatakan,

$$u^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_2 E(\mu + \gamma) - \lambda_3 \gamma E}{c} \right\}, 1 \right\}$$

Berdasarkan sistem persamaan diferensial dinamik model SEIR penyebaran penyakit Pneumonia dan persamaan *costate*, diketahui berbentuk Persamaan nonlinear sehingga akan diselesaikan secara numerik. Pada proses ini, disimulasikan menggunakan *sweep forward-backward* dengan Runge-Kutta orde 4. Adapun langkah langkahnya sebagai berikut:

1. Sistem persamaan diferensial dinamik model SEIR, yang akan diselesaikan menggunakan *forward* Runge-Kutta orde 4 sebagai berikut:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{6}(M_{1,S} + 2M_{2,S} + 2M_{3,S} + M_{4,S})$$

$$E_{i+1} = E_i + \frac{h}{6}(M_{1,E} + 2M_{2,E} + 2M_{3,E} + M_{4,E})$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{6}(M_{1,I} + 2M_{2,I} + 2M_{3,I} + M_{4,I})$$

$$R_{i+1} = R_i + \frac{h}{6} (M_{1,R} + 2M_{2,R} + 2M_{3,R} + M_{4,R})$$

Dengan,

$$i = 0, 1, 2, \dots, M$$

$M_{1,S}$ sebagai notasi $\dot{S}$, $M_{1,E}$ sebagai notasi $\dot{E}$, $M_{1,I}$ sebagai notasi $\dot{I}$, $M_{1,R}$ sebagai notasi $\dot{R}$, sehingga langkah maju sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_{1,S} &= f(x_i, u_i) \\ &= \pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta I_i}{N} + \mu + \rho\right) S_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1,E} &= f(x_i, u_i) \\ &= \frac{\beta I_i S_i}{N} - (\mu + \gamma) u_i E_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1,I} &= f(x_i, u_i) \\ &= \gamma u_i E_i - (\mu_c + \mu + \varepsilon) I_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1,R} &= f(x_i, u_i) \\ &= \varepsilon I_i + \rho S_i - \mu R_i \end{aligned}$$

Selanjutnya langkah *forward* orde 2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_{2,S} &= f\left(x_i + \frac{h}{2} M_{1,S}, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \\ &= \pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta(I_i + \frac{h}{2} M_{1,I})}{N} + \mu + \rho\right) \left(S_i + \frac{h}{2} M_{1,S}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,E} &= f\left(x_i + \frac{h}{2} M_{1,E}, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \\ &= \frac{\beta(I_i + \frac{h}{2} M_{1,I})(S_i + \frac{h}{2} M_{1,S})}{N} - (\mu + \gamma) \left(\frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \left(E_i + \frac{h}{2} M_{1,E}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,I} &= f\left(x_i + \frac{h}{2} M_{1,I}, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \\ &= \gamma \left(\frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \left(E_i + \frac{h}{2} M_{1,E}\right) - (\mu_c + \mu + \varepsilon) \left(I_i + \frac{h}{2} M_{1,I}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,R} &= f\left(x_i + \frac{h}{2} M_{1,R}, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \\ &= \varepsilon \left(I_i + \frac{h}{2} M_{1,I}\right) + \rho \left(S_i + \frac{h}{2} M_{1,S}\right) - \mu \left(R_i + \frac{h}{2} M_{1,R}\right) \end{aligned}$$

Selanjutnya langkah *forward* orde 3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_{3,S} &= f\left(x_i + \frac{h}{2} M_{2,S}, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \\ &= \pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta(I_i + \frac{h}{2} M_{2,I})}{N} + \mu + \rho\right) \left(S_i + \frac{h}{2} M_{2,S}\right) \end{aligned}$$

$$M_{3,E} = f\left(x_i + \frac{h}{2} M_{2,E}, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\beta(I_i + \frac{h}{2}M_{2,I})(S_i + \frac{h}{2}M_{2,S})}{N} - (\mu + \gamma) \left(\frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \right) \left(E_i + \frac{h}{2}M_{2,E} \right) \\
 M_{3,I} &= f \left(x_i + \frac{h}{2}M_{2,I}, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \right) \\
 &= \gamma \left(\frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \right) \left(E_i + \frac{h}{2}M_{2,E} \right) - (\mu_c + \mu + \varepsilon) \left(I_i + \frac{h}{2}M_{2,I} \right) \\
 M_{3,R} &= f \left(x_i + \frac{h}{2}M_{2,R}, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \right) \\
 &= \varepsilon \left(I_i + \frac{h}{2}M_{2,I} \right) + \rho \left(S_i + \frac{h}{2}M_{2,S} \right) - \mu \left(R_i + \frac{h}{2}M_{2,R} \right)
 \end{aligned}$$

Kemudian langkah *forward* orde 4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 M_{4,S} &= f(x_i + hM_{3,S}, u_{i+1}) \\
 &= \pi(1 - \rho)N - \left(\frac{\beta(I_i + \frac{h}{2}M_{3,I})}{N} + \mu + \rho \right) \left(S_i + \frac{h}{2}M_{3,S} \right) \\
 M_{4,E} &= f(x_i + hM_{3,E}, u_{i+1}) \\
 &= \frac{\beta(I_i + \frac{h}{2}M_{3,I})(S_i + \frac{h}{2}M_{3,S})}{N} - (\mu + \gamma) \left(\frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \right) \left(E_i + \frac{h}{2}M_{3,E} \right) \\
 M_{4,I} &= f(x_i + hM_{3,I}, u_{i+1}) \\
 &= \gamma \left(\frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \right) \left(E_i + \frac{h}{2}M_{3,E} \right) - (\mu_c + \mu + \varepsilon) \left(I_i + \frac{h}{2}M_{3,I} \right) \\
 M_{4,R} &= f(x_i + hM_{3,R}, u_{i+1}) \\
 &= \varepsilon \left(I_i + \frac{h}{2}M_{3,I} \right) + \rho \left(S_i + \frac{h}{2}M_{3,S} \right) - \mu \left(R_i + \frac{h}{2}M_{3,R} \right)
 \end{aligned}$$

2. Persamaan *costate* diselesaikan menggunakan langkah *backward* Range Kutta orde 4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \lambda S_{j-1} &= \lambda S_j - \frac{h}{6} (N_{1,S} + 2N_{2,S} + 2N_{3,S} + N_{4,S}) \\
 \lambda E_{j-1} &= \lambda E_j - \frac{h}{6} (N_{1,E} + 2N_{2,E} + 2N_{3,E} + N_{4,E}) \\
 \lambda I_{j-1} &= \lambda I_j - \frac{h}{6} (N_{1,I} + 2N_{2,I} + 2N_{3,I} + N_{4,I}) \\
 \lambda R_{j-1} &= \lambda R_j - \frac{h}{6} (N_{1,R} + 2N_{2,R} + 2N_{3,R} + N_{4,R})
 \end{aligned}$$

Di mana,

$$\lambda S = \lambda_1, \lambda E = \lambda_2, \lambda I = \lambda_3, \lambda R = \lambda_4$$

Dengan,

$$j = M + 2 - 1$$

$$\begin{aligned}
 N_{1,S} &= f(\lambda_j, S_j, u_j) \\
 &= \lambda S_j \frac{\beta I_j}{N} + \lambda S_j \mu + \lambda S_j \rho - \lambda E_j \frac{\beta I_j}{N} - \lambda R_j \rho
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1,E} &= f(\lambda_j, S_j, u_j) \\ &= \lambda E_j u_j + \lambda E_j \gamma - \lambda I_j \gamma u_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1,I} &= f(\lambda_j, S_j, u_j) \\ &= -1 + \lambda S_j \frac{\beta S_j}{N} - \lambda E_j \frac{\beta S_j}{N} + \lambda I_j \mu_c + \lambda I_j \mu + \lambda I_j \varepsilon - \lambda R_j \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1,R} &= f(\lambda_j, S_j, u_j) \\ &= \lambda R_j \mu \end{aligned}$$

Selanjutnya langkah *backward* pada orde 2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N_{2,S} &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2} N_{1,S}, \frac{1}{2}(S_j + S_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \\ &= \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{1,S}\right) \frac{\beta\left(\frac{1}{2}(I_j + I_{j-1})\right)}{N} + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{1,S}\right) \mu + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{1,S}\right) \rho \\ &\quad - \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{1,E}\right) \frac{\beta\left(\frac{1}{2}(I_j + I_{j-1})\right)}{N} - \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{1,R}\right) \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2,E} &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2} N_{1,S}, \frac{1}{2}(E_j + E_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \\ &= \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{1,E}\right) \left(\frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) + \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{1,E}\right) \gamma \\ &\quad - \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{1,I}\right) \gamma \left(\frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2,I} &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2} N_{1,S}, \frac{1}{2}(I_j + I_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \\ &= -1 + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{1,S}\right) \frac{\beta\left(\frac{1}{2}(S_j + S_{j-1})\right)}{N} - \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{1,E}\right) \frac{\beta\left(\frac{1}{2}(S_j + S_{j-1})\right)}{N} + \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{1,I}\right) \mu_c + \\ &\quad \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{1,I}\right) \mu + \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{1,I}\right) \varepsilon - \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{1,R}\right) \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2,R} &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2} N_{1,S}, \frac{1}{2}(R_j + R_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \\ &= \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{1,R}\right) \mu \end{aligned}$$

Selanjutnya langkah *backward* pada orde 3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N_{3,S} &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2} N_{2,S}, \frac{1}{2}(S_j + S_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \\ &= \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{2,S}\right) \frac{\beta\left(\frac{1}{2}(I_j + I_{j-1})\right)}{N} + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{2,S}\right) \mu + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{2,S}\right) \rho \\ &\quad - \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{2,E}\right) \frac{\beta\left(\frac{1}{2}(I_j + I_{j-1})\right)}{N} - \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{2,R}\right) \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{3,E} &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2} N_{2,S}, \frac{1}{2}(E_j + E_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \\ &= \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{2,E}\right) \left(\frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) + \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{2,E}\right) \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{2,I} \right) \gamma \left(\frac{1}{2} (u_j + u_{j-1}) \right) \\
 N_{3,I} &= f \left(\lambda_j - \frac{h}{2} N_{2,S}, \frac{1}{2} (I_j + I_{j-1}), \frac{1}{2} (u_j + u_{j-1}) \right) \\
 &= -1 + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{2,S} \right) \frac{\beta \left(\frac{1}{2} (S_j + S_{j-1}) \right)}{N} - \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{2,E} \right) \frac{\beta \left(\frac{1}{2} (S_j + S_{j-1}) \right)}{N} \\
 &+ \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{2,I} \right) \mu_c + \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{2,I} \right) \mu + \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{2,I} \right) \varepsilon - \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{2,R} \right) \varepsilon \\
 N_{3,R} &= f \left(\lambda_j - \frac{h}{2} N_{2,S}, \frac{1}{2} (R_j + R_{j-1}), \frac{1}{2} (u_j + u_{j-1}) \right) \\
 &= \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{2,R} \right) \mu
 \end{aligned}$$

Selanjutnya langkah *backward* pada orde 4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 N_{4,S} &= f(\lambda_j - h N_{3,S}, S_{j-1}, u_{j-1}) \\
 &= \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{3,S} \right) \frac{\beta \left(\frac{1}{2} (I_j + I_{j-1}) \right)}{N} + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{3,S} \right) \mu + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{3,S} \right) \rho \\
 &- \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{3,E} \right) \frac{\beta \left(\frac{1}{2} (I_j + I_{j-1}) \right)}{N} - \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{3,R} \right) \rho \\
 N_{4,E} &= f(\lambda_j - h N_{3,E}, E_{j-1}, u_{j-1}) \\
 &= \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{3,E} \right) \left(\frac{1}{2} (u_j + u_{j-1}) \right) + \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{3,E} \right) \gamma \\
 &- \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{3,I} \right) \gamma \left(\frac{1}{2} (u_j + u_{j-1}) \right) \\
 N_{4,I} &= f(\lambda_j - h N_{3,I}, I_{j-1}, u_{j-1}) \\
 &= -1 + \left(\lambda S_j - \frac{h}{2} N_{3,S} \right) \frac{\beta \left(\frac{1}{2} (S_j + S_{j-1}) \right)}{N} - \left(\lambda E_j - \frac{h}{2} N_{3,E} \right) \frac{\beta \left(\frac{1}{2} (S_j + S_{j-1}) \right)}{N} \\
 &+ \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{3,I} \right) \mu_c + \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{3,I} \right) \mu + \left(\lambda I_j - \frac{h}{2} N_{3,I} \right) \varepsilon - \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{3,R} \right) \varepsilon \\
 N_{4,R} &= f(\lambda_j - h N_{3,R}, R_{j-1}, u_{j-1}) \\
 &= \left(\lambda R_j - \frac{h}{2} N_{3,R} \right) \mu
 \end{aligned}$$

3. Menggunakan nilai-nilai parameter untuk di inputkan ke langkah 1 dan 2 diatas.

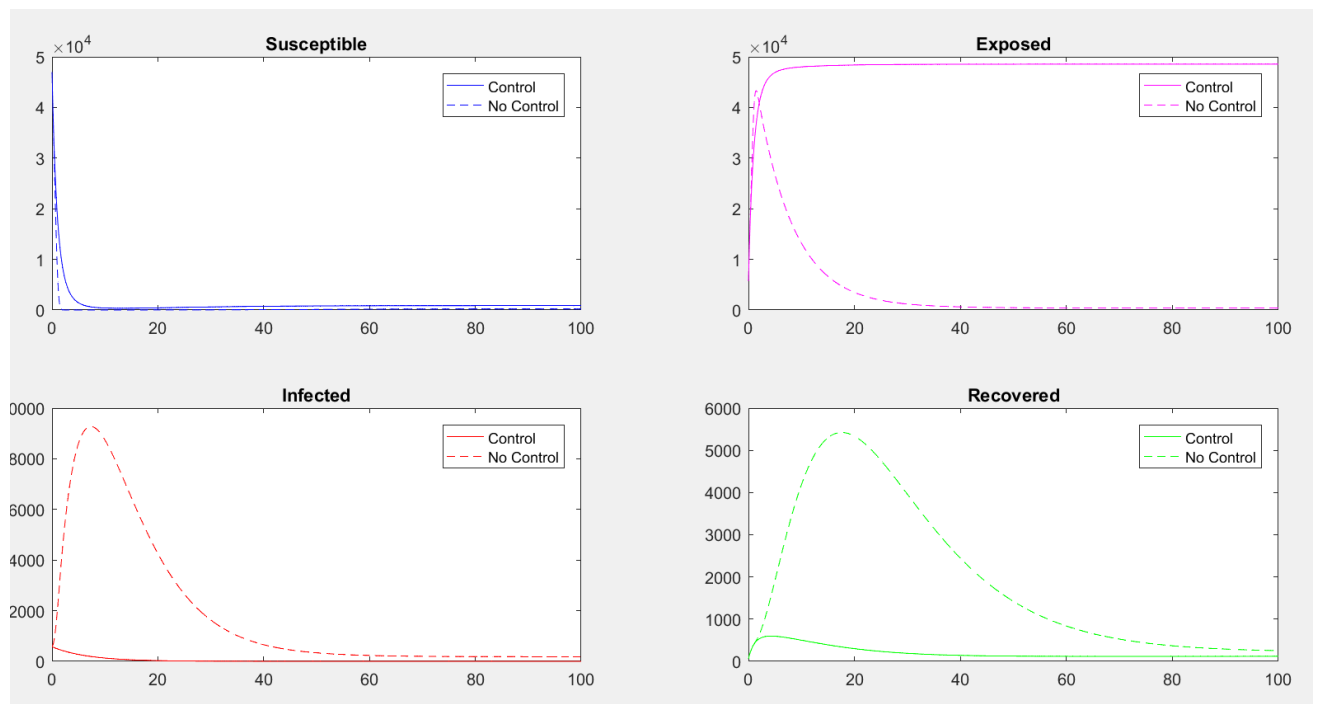
Adapun nilai-nilai parameter yang diinput ke persamaan langkah 1 dan langkah 2 sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai Parameter Model Penyakit Pneumonia

Parameter	Nilai
π	0,073
γ	0,071
β	1,449
μ	0,073

ε	0,075
ρ	0,01
μ_c	0,037
N	100.000
S	46.990
E	5.675
I	574
R	57

Simulasi dibuat dalam kondisi diberik kendali yaitu kondisi kedua dimana individu terinfeksi menunjukkan gejala mirip Pneumonia dilakukan kemudian dilakukan *rapid test*. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan *software Matlab*. Data-data yang digunakan dalam simulasi numerik ini menggunakan data-data pada tabel 2 dan kendali yang diaplikasikan pada simulasi ini akan dibatasi dengan $u_{min} = 0$ dan $u_{max} = 1$. Waktu yang ditetapkan dalam simulasi pada penelitian ini dimulai dari hari ke-0 sampai hari ke-100.

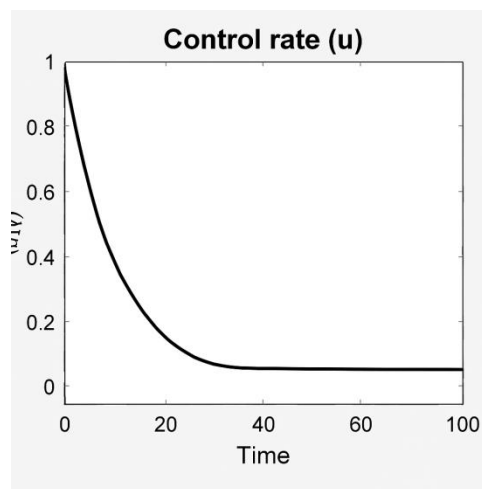


Gambar 1. Grafik Hasil Simulasi kelas $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$.

Berdasarkan gambar 1 diatas diperoleh 4 buah grafik setiap kelas $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ setelah diberi kendali. Grafik-grafik hasil tersebut menggambarkan efektivitas dari *rapid test* sebagai kendali pada penelitian ini. Grafik berwarna biru merupakan grafik kelas *susceptible* $S(t)$ yang menggambarkan terjadi penurunan individu anak-anak yang rentan terhadap Pneumonia, penurunan terjadi sejak awal dan terjadi sampai hari ke-100. Hasil kelas *susceptible* $S(t)$ ini memiliki kesamaan hasil dengan penelitian (Side et al., 2021) bahwa tanpa kendali kelas *susceptible* $S(t)$ juga mengalami penurunan. Berikutnya, grafik berwarna ungu merupakan grafik kelas *exposed* $E(t)$.

Pada grafik ini terlihat untuk tanpa kendali juga terjadi penurunan dengan sebelumnya grafik tampak naik diawal waktu. Namun, seketika grafik mengalami penurunan. Penurunan terjadi sampai waktu kurang dari 20 hari dan setelah itu grafik konstan berada dekat nol dalam artian hampir tidak ada anak-anak yang terpapar Pneumonia, namun dengan kendali terjadi kenaikan hal ini terjadi karena adanya *rapid tes* yang diterapkan ke semua anak-anak yang terpapar.

Selanjutnya, grafik berwarna merah adalah grafik kelas terinfeksi $I(t)$. Berdasarkan grafik terlihat adanya penurunan setelah diberi kendali dimulai dari waktu awal 0 sampai hari ke-20 dan selanjutnya grafik konstan dekat nol mulai hari ke-20 sampai hari ke-100. Hasil ini lebih baik dari kelas terinfeksi tanpa kendali dan hasil dari di (Side et al., 2021) yang masih berfluktuasi naik dan turun walaupun akhirnya secara umum grafik kelas infeksi mengalami penurunan. Grafik terakhir adalah grafik kelas yang sembuh $R(t)$ yang berwarna hijau. Pada waktu awal grafik mengalami kenaikan sampai sekitar hari ke-10. Namun setelah itu terjadi penurunan hari ke-10 sampai hari ke-60 dan konstan dekat nol sampai hari ke-100. Penurunan ini berarti tidak ada lagi individu anak-anak yang perlu disembuhkan, karena dari grafik sebelumnya kelas infeksi juga telah terjadi penurunan anak-anak terinfeksi Penumonia. Hasil grafik $R(t)$ juga berbeda tanpa kendali, yang terlihat tanpa kendali grafik mengalami kenaikan yang signifikan pada waktu ke-20 dan ini juga sesuai dengan hasil (Side et al., 2021) sebab pada penelitian terdahulu tersebut grafik kelas sembuh juga terjadi fluktuasi naik dan turun.



Gambar 2. Grafik kendali u

Grafik gambar 2 merupakan grafik yang menggambarkan proporsi kendali u yang diberikan dimulai dari waktu awal hari ke-0 sampai hari ke-100. Dari grafik tampak bahwa, hari ke-0 diberikan hampir 100 % upaya *rapid test* dilakukan untuk mendeteksi Pneumonia pada anak-anak. Namun, penggunaan *rapid test* sedikit demi sedikit dikurangi tapi tidak di hentikan, terlihat terjadi

penurunan sampai hari ke 20. *Rapid test* tetap dilakukan untuk mendeteksi Penumonia terlihat mulai hari ke-20 sampai hari ke-100 kendali diantara 0,2 dan 0.

Hasil pada penelitian ini untuk kelas *exposed*, dapat disimpulkan terdapat perbedaan dengan penelitian sebelumnya oleh (Side et al., 2021). Karena berdasarkan gambar 1, dapat dilihat bahwa belum terdapat individu yang terpapar Pneumonia hal ini berbeda dengan hasil pada (Side et al., 2021) bahwa populasi kelas *exposed* (terpapar) terjadi fluktuasi naik dan turun hal ini karena semua anak yang bergejala mirip Pneumonia dinyatakan menderita Pneumonia tanpa dilakukan pemeriksaan awal. Sementara pada penelitian ini perlu dilakukan *rapid test* terlebih dahulu agar memastikan seorang anak terkena Pneumonia atau tidak untuk keakuratan pengobatan atau pemberian vaksinasi. Sementara pada kelas terinfeksi juga terdapat perbedaan dengan (Side et al., 2021), pada penelitian ini terdapat penurunan anak yang terinfeksi Pneumonia sementara penelitian terdahulu terdapat naik dan turun untuk kelas terinfeksi. Hasil yang sama diberikan pada kelas *recovered* (sembuh) pada penelitian ini dan (Side et al., 2021) sama-sama menghasilkan jumlah anak yang sembuh mengalami peningkatan.

Secara keseluruhan hasil penelitian kendali ini sejalan dengan penelitian terdahulu seperti (Sumardi, Norasia, et al., 2023), (Lutfiana & Didik, 2022), (Asmianto et al., 2024), (Malo et al., 2025), dan (Almutairi & El-shahed, 2025) bahwa pemberian kendali dapat mengurangi individu yang terinfeksi suatu penyakit dan meningkatkan individu yang sembuh. Kemudian penelitian juga sejalan dengan penelitian (Sianipar & Sinaga, 2024) dan (Sita et al., 2024) yang menunjukkan pentingnya *rapid test* dalam mendeteksi virus dan meningkatkan kesembuhan dengan pengobatan atau pemberian vaksin yang tepat.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Model matematika SEIR penyebaran penyakit Pneumonia pada penelitian ini didasarkan kepada model sebelumnya yang telah diberikan upaya vaksinasi, kemudian diberikan upaya kendali *rapid test* untuk memastikan individu yang bergejala seperti batuk, demam, sesak napas terinfeksi Pneumonia atau bukan. Berdasarkan grafik hasil kelas *Infected* ($I(t)$) setelah diberi kendali menunjukkan bahwa grafik mengalami penurunan dimulai dari awal waktu sampai hari ke-20 dan terus mendekati nol sampai hari ke-100, hasil berbeda jika tanpa kendali bahwa grafik terlebih dahulu naik signifikan mulai dari waktu ke-0 sampai ke-10 dan setelah itu terjadi penurunan. Selanjutnya dari grafik kendali terlihat bahwa penurunan anak-anak terinfeksi Pneumonia diakibatkan dari aplikasi *rapid test* yang tampak

diberikan hampir 100% diawal waktu tapi setelah berjalan karena terjadi penurunan anak-anak terpapar dan terinfeksi Pneumonia maka penggunaan *rapid test* juga mengalami penurunan.

Saran

Berdasarkan penelitian ini maka dapat diberikan rekomendasi bahwa sebelum dilakukan pengobatan, maka perlu untuk dilakukan *rapid test* terdahulu kepada setiap individu yang bergejala seperti batuk, demam dan sesak napas untuk memastikan dan ketetapan pengobatan agar diketahui individu terinfeksi batuk, demam, sesak napas atau bukan.

REFERENSI

- Almutairi, N., & El-shahed, M. (2025). Optimal Control Strategies for a Mathematical Model of Pneumonia Infection. *Computation*, 13, 1–21. <https://doi.org/https://doi.org/10.3390/computation13090204>
- Asmianto, A., Pusawidjayanti, K., & Kusumasari, V. (2024). Strategi Kontrol Optimal pada Sistem Dinamik Perokok. *Math Unesa Jurnal Ilmiah Matematika*, 12(01), 121–126. <https://doi.org/https://doi.org/10.26740/mathunesa.v12n1.p121-126>
- Ayu, R. W. S., & Aulia, H. H. (2021). Kontrol Adaptif pada Model Penyebaran Kolera dengan Adanya Ketidakpastian Parameter. *Math Educa*, 5(2), 154–162. <https://doi.org/https://doi.org/10.15548/mej.v5i2.2546>
- Beta, M. A., Mokoginta, K., & Nadiyyah, A. (2022). Model Matematika SEIPRS Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Pengaruh Vaksinasi dan Pengobatan. *Research in the Mathematical and Natural Sciences*, 1(1), 27–38. <https://doi.org/https://doi.org/10.55657/rmns.v1i1.6>
- CNN. (2024). *Angka Paling Tinggi, Pneumonia Tembus 800 Ribu kasus di 2024*. CNN. <https://www.cnnindonesia.com/gaya-hidup/20250717141531-255-1251790/angka-paling-tinggi-pneumonia-tembus-800-ribu-kasus-di-2024>
- Hardianti, W. T. (2024). Analisis Sensitivitas Model Epidemik SEIR pada Penyebaran Penyakit dengan Karantina. *INNOVATIVE: Journal Of Social Science Research*, 4(6), 3135–3143. <https://doi.org/https://doi.org/10.31004/innovative.v4i6.16516>
- Irwan, I., Pathuddin, H., & Ahmad, N. R. A. (2023). Analisis Model SEIR (Susceptible, Exposed, Infected, Recovered) pada Penyebaran Penyakit Tifus di Kota Makassar. *ELIPS: JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA*, 4(1), 58–69. <https://doi.org/https://doi.org/10.47650/elips.v4i1.770>
- Jelita, W., & Ahmad, D. (2022). Model Matematika Dinamika Penyakit Pneumonia dengan Carriers. *Journal Mathematics UNP*, 7(1), 88–99. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.24036/unpjomath.v7i1.11022>
- Kamiila, S. I., & Prawoto, B. P. (2023). Bilangan Reproduksi Dasar Model Penyebaran Pneumonia dengan Adanya Vaksinasi dan Karantina. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 11(2), 229–234. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v11n2.p229-234>

- Kemenkes. (2023). *Asap Rokokmu Merenggut Nyawa Anakku*. Kemenkes RI. <https://ayosehat.kemkes.go.id/asap-rokokmu-merenggut-nyawa-anakku>
- Kemenkes. (2024). *Pneumonia Terus Ancam Anak-anak*. Kemenkes RI. <https://kemkes.go.id/id/pneumonia-terus-ancam-anak-anak#:~:text=Data WHO tahun 2021 menunjukkan,kematian balita di seluruh dunia>
- Liza, T. D., & Panjaitan, D. J. (2024). Analisis Kestabilan Model SEIR untuk Penyebaran Covid-19 dengan Parameter Vaksinasi. *SEPREN: Journal of Mathematics Education and Applied*, 06(01), 18–27. <https://doi.org/https://doi.org/10.36655/sepren.v6i01.1480>
- Lutfiana, F. N., & Didik, K. A. (2022). Desain Kendali Optimal Konsentrasi Karbon Monoksida dan Nitrogen Dioksida Menggunakan Metode Prinsip Minimum Pontryagin. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*, 11(2), 2337–3520.
- Malo, M., Obe, L. F., Luan, F., Allung, F. M., Timor, U., & Kefamenanu, K. (2025). Masalah Kontrol Optimum Penyebaran Covid-19 dengan Memperhatikan Faktor Vaksinasi dan Pengobatan. *REKEN : Jurnal Matematika Dan Aplikasinya*, 1(1), 35–49. <https://doi.org/https://doi.org/10.55098/reken.1.1.35-49>
- Mu'tamar, K., Putra, S., & Perdana, S. A. (2021). Analisis Penyebaran Covid-19 dengan Menggunakan Model SIR dan Vaksinasi serta Estimasi Parameter. *Barekeng : Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 15(2), 323–334. <https://doi.org/https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss2pp323-334>
- Nafisah, Z., & Adi, Y. A. (2024). Model SEIR dengan Pseudo-Recovery pada Kasus Tuberkulosis di Jawa Barat. *Jurnal Matematika UNAND*, 13(3), 170–187. <https://doi.org/https://doi.org/10.25077/jmua.13.3.170-187.2024>
- Nisa, S., & Syata, I. (2024). Penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4 Model Penyebaran Demam Berdarah Dengue di Kota Makassar. *Al-Aqlu: Jurnal Matematika, Teknik Dan Sains*, 2(1), 52–61. <https://doi.org/https://doi.org/10.59896/aqlu.v2i1.52>
- Nurazizah, S., Sani, A., Djafar, K., Budiman, H., Somayasa, W., & Gubu, L. (2024). Model Matematika SEIR pada Penyakit Diabetes Mellitus Tipe 2. *Jurnal Matematika, Komputasi Dan Statistika*, 4(1), 523–530.
- Pamungkas, W. Z., & Prasetya, A. D. (2024). Pemodelan Matematika Penyebaran Epidemi di Lingkungan Perkotaan Menggunakan Model SEIR dengan Faktor Lingkungan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1(2), 30–35. <https://doi.org/https://doi.org/10.62951/ijsme.v1i2.58>
- Sari, F. Y., Maulidy, R., Wahyudi, N., Fransisca, V., & Putri, A. M. (2024). Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit Tuberculosis di Provinsi Jawa Timur. *Journal of Mathematics Education and Science*, 7(2), 117–128. <https://doi.org/https://doi.org/10.32665/james.v7i2.2733>
- Sianipar, A. D. R., & Sinaga, L. P. (2024). Kontrol Optimal pada Model Penyebaran SARS-CoV-2 dengan Pelaksanaan Testing dan Perawatan. *Ranah Research : Journal of Multidisciplinary Research and Development*, 6(1), 94–105. <https://doi.org/https://doi.org/10.38035/rrj.v6i1>
- Side, S., Sanusi, W., & Bohari, A. (2021). Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Makassar. *JMathCos(Journal of Mathematics, Computations, and Statistics)*, 4(1), 1–12.

<https://doi.org/https://doi.org/10.35580/jmathcos.v4i1.20444>

- Sita, N. D., Kharis, S. A. A., & Muna, S. U. N. (2024). Pendekatan Statistika Bayesian dalam Testing Ganda Tertarget untuk Meningkatkan Efektivitas Tes Rapid dan Deteksi Varian Virus Baru. *Prosiding Seminar Nasional Sains Dan Teknologi Seri 02*, 1(2), 150–161.
- Sobihannur, R. P., Noerjoedianto, D., Rahmat, A. A., Novita, W., & Rini, E. (2025). Determinan Kejadian Pneumonia pada Bayi di Wilayah Kerja Puskesmas Paal V Kota Jambi Tahun 2024. *Pub Health Jurnal Kesehatan Masyarakat*, 3(4), 72–81. <https://doi.org/https://doi.org/10.56211/pubhealth.v3i4.802>
- Sumardi, S. R., Allo, C. B. G., B, W. A. F., & Paranoan, N. R. (2023). Analisis Matematika pada Penyebaran Virus Nipah (Niv) dengan Menggunakan Kendali Optimal Metode Pontryagin Maximum Principle (PMP). *KOLONI: Jurnal Multidisiplin Ilmu*, 2(1), 250–261. <https://doi.org/https://doi.org/10.31004/koloni.v2i1.440>
- Sumardi, S. R., Norasia, Y., & B, W. A. F. (2023). Penerapan Dua Kendali Optimal pada Model Matematika Penyebaran Virus Ebola dengan Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin (PMP). *Indonesian Journal of Multidisciplinary Expertise (IJME): Jurnal Multidisiplin Ilmu*, 1(4), 10–17. <https://doi.org/https://doi.org/10.31004/ijme.v1i4.13>
- WHO. (2022). *Pneumonia*. WHO. https://www.who.int/health-topics/pneumonia#tab=tab_1
- Zhafran, A. M. (2022). Model Matematika SEIRS Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi. *Journal Mathematics UNP*, 7(3), 121–127. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.24036/unpjomath.v7i3.12577>