

RAINBOW CONNECTION NUMBERS IN GRAPHS: A COMPREHENSIVE STUDY

BILANGAN RAINBOW CONNECTION PADA GRAF: KAJIAN KOMPREHENSIF

¹Gema Hista Medika*, ²Syafrizal Sy, ³Muhafzan, ⁴Zulfaneti

^{1,2,3}Departemen Matematika Dan Sains Data, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Andalas, Padang, Indonesia

⁴Departemen Sains Data, Universitas PGRI Sumatera Barat, Padang, Indonesia

E-mail: ¹gemahistamedika@uinbukittinggi.ac.id, ²syafrizasy@sci.unand.ac.id, ³muhafzan@sci.unand.ac.id,
⁴zulfaneti@upgrisba.ac.id

Received: February 2026; Accepted: March 2026; Published: April 2026

Abstract

The rainbow connection number is a graph parameter that integrates edge coloring and graph connectivity. A connected graph is said to be rainbow connected if every pair of vertices is joined by a path whose edges have distinct colors, and the rainbow connection number represents the minimum number of colors required to satisfy this property. This study aims to provide a comprehensive and systematic analysis of research developments related to rainbow connection numbers in graphs. The method employed is a systematic literature review of reputable international journals and nationally accredited publications. The analysis covers fundamental definitions, known values for various classes of graphs, relationships with structural parameters such as diameter, minimum degree, and connectivity, as well as computational complexity and several important variants, including strong rainbow connection, rainbow vertex-connection, and total rainbow connection. The results indicate that the rainbow connection number is strongly influenced by graph structure, with diameter serving as a natural lower bound and connectivity contributing to tighter upper bounds. Furthermore, determining the exact value for general graphs is computationally intractable, motivating the use of approximation and heuristic approaches. This study also identifies research gaps, particularly in algorithmic development and the analysis of complex graph classes, and highlights potential applications in communication networks and network security.

Keywords: Graph Theory, Rainbow Connection Number, Edge Coloring, Graph Connectivity.

Abstrak

Bilangan *rainbow connection* merupakan salah satu parameter dalam teori graf yang mengintegrasikan konsep pewarnaan sisi dan keterhubungan graf. Suatu graf terhubung dikatakan *rainbow connected* apabila setiap pasangan simpul dihubungkan oleh lintasan yang sisi-sisinya memiliki warna berbeda, dan bilangan *rainbow connection* menyatakan jumlah minimum warna yang diperlukan untuk memenuhi kondisi tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menyajikan kajian komprehensif dan sistematis mengenai perkembangan bilangan *rainbow connection* pada graf. Metode yang digunakan adalah *systematic literature review* terhadap artikel jurnal internasional bereputasi dan jurnal nasional terakreditasi. Kajian ini mencakup definisi dasar, nilai bilangan *rainbow connection* pada berbagai kelas graf, hubungan dengan parameter struktural seperti diameter, derajat minimum,

*Corresponding author.

© 2026. Author.

p-ISSN: 2580-6726

e-ISSN: 2598-2133

dan konektivitas, serta aspek kompleksitas komputasi dan berbagai variannya, termasuk *strong rainbow connection*, *rainbow vertex-connection*, dan *total rainbow connection*. Hasil kajian menunjukkan bahwa nilai bilangan *rainbow connection* sangat dipengaruhi oleh struktur graf, dengan diameter sebagai batas bawah utama dan konektivitas sebagai faktor penentu batas atas. Selain itu, penentuan nilai eksak pada graf umum merupakan permasalahan yang kompleks secara komputasi, sehingga diperlukan pendekatan aproksimasi dan algoritmik. Kajian ini juga mengidentifikasi celah penelitian, khususnya dalam pengembangan algoritma dan analisis graf kompleks, serta menunjukkan potensi penerapan dalam pemodelan jaringan komunikasi dan keamanan jaringan.

Kata kunci: Teori Graf, Bilangan *Rainbow Connection*, Pewarnaan Sisi, Konektivitas Graf.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang penting dalam matematika diskrit yang berperan dalam memodelkan dan menganalisis berbagai permasalahan, baik yang bersifat teoretis maupun aplikatif. Konsep-konsep dasar dalam teori graf, seperti keterhubungan dan pewarnaan graf, telah banyak digunakan untuk merepresentasikan struktur jaringan, sistem komunikasi, serta hubungan antarobjek dalam berbagai konteks. Keterhubungan graf menggambarkan sejauh mana simpul-simpul dalam graf dapat saling dihubungkan, sedangkan pewarnaan graf berkaitan dengan pemberian label atau warna pada elemen graf dengan aturan tertentu untuk memenuhi kondisi khusus yang diinginkan (Bondy & Murty, 2008).

Dalam perkembangannya, kajian pewarnaan graf tidak hanya terbatas pada aspek lokal, tetapi juga diarahkan pada pemahaman sifat global suatu graf. Salah satu konsep yang muncul dari penggabungan antara pewarnaan sisi dan keterhubungan graf adalah bilangan *rainbow connection*. Konsep ini diperkenalkan untuk menjamin adanya lintasan dengan warna sisi yang berbeda antara setiap pasangan simpul dalam graf terhubung. Suatu graf dikatakan *rainbow connected* apabila untuk setiap pasangan simpul terdapat lintasan yang seluruh sisi-sisinya memiliki warna berbeda, dan bilangan *rainbow connection* menyatakan jumlah minimum warna yang diperlukan untuk memenuhi kondisi tersebut (Chartrand et al., 2008).

Sejak pertama kali diperkenalkan, bilangan *rainbow connection* telah menjadi topik penelitian yang berkembang pesat dalam teori graf. Berbagai penelitian telah dilakukan untuk menentukan nilai parameter ini pada beragam kelas graf, seperti graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, dan graf pohon (Medika, 2013). Selain itu, sejumlah hasil menunjukkan adanya keterkaitan yang erat antara bilangan *rainbow connection* dengan parameter graf lain, khususnya diameter graf dan derajat minimum. Hubungan ini mengindikasikan bahwa struktur graf memiliki peranan penting dalam menentukan besar kecilnya nilai parameter tersebut (X. Li & Sun, 2012).

Di samping kajian teoretis, aspek kompleksitas komputasi bilangan *rainbow connection* juga menjadi perhatian penting. Penelitian menunjukkan bahwa penentuan nilai eksak bilangan *rainbow connection* untuk graf umum merupakan permasalahan yang sulit secara komputasi. Bahkan, penentuan

apakah suatu graf memiliki bilangan *rainbow connection* paling banyak dua telah dibuktikan sebagai masalah NP-complete. Kondisi ini mendorong pengembangan pendekatan alternatif, seperti analisis berbasis parameter graf, metode aproksimasi, serta kajian pada kelas graf khusus yang memiliki struktur lebih teratur (Chakraborty et al., 2009).

Selain itu, konsep bilangan *rainbow connection* juga mengalami perluasan melalui pengembangan berbagai varian, seperti *strong rainbow connection*, *rainbow vertex-connection*, dan *total rainbow connection*. Varian-varian ini tidak hanya memperkaya kajian teoretis dalam teori graf, tetapi juga membuka peluang penelitian baru, baik dari sisi analisis matematis maupun aplikasi praktis. Dalam konteks tertentu, konsep ini memiliki potensi penerapan, misalnya dalam pemodelan jaringan komunikasi multikanal dan keamanan jaringan, di mana keberadaan lintasan dengan jalur berbeda dapat meningkatkan keandalan sistem (Krivelevich & Yuster, 2010).

Meskipun telah terdapat berbagai survei dan buku yang membahas bilangan *rainbow connection*, kajian yang secara sistematis mengintegrasikan hubungan antara kelas graf, parameter struktural (seperti diameter, derajat minimum, dan konektivitas), aspek kompleksitas komputasi, serta perkembangan berbagai variannya masih relatif terbatas. Sebagian besar penelitian cenderung membahas aspek tersebut secara terpisah dan belum memberikan sintesis yang menyeluruh. Kondisi ini menunjukkan perlunya suatu kajian yang tidak hanya merangkum hasil penelitian terdahulu, tetapi juga mengkaji keterkaitan antarparameter serta mengidentifikasi kecenderungan dan celah penelitian yang masih terbuka.

Berdasarkan uraian tersebut, tujuan penulisan artikel ini adalah untuk menyajikan kajian komprehensif mengenai bilangan *rainbow connection* pada graf melalui sintesis sistematis terhadap literatur yang ada. Kajian ini mencakup pembahasan konsep dasar, hasil-hasil utama pada berbagai kelas graf, hubungan dengan parameter graf seperti diameter, derajat minimum, dan konektivitas, serta aspek kompleksitas komputasi dan perkembangan berbagai variannya. Selain itu, artikel ini bertujuan untuk mengidentifikasi pola keterkaitan antarparameter, mengevaluasi kecenderungan hasil penelitian terdahulu, serta mengungkap celah penelitian yang masih terbuka, khususnya dalam pengembangan pendekatan algoritmik dan aproksimasi. Dengan demikian, hasil kajian ini diharapkan tidak hanya memberikan gambaran menyeluruh, tetapi juga menjadi dasar bagi pengembangan penelitian lanjutan di bidang teori graf.

METODE PENELITIAN

Desain Penelitian

Penelitian ini merupakan kajian literatur sistematis (*systematic literature review*) yang bertujuan untuk mengidentifikasi, mengkaji, dan mensintesis hasil-hasil penelitian terkait bilangan *rainbow connection* pada graf beserta berbagai variannya. Kajian ini tidak memuat pembuktian teorema baru maupun eksperimen komputasi, melainkan menitikberatkan pada analisis teoretis terhadap hasil penelitian terdahulu dalam kerangka teori graf. Pendekatan ini dipilih karena mampu memberikan gambaran menyeluruh mengenai perkembangan konsep, kecenderungan penelitian, serta celah riset yang masih terbuka (X. Li & Sun, 2012; X. Li, 2017).

Strategi Penelusuran Literatur

Literatur diperoleh melalui penelusuran pada beberapa basis data ilmiah, antara lain Google Scholar, Scopus, SpringerLink, ScienceDirect, DOAJ, dan Garuda. Penelusuran dilakukan menggunakan kata kunci yang relevan, seperti "*rainbow connection*", "*strong rainbow connection*", "*rainbow vertex-connection*", dan "*total rainbow connection*". Kombinasi kata kunci digunakan untuk memperoleh literatur yang komprehensif dan sesuai dengan fokus kajian.

Kriteria Inklusi dan Eksklusi

Literatur yang disertakan dalam kajian ini dipilih berdasarkan kriteria berikut:

1. Secara eksplisit membahas bilangan *rainbow connection* atau variannya, seperti *strong rainbow connection*, *rainbow vertex-connection*, dan *total rainbow connection*;
2. Memuat kontribusi teoretis berupa penentuan nilai eksak, batas atas dan/atau batas bawah, atau kajian kompleksitas komputasi;
3. Dipublikasikan dalam jurnal bereputasi, buku referensi, atau jurnal nasional terakreditasi;
4. Memiliki relevansi langsung terhadap perkembangan kajian bilangan *rainbow connection* dalam teori graf.

Literatur yang tidak memenuhi kriteria tersebut atau tidak memiliki kontribusi substantif terhadap kajian dikeluarkan dari analisis.

Proses Seleksi Literatur

Proses seleksi literatur dilakukan melalui beberapa tahapan, yaitu:

1. Identifikasi artikel dari basis data yang digunakan,
2. Penyaringan berdasarkan judul dan abstrak untuk menilai kesesuaian topik,
3. Evaluasi isi secara menyeluruh (*full-text review*), dan

4. Pemilihan akhir literatur yang relevan dengan tujuan kajian.

Proses ini dilakukan secara sistematis untuk memastikan bahwa literatur yang digunakan memiliki kualitas dan relevansi yang memadai.

Ekstraksi Data

Data yang dianalisis dalam penelitian ini berupa data sekunder yang diperoleh dari publikasi ilmiah. Informasi yang diekstraksi dari setiap literatur meliputi objek kajian, kelas graf yang diteliti, parameter yang digunakan, hasil utama (nilai eksak, batas, atau kompleksitas), serta pendekatan atau metode yang digunakan. Proses ekstraksi dilakukan menggunakan lembar pencatatan literatur untuk menjaga konsistensi dan kelengkapan data.

Teknik Sintesis Literatur

Analisis data dilakukan secara deskriptif-analitis melalui beberapa tahapan. Pertama, definisi dan notasi yang digunakan dalam setiap literatur dikaji untuk memastikan konsistensi konsep. Kedua, hasil penelitian dikelompokkan berdasarkan fokus kajian, seperti kelas graf, parameter graf (diameter, derajat minimum, dan konektivitas), jenis hasil (nilai eksak, batas atas/bawah, dan kompleksitas), serta varian konsep yang dikaji. Ketiga, dilakukan perbandingan antarhasil penelitian untuk mengidentifikasi kesamaan, perbedaan, serta kecenderungan umum.

Selanjutnya, dilakukan sintesis untuk mengungkap hubungan antara struktur graf dan nilai bilangan *rainbow connection*, serta untuk mengidentifikasi keterbatasan dan celah penelitian yang masih terbuka (Krivelevich & Yuster, 2010; X. Li & Sun, 2012). Hasil sintesis ini kemudian disajikan secara terstruktur pada bagian hasil dan pembahasan.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Definisi dan Konsep Dasar

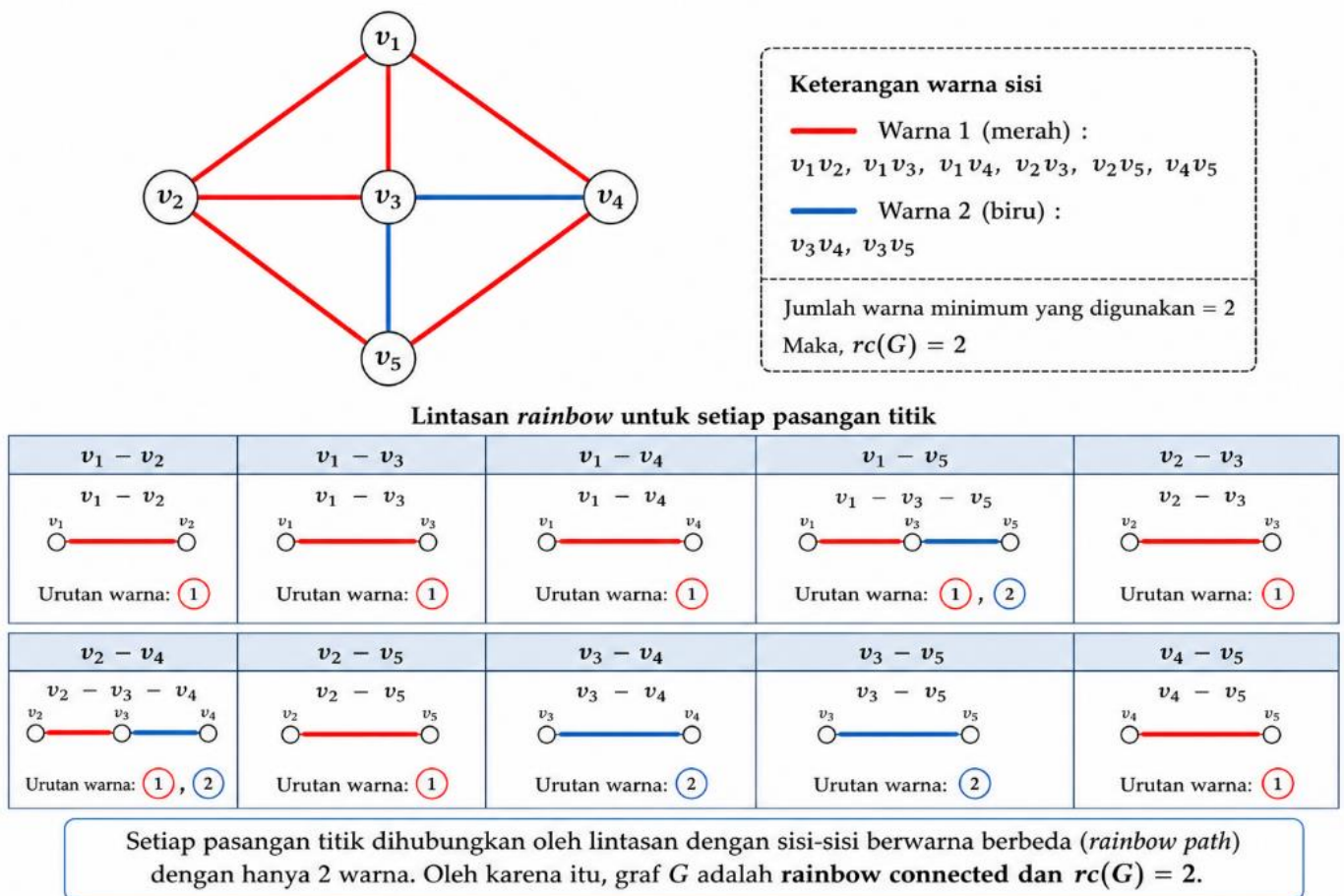
Bagian ini memuat definisi dan konsep dasar dalam teori graf yang digunakan sebagai landasan pembahasan bilangan *rainbow connection*. Seluruh graf yang dibahas diasumsikan sebagai graf sederhana, tak berarah, dan terhubung.

Suatu graf didefinisikan sebagai pasangan terurut $G = (V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan simpul dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi (Bondy & Murty, 2008; Diestel, 2017). Graf G dikatakan terhubung apabila untuk setiap pasangan simpul $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya (West, 2021). Jarak antara dua simpul u dan v , dinotasikan $d_G(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek. Diameter graf didefinisikan sebagai:

$$\text{diam}(G) = \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

Parameter diameter memiliki peran penting karena memberikan batas bawah alami bagi bilangan *rainbow connection*.

Pewarnaan sisi pada graf merupakan suatu pemetaan $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, di mana setiap sisi diberi warna tertentu. Suatu lintasan disebut *rainbow path* apabila semua sisi pada lintasan tersebut memiliki warna yang berbeda. Graf G dikatakan *rainbow connected* apabila untuk setiap pasangan simpul berbeda $u, v \in V(G)$ terdapat paling sedikit satu *rainbow path* yang menghubungkan keduanya. Bilangan *rainbow connection* dari graf G , dinotasikan dengan $rc(G)$, adalah jumlah minimum warna yang diperlukan sehingga graf tersebut bersifat *rainbow connected* (Chartrand et al., 2008; X. Li & Sun, 2012).



Gambar 1. Contoh Graf G dengan $rc(G)=2$

Berdasarkan ilustrasi pada gambar 1, terlihat bahwa penggunaan dua warna sudah cukup untuk menjamin bahwa setiap pasangan simpul dihubungkan oleh lintasan *rainbow*. Hal ini menunjukkan bahwa bilangan *rainbow connection* ditentukan oleh jumlah warna minimum yang masih mampu memenuhi sifat keterhubungan tersebut.

Secara umum, nilai bilangan *rainbow connection* sangat dipengaruhi oleh struktur graf. Graf dengan tingkat keterhubungan yang tinggi cenderung memiliki nilai yang lebih kecil, sedangkan graf dengan struktur yang lebih terbatas atau memanjang memerlukan lebih banyak warna untuk memenuhi

kondisi *rainbow connected*. Selain itu, terdapat beberapa varian konsep, antara lain *strong rainbow connection* dengan notasi $src(G)$, *rainbow vertex-connection*, dan *total rainbow connection*. Varian-varian ini memperluas konsep keterhubungan graf dengan memperketat syarat lintasan atau memperluas objek pewarnaan. Secara konseptual, bilangan *rainbow connection* mengintegrasikan aspek keterhubungan global dan pewarnaan graf. Berbeda dengan pewarnaan graf klasik yang bersifat lokal, konsep ini menekankan keberagaman lintasan antar simpul, sehingga sangat dipengaruhi oleh struktur graf secara keseluruhan.

Ringkasan Literatur Penelitian Terkait

Tabel 1 berikut menyajikan ringkasan penelitian terkait bilangan *rainbow connection* berdasarkan fokus kajian dan kontribusi utama.

Tabel 1. Ringkasan Penelitian terkait Bilangan *Rainbow Connection*

No	(Penulis, Tahun)	Kelas Graf	Parameter Dikaji	Jenis Hasil	Pendekatan	Keterbatasan
1	(Chartrand et al., 2008)	Graf umum	$rc(G)$	Konsep dasar	Teoretis	Belum ada batas umum
2	(X. Li & Sun, 2011)	Survey	$rc(G)$, varian	Review	Literatur	Tidak fokus pada analisis struktural
3	(Schiermeyer, 2009)	Graf umum	Derajat minimum	Batas atas	Analisis teoretis	Terbatas pada kondisi tertentu
4	(Schiermeyer, 2011)	Graf terhubung	$rc(G)$	Batas atas & bawah	Teoretis	Belum mencakup graf kompleks
5	(X. Li et al., 2012)	Graf terhubung	Konektivitas	Hubungan parameter	Analisis matematis	Tidak berlaku untuk semua graf
6	(Ekstein et al., 2012)	Graf 2-terhubung	Orde graf	Batas atas	Teoretis	Khusus graf 2-terhubung
7	(Sy et al., 2013)	Graf khusus	$rc(G)$, $src(G)$	Nilai eksak	Konstruksi graf	Terbatas pada graf tertentu
8	(Estetikasari & Sy, 2013)	Graf corona	$rc(G)$	Nilai eksak	Operasi graf	Bergantung struktur dasar
9	(X. Li et al., 2014)	Graf umum	Varian total	Pengembangan konsep	Teoretis	Kompleksitas meningkat
10	(L. Chen et al., 2018)	Graf umum	Berbagai varian	Survey lanjutan	Literatur	Tidak membahas aplikasi algoritmik

Secara umum, literatur menunjukkan bahwa penelitian awal berfokus pada pengenalan konsep dan sifat dasar, kemudian berkembang pada penentuan nilai eksak, batas matematis, serta pengembangan varian. Perkembangan ini menunjukkan adanya pergeseran dari kajian konseptual menuju analisis struktural dan kompleksitas.

Nilai Bilangan *Rainbow Connection* pada Kelas Graf

Penelitian mengenai bilangan *rainbow connection* pada graf berkembang pesat melalui kajian nilai eksak pada berbagai kelas graf khusus. Pendekatan ini bertujuan untuk memahami bagaimana struktur graf memengaruhi jumlah warna minimum yang diperlukan agar graf menjadi *rainbow connected*. Kelas graf yang dikaji umumnya memiliki pola keterhubungan tertentu sehingga memungkinkan penentuan nilai parameter secara eksplisit.

Untuk graf dengan struktur sederhana dan terkontrol, nilai bilangan *rainbow connection* sering kali dapat ditentukan secara eksak. Hasil-hasil awal menunjukkan bahwa graf dengan diameter kecil atau tingkat keterhubungan tinggi cenderung memiliki nilai *rainbow connection* yang relatif kecil. Secara umum berlaku:

$$\text{diam}(G) \leq rc(G),$$

yang menunjukkan bahwa diameter graf berperan sebagai batas bawah alami dalam penentuan nilai parameter tersebut (Chartrand et al., 2008).

Kajian pada graf dengan tingkat konektivitas tertentu memberikan hasil yang lebih tajam. Untuk graf 2-terhubung dengan n simpul, diperoleh:

$$rc(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

yang menunjukkan bahwa peningkatan konektivitas struktural graf berimplikasi langsung pada penurunan kebutuhan warna (Ekstein et al., 2012; X. Li et al., 2012). Hasil ini menegaskan bahwa konektivitas global merupakan faktor penting dalam mengendalikan nilai bilangan *rainbow connection*.

Selain graf dengan parameter struktural tertentu, banyak penelitian berfokus pada kelas graf khusus yang dibentuk melalui konstruksi atau operasi graf. Pada graf kipas dan graf matahari, nilai *rainbow connection* dapat ditentukan secara eksak melalui analisis struktur lintasan dan siklus yang mendasarinya (Sy et al., 2013). Hal ini menunjukkan bahwa keteraturan struktur graf memungkinkan pewarnaan sisi yang lebih efisien.

Pendekatan serupa juga diterapkan pada graf hasil operasi, seperti graf corona. Pada kelas graf ini, nilai *rainbow connection* dipengaruhi oleh kombinasi struktur graf dasar dan graf yang digabungkan. Penelitian menunjukkan bahwa nilai parameter pada graf corona dapat dinyatakan sebagai fungsi dari parameter graf penyusunnya (Estetikasari & Sy, 2013).

Selain itu, kajian nilai eksak juga berkembang pada graf hasil konstruksi non-standar, seperti graf siput (*snail graph*), yang menunjukkan pola pertumbuhan nilai parameter yang relatif stabil untuk graf berorde besar (Medika & Sy, 2025). Kajian serupa juga dilakukan pada berbagai graf konstruksi lain, seperti graf Jahangir, graf salju, graf Ferris wheel, dan graf hasil modifikasi lainnya (Asmara, 2018; Noor et al., 2021; Lakisa et al., 2022; Makhfudloh et al., 2023; Suthar et al., 2021). Hasil-hasil ini menunjukkan

bahwa struktur graf yang dibangun secara sistematis memungkinkan penentuan nilai *rainbow connection* secara eksplisit. Lebih lanjut, pada graf buku dengan berbagai konfigurasi siklus dasar, diperoleh bahwa nilai *rainbow connection* dapat dinyatakan berdasarkan ukuran graf penyusunnya (Medika et al., 2024). Hal ini memperkuat bahwa hubungan antara struktur graf dan nilai parameter bersifat sistematis dan dapat diformulasikan secara matematis.

Secara umum, hasil-hasil pada berbagai kelas graf menunjukkan kecenderungan bahwa nilai bilangan *rainbow connection* sangat dipengaruhi oleh pola keterhubungan lokal dan global graf. Graf dengan struktur simetris atau teratur cenderung memiliki nilai yang dapat ditentukan secara eksak, sedangkan pada graf dengan struktur kompleks atau acak, penentuan nilai eksak menjadi lebih sulit dan sering kali digantikan oleh batas atas dan batas bawah.

Secara analitis, dapat disimpulkan bahwa diameter graf berperan sebagai batas bawah fundamental, sedangkan konektivitas dan kepadatan graf berperan dalam menurunkan nilai parameter tersebut. Namun, hubungan antara parameter-parameter ini belum sepenuhnya terkarakterisasi pada graf umum, sehingga masih membuka peluang penelitian lebih lanjut. Hasil-hasil penelitian pada berbagai kelas graf ini tidak hanya memperkaya katalog nilai bilangan *rainbow connection*, tetapi juga memberikan intuisi struktural yang penting bagi pengembangan teori. Pola-pola yang muncul dari kajian kelas graf khusus sering digunakan sebagai dasar untuk merumuskan dugaan, batas umum, serta pengembangan varian bilangan *rainbow connection* pada graf yang lebih luas.

Batas Atas dan Batas Bawah Bilangan *Rainbow Connection*

Penentuan nilai eksak bilangan *rainbow connection* tidak selalu memungkinkan untuk graf umum. Oleh karena itu, kajian mengenai batas bawah dan batas atas menjadi pendekatan penting untuk memahami perilaku parameter ini secara lebih luas. Batas-batas tersebut umumnya dinyatakan dalam kaitannya dengan parameter struktural graf, seperti diameter, orde graf, derajat minimum, dan konektivitas (Chartrand et al., 2008; Holliday et al., 2014; H. Li et al., 2012; X. Li & Sun, 2012).

Batas Bawah

Batas bawah paling dasar untuk bilangan *rainbow connection* berasal dari diameter graf. Untuk setiap graf terhubung G , berlaku:

$$\text{diam}(G) \leq rc(G),$$

karena setiap lintasan *rainbow* yang menghubungkan dua simpul terjauh harus memiliki panjang paling sedikit sama dengan diameter graf (Chartrand et al., 2008; X. Li & Sun, 2012). Ketaksamaan ini memberikan batas bawah alami dan menjadi dasar dalam hampir semua analisis nilai *rainbow connection*.

Selain diameter, beberapa penelitian menunjukkan bahwa struktur lokal graf juga dapat memengaruhi batas bawah. Keberadaan jembatan (*bridge*) atau titik potong (*cut vertex*) cenderung

meningkatkan kebutuhan warna, karena jalur alternatif yang terbatas mengharuskan penggunaan warna yang berbeda untuk menjaga keterhubungan *rainbow* (Holliday et al., 2014). Pada graf dengan struktur demikian, nilai $rc(G)$ sering kali lebih besar dibandingkan graf dengan konektivitas tinggi. Namun demikian, diameter tetap menjadi parameter batas bawah yang paling fundamental dan berlaku secara umum pada semua graf terhubung.

Batas Atas

Berbagai hasil penelitian menunjukkan bahwa batas atas bilangan *rainbow connection* dapat dinyatakan sebagai fungsi dari orde graf dan parameter struktural lainnya. Untuk graf terhubung berorde n , secara umum berlaku:

$$rc(G) \leq n - 1.$$

karena pewarnaan berbeda pada setiap sisi pohon merentang sudah cukup untuk menjadikan graf *rainbow connected* (Chartrand et al., 2008). Meskipun demikian, batas ini belum memberikan estimasi yang tajam.

Batas atas yang lebih tajam diperoleh dengan mempertimbangkan derajat minimum graf. Telah ditunjukkan bahwa graf dengan derajat minimum besar memiliki nilai *rainbow connection* yang relatif kecil, yang menunjukkan bahwa kepadatan graf berperan penting dalam menurunkan kebutuhan warna (Schiermeyer, 2009; Schiermeyer, 2011; X. Li et al., 2012). Selain itu, kajian pada graf hasil operasi dan graf dengan struktur khusus menunjukkan bahwa batas atas dapat bervariasi secara signifikan tergantung pada karakteristik graf tersebut (Basavaraju et al., 2012; X. Li et al., 2012). Hal ini menegaskan bahwa tidak terdapat batas atas tunggal yang berlaku untuk semua graf.

Peran konektivitas graf juga sangat menonjol dalam penentuan batas atas. Untuk graf 2-terhubung dengan n simpul, diperoleh:

$$rc(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

yang menunjukkan bahwa peningkatan konektivitas global secara langsung memperbaiki batas atas bilangan *rainbow connection* (Ekstein et al., 2012; X. Li et al., 2012). Hasil ini merupakan salah satu batas linear yang relatif ketat dan banyak digunakan sebagai acuan dalam literatur. Selain itu, pada graf dengan struktur tertentu, seperti graf berdiameter kecil atau graf hasil konstruksi tertentu, batas atas dapat berimpit dengan batas bawah. Kondisi ini memungkinkan penentuan nilai eksak *rainbow connection* secara langsung, tanpa memerlukan analisis tambahan yang kompleks.

Diskusi Umum

Secara keseluruhan, kajian batas bawah dan batas atas bilangan *rainbow connection* menunjukkan keterkaitan yang kuat antara parameter ini dan struktur graf. Diameter memberikan batas bawah

universal, sedangkan derajat minimum dan konektivitas berperan dalam menentukan batas atas yang lebih tajam.

Secara analitis, dapat disimpulkan bahwa peningkatan konektivitas dan kepadatan graf cenderung menurunkan nilai *rainbow connection*, sementara struktur graf yang memiliki keterbatasan jalur (seperti adanya jembatan) cenderung meningkatkan nilai parameter tersebut. Namun, hingga saat ini belum terdapat formulasi umum yang mampu menghubungkan seluruh parameter tersebut secara komprehensif untuk graf arbitrer.

Pemahaman terhadap batas-batas ini tidak hanya penting untuk memperkirakan nilai *rainbow connection* pada graf umum, tetapi juga menjadi dasar dalam pengembangan hasil eksak, pendekatan aproksimasi, serta analisis varian lanjutan dari konsep *rainbow connection*.

Varian Bilangan *Rainbow Connection*

Seiring berkembangnya kajian bilangan *rainbow connection*, berbagai varian konsep diperkenalkan untuk memperluas pemahaman mengenai keterhubungan graf melalui pewarnaan. Varian-varian ini umumnya muncul dari dua pendekatan utama, yaitu penambahan pembatasan pada lintasan yang digunakan dan perluasan objek yang diwarnai, sehingga menghasilkan karakteristik keterhubungan yang lebih spesifik.

Salah satu varian yang banyak dikaji adalah bilangan *strong rainbow connection*. Suatu graf terhubung G dikatakan *strongly rainbow connected* apabila setiap pasangan simpul u dan v dihubungkan oleh suatu *rainbow path* yang sekaligus merupakan lintasan terpendek antara keduanya. Jumlah minimum warna yang diperlukan untuk memenuhi kondisi ini disebut *strong rainbow connection number* dan dinotasikan dengan $src(G)$. Karena adanya pembatasan pada lintasan terpendek, secara umum berlaku:

$$rc(G) \leq src(G),$$

yang menunjukkan bahwa *strong rainbow connection* merupakan konsep yang lebih ketat dibandingkan *rainbow connection* biasa (X. Li & Sun, 2011; X. Li & Sun, 2012).

Varian lain yang penting adalah bilangan *rainbow vertex-connection*, di mana pewarnaan dilakukan pada simpul-simpul graf. Dalam hal ini, suatu lintasan disebut *rainbow* apabila semua simpul internal pada lintasan tersebut memiliki warna yang berbeda. Pendekatan ini memberikan perspektif alternatif terhadap keterhubungan graf dan menunjukkan bahwa pewarnaan simpul juga dapat digunakan untuk menjamin keberadaan lintasan *rainbow* antar pasangan simpul (X. Li & Magnant, 2015).

Selain itu, diperkenalkan pula bilangan *total rainbow connection*, yang menggabungkan pewarnaan simpul dan sisi secara bersamaan. Pada varian ini, lintasan *rainbow* mensyaratkan bahwa semua simpul internal dan sisi pada lintasan tersebut memiliki warna yang berbeda. Varian ini

memperkaya kajian *rainbow connection* dengan mengintegrasikan dua jenis pewarnaan sekaligus, namun juga meningkatkan tingkat kompleksitas dalam penentuan nilainya (X. Li et al., 2014).

Secara analitis, ketiga varian utama tersebut menunjukkan tingkat keketatan yang berbeda dalam mendefinisikan keterhubungan graf. *Strong rainbow connection* merupakan varian paling restriktif karena membatasi lintasan pada lintasan terpendek, sedangkan *rainbow vertex-connection* dan *total rainbow connection* memperluas ruang kajian melalui perubahan objek pewarnaan. Perbedaan ini mengakibatkan variasi nilai parameter serta tingkat kesulitan analisis yang berbeda pada setiap varian.

Hubungan antarvarian serta perbandingan nilai-nilai yang dihasilkan pada kelas graf tertentu masih menjadi topik aktif dalam literatur dan terus berkembang hingga saat ini (Doan & Schiermeyer, 2018; L. Chen et al., 2018). Secara umum, kajian terhadap berbagai varian bilangan *rainbow connection* menunjukkan bahwa setiap varian menangkap aspek keterhubungan graf yang berbeda, sehingga membuka peluang penelitian lanjutan, baik dalam analisis teoretis maupun pengembangan pendekatan algoritmik.

Kompleksitas Komputasi

Selain kajian teoretis mengenai nilai eksak dan batas bilangan *rainbow connection*, aspek kompleksitas komputasi juga memegang peranan penting. Penentuan nilai bilangan *rainbow connection* pada graf umum tidak hanya menantang secara matematis, tetapi juga sulit dari sudut pandang algoritmik. Oleh karena itu, pengembangan pendekatan algoritmik, metode aproksimasi, serta analisis pada kelas graf khusus menjadi fokus utama dalam kajian kompleksitas parameter ini (G. Chen et al., 2014; Basavaraju et al., 2012).

Hasil-hasil penelitian menunjukkan bahwa penentuan nilai bilangan *rainbow connection* pada graf umum merupakan permasalahan yang sulit secara komputasi. Secara khusus, telah dibuktikan bahwa menentukan apakah suatu graf memiliki bilangan *rainbow connection* paling banyak dua merupakan permasalahan NP-lengkap (*NP-complete*). Konsekuensinya, penentuan nilai eksak $rc(G)$ pada graf umum bersifat NP-hard, sehingga tidak diharapkan adanya algoritma waktu polinomial untuk menyelesaikan masalah tersebut pada graf arbitrer.

Dari sudut pandang algoritmik, pendekatan eksak umumnya memerlukan eksplorasi kombinatorial terhadap pewarnaan sisi dan lintasan dalam graf, yang menyebabkan kompleksitas waktu meningkat secara signifikan seiring bertambahnya ukuran graf. Sebaliknya, pendekatan aproksimasi dan heuristik menawarkan efisiensi komputasi yang lebih baik, meskipun tidak selalu menghasilkan nilai optimal. Hal ini menunjukkan adanya trade-off antara akurasi dan efisiensi dalam penentuan nilai *rainbow connection*.

Kondisi tersebut mendorong penelitian lanjutan pada kelas graf khusus, di mana struktur graf memungkinkan penentuan nilai *rainbow connection* secara eksak atau melalui algoritma yang lebih efisien. Selain itu, kajian kompleksitas juga mendorong pengembangan pendekatan berbasis batas atas dan batas bawah sebagai alternatif dalam memperkirakan nilai parameter tanpa harus menentukan nilai eksaknya. Untuk varian bilangan *rainbow connection*, seperti *strong rainbow connection* dan *total rainbow connection*, tingkat kesulitan komputasi umumnya tidak lebih rendah dibandingkan versi dasarnya. Bahkan, pada beberapa kasus, pembatasan tambahan pada lintasan atau objek pewarnaan justru meningkatkan kompleksitas permasalahan. Hal ini menunjukkan bahwa semakin ketat definisi keterhubungan yang digunakan, semakin tinggi pula kompleksitas komputasi yang dihadapi.

Selain itu, masih terdapat kelas graf yang belum banyak dikaji dari sudut pandang algoritmik, seperti graf produk, graf acak (*random graphs*), dan graf jaringan skala besar. Hal ini membuka peluang penelitian untuk mengembangkan algoritma yang lebih efisien, termasuk pendekatan heuristik dan metaheuristik, dalam menentukan atau mengaproksimasi nilai bilangan *rainbow connection*. Secara keseluruhan, aspek kompleksitas komputasi menunjukkan bahwa penentuan bilangan *rainbow connection* merupakan permasalahan yang menantang secara algoritmik. Oleh karena itu, pengembangan metode yang mampu menyeimbangkan efisiensi komputasi dan akurasi hasil menjadi salah satu arah penelitian yang penting dalam kajian teori graf.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Artikel ini menyajikan kajian komprehensif mengenai bilangan *rainbow connection* pada graf melalui sintesis terhadap definisi dasar, nilai pada berbagai kelas graf, batas matematis, aspek kompleksitas komputasi, serta pengembangan variannya. Berdasarkan hasil kajian literatur, dapat disimpulkan bahwa bilangan *rainbow connection* merupakan parameter graf yang sangat dipengaruhi oleh struktur graf, khususnya diameter, derajat minimum, dan tingkat konektivitas.

Secara umum, diameter graf berperan sebagai batas bawah fundamental, sedangkan peningkatan konektivitas dan kepadatan graf cenderung menurunkan nilai parameter tersebut. Pada kelas graf dengan struktur teratur dan simetris, nilai bilangan *rainbow connection* dapat ditentukan secara eksak. Sebaliknya, pada graf umum yang lebih kompleks, penentuan nilai eksak menjadi sulit dan umumnya digantikan oleh pendekatan batas atas dan batas bawah.

Dari sudut pandang algoritmik, penentuan nilai bilangan *rainbow connection* pada graf umum merupakan permasalahan yang sulit secara komputasi, sehingga pendekatan berbasis aproksimasi dan kajian pada kelas graf khusus menjadi sangat penting. Selain itu, perkembangan berbagai varian, seperti

strong rainbow connection, *rainbow vertex-connection*, dan *total rainbow connection*, menunjukkan bahwa perluasan definisi keterhubungan graf melalui pewarnaan berimplikasi pada peningkatan kompleksitas analisis.

Saran

Berdasarkan hasil kajian ini, beberapa arah penelitian selanjutnya dapat dikemukakan. Pertama, penentuan nilai eksak bilangan *rainbow connection* pada kelas graf baru, khususnya graf hasil konstruksi atau operasi graf, masih terbuka luas untuk diteliti. Kedua, penguatan batas atas dan batas bawah dengan mempertimbangkan parameter graf tambahan berpotensi menghasilkan batas yang lebih tajam dan mendekati nilai eksak.

Ketiga, kajian komparatif antar varian bilangan *rainbow connection* pada kelas graf tertentu perlu dikembangkan untuk memahami hubungan antarparameter secara lebih mendalam. Terakhir, pengembangan algoritma yang lebih efisien, termasuk pendekatan aproksimasi, heuristik, dan metaheuristik, menjadi tantangan penting dalam menentukan nilai parameter ini pada graf berskala besar.

REFERENSI

- Asmara, A. (2018). Bilangan Rainbow Connection pada Graf Jahangir. *Jurnal Matematika*, 8(2), 75–82.
- Basavaraju, M., Chandran, L. S., Rajendraprasad, D., & Ramaswamy, S. (2012). Rainbow Connection Number of Graph Powers and Products. *Journal of Combinatorial Optimization*, 24(4), 563–578. <https://doi.org/10.1007/s10878-011-9430-8>
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory with Applications*. Springer.
- Chakraborty, S., Fischer, E., Matsliah, A., & Yuster, R. (2009). Hardness and Algorithms for Rainbow Connectivity. *Journal of Combinatorial Optimization*, 21(3), 330–347. <https://doi.org/10.1007/s10878-009-9250-0>
- Chartrand, G., Johns, G. ., McKeon, K. ., & P.Zhang. (2008). Rainbow Connection in Graphs. *Math Bohemica*, 133(1), 85–98.
- Chen, G., Li, X., & Yao, Y. (2014). Algorithmic Aspects of Rainbow Connectivity. *Theoretical Computer Science*, 555, 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.07.029>
- Chen, L., Li, X., & Liu, W. (2018). Rainbow Connection and Its Variants: A Survey. *Journal of Combinatorial Optimization*, 35(3), 707–727. <https://doi.org/10.1007/s10878-017-0179-4>
- Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (5th ed.). Springer.
- Doan, T. H., & Schiermeyer, I. (2018). On the Strong Rainbow Connection of Graphs. *Discrete Mathematics \& Theoretical Computer Science*, 20(2), 1–12.

- Ekstein, J., Holub, P., Kaiser, T., Koch, M., Ryjacek, Z., & Schiermeyer, I. (2012). The Rainbow Connection Number of 2-Connected Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 32(4), 659–668.
- Estetikasari, D., & Sy, S. (2013). *On the Rainbow Connection for Some Corona Graphs*. 7(100), 4975–4980.
- Holliday, R., Magnant, C., & Nowbandegani, P. S. (2014). Note on Rainbow Connection in Oriented Graphs with Diameter 2. *Theory and Applications of Graphs*, 1(1).
- Krivelevich, M., & Yuster, R. (2010). The Rainbow Connection of a Graph Is (at Most) Reciprocal to Its Minimum Degree. *Journal of Graph Theory*, 63(3), 185–191. <https://doi.org/10.1002/jgt.20418>
- Lakisa, Y., Lestari, D., & Talib, M. (2022). Rainbow Connection Number of Ferris Wheel Graphs. *Jurnal Matematika Dan Aplikasinya*, 21(1), 45–54.
- Li, H., Li, X., & Liu, S. (2012). Rainbow Connection of Graphs with Diameter 2. *Discrete Mathematics*. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.01.009>
- Li, X. (2017). *Rainbow Connection in Graphs: A Survey*. Springer.
- Li, X., Liu, S., Chandran, L. S., Mathew, R., & Rajendraprasad, D. (2012). Rainbow Connection Number and Connectivity. *Electronic Journal of Combinatorics*, 19(1).
- Li, X., & Magnant, C. (2015). Rainbow Vertex-Connection. *Discrete Applied Mathematics*, 193, 92–100. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.023>
- Li, X., Shi, Y., Zhang, L., & Sun, Y. (2014). Total Rainbow k-Connection in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 174, 92–101. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.04.012>
- Li, X., & Sun, Y. (2011). A Survey on Rainbow Connection of Graphs. *ArXiv Preprint ArXiv:1101.5747*.
- Li, X., & Sun, Y. (2012). *Rainbow Connections of Graphs*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3118-0>
- Makhfduloh, I. I., Dafik, D., & Adawiyah, R. (2023). Rainbow Connection pada Graf Siput, Graf Tunas Kelapa dan Graf Lotus. *CGANT Journal of*
- Medika, G. H. (2013). Rainbow Connection Pada Beberapa Graf. *Jurnal Matematika UNAND*, 2(2), 17. <https://doi.org/10.25077/jmu.2.2.17-25.2013>
- Medika, G. H., & Sy, S. (2025). The Rainbow Connection Number of Snail Graphs. *BiCED Proceeding*, 3(1), 1–6.
- Medika, G. H., Tomi, Z. B., & Wulan, E. R. (2024). Bilangan rainbow connection pada graf buku. *KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, 9(1), 87–97.
- Noor, C. A. P., Yahya, L., Nasib, S. K., & Yahya, N. I. (2021). Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf Salju (Sn_m). *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 4(1), 29–44. <https://doi.org/10.14710/jfma.v4i1.9035>
- Schiermeyer, I. (2009). Rainbow Connection in Graphs with Minimum Degree Three. In *Lecture Notes in Computer Science* (Vol. 5874, pp. 432–437). Springer.

- Schiermeyer, I. (2011). Bounds for the Rainbow Connection Number of Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 31(2), 387–395.
- Suthar, B., Parmar, D., Patel, D., Sharma, S., & Modi, Y. (2021). Rainbow Connection Number Of Some Graphs. *Webology*, 41(3), 809–826. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2326>
- Sy, S., Medika, G. H., & Yulianti, L. (2013). The Rainbow Connection of Fan and Sun. *Applied Mathematical Sciences*, 7(64), 3155–3160.
- West, D. B. (2021). *Introduction to Graph Theory* (3rd ed.). Pearson.