UIN IMAM BONJOL PADANG

Math Educa Journal 10 (2) (2026): 241-265

MATH EDUCA

Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Website: http://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/matheducа
Email: mej.uinibpadang@gmail.com

STABILITY ANALYSIS AND ADAPTIVE SLIDING MODE CONTROL OF A STOCHASTIC NIPAH SEIR MODEL

ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL SLIDING MODE ADAPTIF PADA MODEL SEIR STOKASTIK VIRUS NIPAH

[1]Dewi Suhika*, [2]Nela Rizka
[1*,2]Program Studi Matematika, Fakultas Sains, Institut Teknologi Sumatera, Indonesia
E-mail: [1]dewi.suhika@ma.itera.ac.id*, [2]nela.rizka@ma.itera.ac.id

Received: August 2026; Accepted: September 2026; Published: October 2026

Abstract

Nipah virus is a zoonotic pathogen capable of human-to-human transmission, with transmission dynamics influenced by uncertainty in the infection process. This study aims to analyze stability and design an adaptive sliding mode control for a SEIR (susceptible, exposed, infectious, and removed) model to suppress infection spread under transmission uncertainty. The stability of the controlled system is analyzed using the Lyapunov method, while controller performance is evaluated through deterministic and stochastic simulations. The stability analysis shows that, under the stated conditions, the sliding surface converges asymptotically to zero in the deterministic case, whereas in the stochastic case it is practically bounded in the mean-square sense. Deterministic simulation results show that the peak proportion of infectious individuals decreases from 0.3267 on day 43.6 to 0.0481 on day 25 after control is applied. Stochastic simulations with 200 Monte Carlo realizations show a consistent reduction, with the mean peak decreasing to 0.0477. These results indicate that the adaptive sliding mode control can suppress infection dynamics and maintain control performance under the transmission uncertainty considered.

Keywords: Stochastic Model, Adaptive Sliding Mode Control, Lyapunov, Nipah Virus.

Abstrak

Virus Nipah merupakan patogen zoonotik yang dapat menular antarmanusia dengan dinamika penyebaran yang dipengaruhi oleh ketidakpastian transmisi. Penelitian ini bertujuan menganalisis kestabilan dan merancang kontrol *sliding mode* adaptif pada model SEIR (*susceptible*, *exposed*, *infectious*, dan *removed*) untuk menekan penyebaran infeksi di bawah ketidakpastian transmisi. Analisis kestabilan sistem terkontrol dilakukan menggunakan metode Lyapunov, sedangkan kinerja pengendali dievaluasi melalui simulasi deterministik dan stokastik. Hasil analisis menunjukkan bahwa, pada kondisi yang ditetapkan, permukaan *sliding* pada kasus deterministik dapat menuju nol secara asimtotik, sedangkan pada kasus stokastik terbatas secara praktis dalam arti kuadrat rata-rata. Hasil simulasi deterministik menunjukkan bahwa puncak proporsi individu infeksius menurun dari 0,3267 pada hari ke-43,6 menjadi 0,0481 pada hari ke-25 setelah kontrol diterapkan. Simulasi stokastik dengan 200 realisasi Monte Carlo menunjukkan hasil yang konsisten, dengan puncak rata-rata menurun menjadi 0,0477. Hasil tersebut menunjukkan bahwa

*Corresponding author.
© 2026. Author.
p-ISSN: 2580-6726
e-ISSN: 2598-2133

kontrol *sliding mode* adaptif mampu menekan dinamika infeksi dan mempertahankan kinerja pengendalian pada ketidakpastian transmisi yang dianalisis.

Kata kunci: Model Stokastik, Kontrol Sliding Mode Adaptif, Lyapunov, Virus Nipah.

PENDAHULUAN

Virus Nipah merupakan virus zoonotik yang dapat menular dari hewan kepada manusia melalui kontak dengan hewan terinfeksi atau konsumsi bahan pangan yang terkontaminasi (Grzybek et al., 2026). Kelelawar buah dari famili *Pteropodidae* diketahui sebagai reservoir alaminya, sedangkan penularan antarmanusia dapat terjadi melalui kontak dekat dengan individu yang terinfeksi, termasuk di lingkungan keluarga dan fasilitas pelayanan Kesehatan (Asokan et al., 2026). Infeksi virus Nipah dapat menyebabkan gangguan pernapasan, ensefalitis, dan kematian dengan tingkat fatalitas kasus yang diperkirakan mencapai 40%–75%. Masa inkubasinya umumnya berkisar antara 3 sampai 14 hari, meskipun pada beberapa kasus dapat berlangsung lebih lama (Asokan et al., 2026; S. Khan et al., 2024). Hingga saat ini belum tersedia obat maupun vaksin yang secara khusus disetujui untuk menangani infeksi virus Nipah sehingga deteksi dini, isolasi kasus, pengendalian infeksi, dan perawatan suportif menjadi bagian penting dalam penanganannya (Aditi & Shariff, 2019).

Karakteristik virus Nipah yang memiliki masa inkubasi, tingkat kematian tinggi, dan kemampuan menular antarmanusia menunjukkan perlunya kajian yang dapat menggambarkan dinamika penyebaran penyakit sekaligus mengevaluasi strategi intervensi (M. Y. Khan et al., 2024; Xie et al., 2025). Pemodelan matematika merupakan salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk menjelaskan perubahan jumlah individu pada setiap tahap perkembangan penyakit, mengidentifikasi parameter yang memengaruhi penyebaran, dan memprediksi dampak suatu tindakan pengendalian. Melalui model kompartemen, populasi dapat dikelompokkan berdasarkan status epidemiologinya sehingga mekanisme penularan dan perpindahan individu antarkelompok dapat dinyatakan dalam suatu sistem persamaan diferensial (Boulaaras et al., 2026; Zewdie & Gakkhar, 2020).

Boulaaras et al. (2026) mengembangkan model deterministik penyebaran virus Nipah yang melibatkan tiga populasi, yaitu manusia, kelelawar buah, dan babi. Model tersebut terdiri atas sepuluh kompartemen, meliputi kelompok rentan, terinfeksi, dan sembuh pada masing-masing populasi, serta kompartemen vaksinasi pada manusia (Boulaaras et al., 2026). Model dianalisis melalui sifat nonnegativitas dan keterbatasan solusi, titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, kestabilan lokal dan global, serta simulasi numerik. Struktur *multihost* tersebut mampu menggambarkan hubungan penularan intra dan antarspesies, tetapi belum memasukkan kompartemen terpapar untuk merepresentasikan masa inkubasi serta belum mempertimbangkan ketidakpastian acak pada proses penularan.

Penelitian ini tidak memodelkan seluruh proses penularan antara kelelawar, babi, dan manusia secara eksplisit, tetapi difokuskan pada dinamika penularan antarmanusia setelah terjadinya penularan zoonotik awal. Kejadian *zoonotic spillover* direpresentasikan melalui keberadaan individu terpapar atau terinfeksi pada kondisi awal. Populasi manusia dibagi menjadi kompartemen rentan, terpapar, terinfeksi, dan *removed*. Penambahan kompartemen terpapar diperlukan karena individu yang telah terinfeksi tidak langsung menunjukkan gejala atau menjadi infeksius, tetapi terlebih dahulu melewati masa inkubasi. Oleh karena itu, struktur SEIR (*Susceptible-Exposed-Infected-Removed*) dinilai lebih sesuai daripada model SIR (*Susceptible-Infected-Removed*) untuk menggambarkan perkembangan infeksi virus Nipah pada manusia.

Model deterministik mengasumsikan bahwa nilai parameter dan pola penularan tidak berubah secara acak (Allen, 2010; Raza et al., 2021; Suhika et al., 2025c). Pada kondisi sebenarnya, laju transmisi dapat berfluktuasi akibat perubahan pola kontak, keterlambatan deteksi, variasi kepatuhan terhadap prosedur kesehatan, serta terjadinya kontak yang tidak teramati. Raza et al. (2021) telah mengembangkan model SEIR stokastik virus Nipah dengan memasukkan gerak Brownian untuk menggambarkan ketidakpastian pada dinamika penularan dan mengkaji penyelesaiannya menggunakan beberapa metode numerik. Penelitian tersebut menunjukkan bahwa formulasi stokastik dapat digunakan untuk menggambarkan variasi lintasan epidemi yang tidak dapat direpresentasikan oleh satu lintasan deterministik saja (Raza et al., 2021). Namun, penelitian tersebut lebih difokuskan pada analisis numerik model dan belum merancang strategi kontrol umpan balik untuk mengarahkan populasi terinfeksi menuju tingkat yang diinginkan.

Salah satu metode kontrol yang dapat digunakan untuk menghadapi ketidakpastian model adalah kontrol *sliding mode* (Behera & Bandyopadhyay, 2017; Hu et al., 2021; Ibeas et al., 2013; Poznyak, 2018; Suhika et al., 2025c). Metode tersebut dirancang untuk mengarahkan lintasan sistem menuju suatu permukaan sliding dan mempertahankannya di sekitar permukaan tersebut meskipun terdapat variasi parameter atau gangguan (Suhika et al., 2025c, 2025b). Penerapan kontrol sliding mode pada model epidemiologi telah dikaji untuk mengendalikan wabah penyakit menular melalui kebijakan yang diaktifkan berdasarkan tingkat infeksi (Assegaf et al., 2020; Suhika et al., 2025c). Beberapa penelitian juga mengembangkan kontrol sliding mode adaptif pada model epidemi dengan ketidakpastian parameter (Assegaf et al., 2020; Sharifi & Moradi, 2017; Suhika et al., 2025b). Pendekatan adaptif memungkinkan gain kontrol berubah mengikuti besar penyimpangan sistem sehingga pengendali tidak memerlukan pengetahuan yang tepat mengenai batas ketidakpastian sejak awal.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, model stokastik virus Nipah dan kontrol sliding mode adaptif telah dikaji secara terpisah. Model stokastik virus Nipah yang telah dikembangkan

belum memasukkan strategi kontrol sliding mode adaptif, sedangkan penerapan kontrol tersebut pada model epidemiologi lebih banyak dilakukan untuk penyakit lain. Selain itu, model multihost virus Nipah yang dijadikan rujukan masih bersifat deterministik dan tidak secara khusus mengendalikan penularan antarmanusia setelah kasus zoonotik awal. Berdasarkan literatur yang ditelaah, kondisi tersebut memberikan ruang untuk menggabungkan model SEIR stokastik virus Nipah dengan kontrol sliding mode adaptif yang merepresentasikan peningkatan intensitas deteksi dan isolasi individu terinfeksi.

Kontrol yang dirancang dalam penelitian ini terdiri atas kontrol ekuivalen dan kontrol switching dengan gain adaptif (Alyoussef et al., 2019; Sam et al., 2004; Santos et al., 2022). Kontrol ekuivalen digunakan untuk mengompensasi dinamika nominal model, sedangkan kontrol switching digunakan untuk menghadapi ketidakpastian laju transmisi dan gangguan stokastik (Suhika et al., 2025c, 2025b). *Gain switching* diperbarui berdasarkan jarak lintasan sistem terhadap permukaan sliding. Ketika jumlah individu terpapar dan terinfeksi masih jauh dari target, gain kontrol meningkat untuk memperkuat intervensi (Suhika et al., 2025a). Sebaliknya, ketika lintasan telah berada di sekitar permukaan sliding, gain dikendalikan agar tidak terus meningkat dan menimbulkan perubahan kontrol yang berlebihan. Input kontrol dibatasi sesuai kapasitas intervensi dan diinterpretasikan sebagai peningkatan deteksi kasus, isolasi penderita, pelacakan kontak, dan penerapan pengendalian infeksi.

Penelitian ini bertujuan membentuk model SEIR stokastik penyebaran virus Nipah pada populasi manusia, merancang kontrol *sliding mode* adaptif untuk menurunkan jumlah individu terpapar dan terinfeksi, serta menganalisis kestabilan sistem *closed-loop*. Analisis dilakukan terhadap sifat matematis model deterministik dan stokastik, sedangkan kestabilan sistem terkendali dikaji menggunakan fungsi Lyapunov dan formula Itô. Simulasi numerik digunakan untuk membandingkan dinamika penyebaran tanpa kontrol dan dengan kontrol pada beberapa tingkat gangguan stokastik. Hasil penelitian diharapkan dapat memperkaya pengembangan model epidemiologi stokastik dan memberikan gambaran teoretis mengenai kemampuan strategi deteksi dan isolasi adaptif dalam mengendalikan penyebaran virus Nipah.

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif non-eksperimental dengan pendekatan pemodelan matematika dan simulasi komputasi. Penelitian dilakukan dengan mengembangkan model deterministik SEIR penyebaran virus Nipah menjadi model stokastik, kemudian merancang strategi pengendalian menggunakan kontrol *sliding mode* adaptif (Suhika et al., 2024, 2025c, 2025b,

2025a). Pendekatan analitik digunakan untuk mengkaji sifat-sifat matematis model, antara lain eksistensi dan ketunggalan solusi, nonnegativitas dan keterbatasan solusi, serta kestabilan sistem *closed-loop*. Sementara itu, pendekatan numerik digunakan untuk mengamati dinamika penyebaran penyakit dan mengevaluasi kinerja kontrol pada berbagai kondisi gangguan stokastik. Penelitian ini tidak melibatkan eksperimen langsung terhadap manusia atau hewan. Data yang digunakan merupakan data sekunder dan nilai parameter yang diperoleh dari artikel ilmiah serta sumber epidemiologi yang relevan.

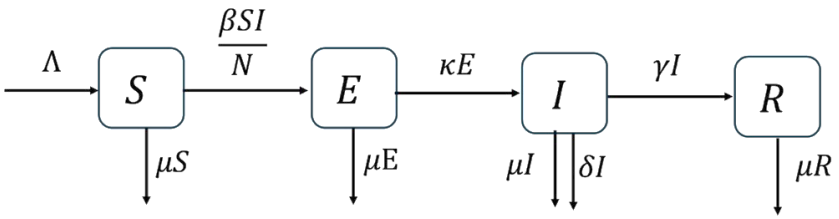
Waktu dan Lokasi Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan Januari 2026 sampai dengan Juli 2026 di Program Studi Matematika, Fakultas Sains, Institut Teknologi Sumatera. Proses penelitian meliputi studi literatur, formulasi model, analisis matematis, perancangan kontrol, pemrograman, dan simulasi numerik.

Populasi dan Sampel

Bagian populasi dan sampel tidak digunakan dalam arti statistik karena penelitian ini tidak melibatkan responden atau pengambilan sampel langsung. Populasi yang dimaksud dalam penelitian ini merupakan populasi matematis yang direpresentasikan melalui variabel-variabel kompartemen. Pada model matematika, populasi dibagi menjadi empat kompartemen, yaitu individu rentan $S(t)$, individu terpapar $E(t)$, individu infeksius $I(t)$, dan individu yang telah keluar dari rantai penularan $R(t)$. Kejadian *zoonotic spillover* direpresentasikan melalui keberadaan individu terpapar atau terinfeksi pada kondisi awal (Boulaaras et al., 2026; Raza et al., 2021). Model dibentuk berdasarkan asumsi berikut.

1. Model penelitian hanya membahas penularan antarmanusia setelah terjadinya *zoonotic spillover*.
2. Populasi dianggap bercampur secara homogen.
3. Individu pada kompartemen E telah terinfeksi, tetapi belum mampu menularkan virus.
4. Individu terpapar berpindah ke kompartemen I dengan laju κ.
5. Individu terinfeksi dapat sembuh dengan laju γ, meninggal akibat penyakit dengan laju δ, atau dipindahkan dari rantai penularan melalui isolasi.
6. Kematian alami terjadi pada setiap kompartemen dengan laju μ.
7. Pada model deterministik, laju transmisi β dianggap konstan.



Gambar 1. Diagram Transmisi Penyebaran Virus Nipah

Berdasarkan asumsi dan diagram transmisi pada Gambar 1, dinamika penyebaran virus Nipah dinyatakan oleh sistem berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \mu S(t), \\
\frac{dE(t)}{dt} &= \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - (\kappa + \mu)E(t), \\
\frac{dI(t)}{dt} &= \kappa E(t) - (\gamma + \delta + \mu)I(t), \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Jumlah populasi manusia yang masih hidup pada waktu t dinyatakan oleh:

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

Tabel 1. Nilai Parameter yang Sesuai dengan Model pada Sistem (1)

Parameter	Keterangan	Nilai	Sumber
$\boldsymbol{\Lambda}$	Laju rekrutmen	0 hari-1	Asumsi pemodelan untuk horizon wabah jangka pendek
$\boldsymbol{\beta}$	Laju transmisi	0,75 hari-1	
$\boldsymbol{\kappa}$	Laju perkembangan dari terpapar menjadi terinfeksi	1/7 hari-1	(Raza et al., 2021; Xie et al., 2025)
$\boldsymbol{\gamma}$	Laju pemulihan atau keluar dari kelas infeksi	1/14 hari-1	(Boulaaras et al., 2026; M. Y. Khan et al., 2024)
$\boldsymbol{\delta}$	Laju kematian akibat penyakit virus Nipah	0,03 hari-1	Boulaaras et al., 2026
$\boldsymbol{\sigma_\beta}$	Intensitas gangguan stokastik	0,08 hari-1/2	Asumsi pemodelan
$\boldsymbol{\mu}$	Laju kematian alami	0 hari-1	Asumsi pemodelan untuk horizon wabah jangka pendek
$\boldsymbol{u_{max}}$	Batas maksimum kontrol	0,80 hari-1	Asumsi

Parameter desain kontrol yang digunakan meliputi $\boldsymbol{c} = 0{,}8$, $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}04$, $\boldsymbol{\rho} = 0{,}005$ dan $\boldsymbol{\phi} = 0{,}001$. Selain itu, batas minimum dan maksimum gain adaptif masing-masing ditetapkan sebesar $K_{min} = 5 \times 10^{-5}$ dan $K_{max} = 2 \times 10^{-2}$, sedangkan $\varepsilon = 10^{-5}$ digunakan untuk menghindari

singularitas ketika $I(t)$ mendekati nol. Nilai referensi pada permukaan *sliding* ditetapkan sebesar $I_d(t) = 0{,}005$.

Prosedur Penelitian

Penelitian dilakukan melalui beberapa tahapan berikut.

Tahap 1. Tahap awal dilakukan dengan menelaah artikel ilmiah mengenai epidemiologi virus Nipah (Aditi & Shariff, 2019; Boulaaras et al., 2026; M. Y. Khan et al., 2024; Raza et al., 2021; Xie et al., 2025; Zewdie & Gakkhar, 2020), model kompartemen SEIR (Raza et al., 2021), persamaan diferensial stokastik (Mohammad & Kamrujjaman, 2025; Raza et al., 2021; Suhika et al., 2025c), dan kontrol *sliding mode* adaptif (Suhika et al., 2025c, 2025b). Studi literatur digunakan untuk menentukan asumsi model, struktur kompartemen, parameter epidemiologi, bentuk gangguan stokastik, dan strategi kontrol yang sesuai.

Tahap 2. Formulasi model deterministik tanpa kontrol dan dengan kontrol.

Tahap 3. Formulasi model stokastik. Model deterministik dikembangkan menjadi model stokastik dengan memberikan perturbasi Brownian pada laju transmisi (Suhika et al., 2025c, 2025b). Gangguan stokastik digunakan untuk menggambarkan perubahan acak pola kontak, keterlambatan deteksi, penularan di fasilitas kesehatan, dan ketidakpastian jumlah kontak efektif. Model stokastik dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial stokastik Itô (Suhika et al., 2025c). Suku stokastik yang sama diberikan pada kompartemen rentan dan terpapar dengan tanda berlawanan agar fluktuasi individu yang keluar dari kompartemen rentan sama dengan individu yang masuk ke kompartemen terpapar.

Tahap 4. Perancangan kontrol *sliding mode* adaptif atau *adaptive sliding mode control* (ASMC). Permukaan sliding dibentuk menggunakan kombinasi populasi terpapar dan terinfeksi, yaitu $s(t) = cE(t) + I(t) - I_d(t)$. Kontrol terdiri atas kontrol ekuivalen dan komponen switching adaptif. Kontrol ekuivalen digunakan untuk mengompensasi dinamika nominal model, sedangkan komponen switching digunakan untuk mengatasi ketidakpastian parameter dan gangguan (Suhika et al., 2025c). Gain switching diperbarui menggunakan hukum adaptasi berdasarkan besar penyimpangan terhadap permukaan sliding. Kontrol kemudian dibatasi agar memenuhi $0 \leq u(t) \leq u_{\max}$.

Tahap 5. Analisis kestabilan sistem dengan kontrol. Kestabilan sistem dengan kontrol dianalisis menggunakan fungsi Lyapunov dan generator infinitesimal Itô. Analisis dilakukan untuk memperoleh kondisi yang menjamin keterbatasan stokastik atau kestabilan praktis stokastik dari permukaan sliding. Fungsi Lyapunov yang digunakan dapat berbentuk $V(s, K) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2\rho}(K - K^*)^2$. Selanjutnya, operator generator Itô digunakan untuk menunjukkan bahwa lintasan

sistem diarahkan menuju suatu lingkungan kecil di sekitar permukaan sliding (Suhika et al., 2025c, 2025b).

Tahap 6. Simulasi numerik dilakukan untuk membandingkan beberapa kondisi, yaitu scenario model deterministik tanpa dan dengan kontrol serta model stokastik tanpa dan dengan kontrol.

Data, Intrumen, dan Teknik Pengumpulan Data

Data dikumpulkan menggunakan teknik dokumentasi dan studi literatur. Pengumpulan data dilakukan dengan tahapan berikut:

1. Menelaah artikel utama mengenai model matematika penyebaran virus Nipah (Aditi & Shariff, 2019; Asokan et al., 2026; Boulaaras et al., 2026; M. Y. Khan et al., 2024; Xie et al., 2025; Zewdie & Gakkhar, 2020);
2. Mengidentifikasi struktur kompartemen, variabel, parameter, nilai awal, dan hasil simulasi yang tersedia;
3. Menyeleksi parameter yang sesuai dengan model SEIR;
4. Mengumpulkan informasi masa inkubasi, durasi infeksi, tingkat pemulihan, dan tingkat kematian dari artikel epidemiologi atau sumber kesehatan resmi;
5. Menyusun tabel parameter beserta nilai, satuan, dan sumbernya;
6. Menentukan parameter stokastik dan parameter kontrol melalui skenario simulasi dan uji sensitivitas.

Teknik dokumentasi digunakan karena penelitian tidak melakukan pengukuran langsung atau pengumpulan data dari responden. Penelitian ini tidak melibatkan virus hidup, pengambilan sampel biologis, eksperimen pada manusia, maupun hewan. Jadi, tidak terdapat risiko penularan atau bahaya biologis selama penelitian hanya dilakukan melalui kajian literatur dan simulasi MATLAB.

Teknik Analisis Data

Analisis dilakukan melalui pendekatan analitik dan numerik. Analisis matematis dalam penelitian ini meliputi analisis kestabilan pada model deterministik, analisis eksistensi dan ketunggalan solusi pada model stokastik, serta analisis kestabilan sistem *closed-loop* menggunakan fungsi Lyapunov dan formula Itô (Suhika et al., 2025b; Tottori & Kobayashi, 2023; Zhu et al., 2021). Sistem deterministik diselesaikan menggunakan metode Runge–Kutta orde empat atau metode numerik yang sesuai. Sistem stokastik diselesaikan menggunakan metode Euler–Maruyama (Poznyak, 2018; Suhika et al., 2025c):

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n, u_n)\Delta t + g(X_n)\Delta W_n,$$

dengan $\Delta W_n \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$. Simulasi dilakukan untuk sejumlah lintasan, yaitu 200 realisasi agar diperoleh nilai rata-rata dan variasi hasil. Hasil model tanpa kontrol dan dengan kontrol dibandingkan berdasarkan penurunan puncak infeksi, penurunan total kasus, waktu mencapai target, besar kontrol yang digunakan, dan kemampuan sistem menghadapi perubahan intensitas gangguan stokastik.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini mengembangkan model SEIR stokastik untuk menggambarkan penyebaran virus Nipah pada populasi manusia setelah terjadinya penularan dari hewan kepada manusia atau *zoonotic spillover*. Berbeda dengan model (Boulaaras et al., 2026) yang melibatkan populasi manusia, kelelawar, dan babi, penelitian ini difokuskan pada dinamika penularan antarmanusia setelah kasus zoonotik awal terjadi. Oleh karena itu, populasi kelelawar dan babi tidak dimasukkan secara eksplisit ke dalam model, sedangkan kejadian *zoonotic spillover* direpresentasikan melalui keberadaan individu terpapar atau terinfeksi pada kondisi awal. Kompartemen terpapar atau *exposed* ditambahkan untuk mengakomodasi masa inkubasi virus Nipah sehingga struktur model yang digunakan adalah SEIR. Ketidakpastian akibat perubahan pola kontak dan laju transmisi direpresentasikan melalui komponen stokastik. Selanjutnya, strategi pengendalian dirancang menggunakan kontrol *sliding* mode adaptif, dengan input kontrol, $u(t)$, berupa peningkatan intensitas deteksi dan isolasi individu yang terinfeksi.

Formulasi Model Stokastik

Sebagai tahap awal, model SEIR deterministik pada Persamaan (1) dikembangkan dengan menambahkan input kontrol $u(t)$. Model deterministik dengan kontrol tersebut dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \mu S(t), \\
\frac{dE(t)}{dt} &= \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - (\kappa + \mu)E(t), \\
\frac{dI(t)}{dt} &= \kappa E(t) - \big(\gamma + \delta + \mu + u(t)\big)I(t), \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \big(\gamma + u(t)\big)I(t) - \mu R(t).
\end{aligned} \tag{2}$$

Pada sistem (2), kontrol $u(t)$ meningkatkan laju keluarnya individu dari kompartemen $I(t)$ menuju kompartemen $R(t)$. Dengan demikian, semakin besar intensitas deteksi dan isolasi, semakin cepat individu infeksius dikeluarkan dari rantai penularan. Kontrol memenuhi batas $0 \le u(t) \le u_{\max}$, dengan $t \in [0, T]$. Himpunan kontrol yang diperbolehkan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{u|: [0, T] \to \mathbb{R} \;\; u \text{ terukur dan } 0 \le u(t) \le u_{\max}\}$$

Dengan menjumlahkan persamaan dalam sistem (2), diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) - \delta I(t).$$

Kontrol tidak mengubah jumlah populasi total karena individu yang diisolasi hanya berpindah dari kelas I menuju kelas R. Selanjutnya, Ketidakpastian dimasukkan pada proses penularan. Secara formal, laju transmisi mengalami perturbasi (Allen, 2010; Higham, 2001):

$$\beta\, dt \longrightarrow \beta\, dt + \sigma_\beta E(t) dW(t) \tag{3}$$

dengan $W(t)$ merupakan proses Wiener standar dan $\sigma_\beta > 0$ merupakan intensitas gangguan stokastik. Faktor $E(t)$ digunakan agar koefisien difusi menghilang ketika kompartemen exposed mencapai batas $E(t) = 0$, sehingga sifat nonnegatif model dapat dipertahankan.

Model SEIR stokastik dengan kontrol diberikan oleh sistem persamaan diferensial stokastik Itô berikut:

$$\begin{aligned}
dS(t) &= \left[\Lambda - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \mu S(t)\right] dt - \sigma_\beta \frac{E(t)S(t)I(t)}{N(t)}\, dW(t) \\
dE(t) &= \left[\beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - (\kappa + \mu)E(t)\right] dt + \sigma_\beta \frac{E(t)S(t)I(t)}{N(t)}\, dW(t) \\
dI(t) &= \left[\kappa E(t) - \big(\gamma + \delta + \mu + u(t)\big)I(t)\right] dt \\
dR(t) &= \left[\big(\gamma + u(t)\big)I(t) - \mu R(t)\right] dt
\end{aligned} \tag{4}$$

Pemilihan koefisien difusi yang bergantung pada E(t) menyebabkan suku stokastik menghilang ketika $E(t) = 0$. Pada batas $S(t) = 0$, suku difusi juga bernilai nol dan bagian drift memenuhi $\Lambda \geq 0$. Pada batas $E(t) = 0$, bagian drift memenuhi $\beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \geq 0$. Selanjutnya, pada batas $I(t) = 0$ dan $R(t) = 0$, bagian drift masing-masing memenuhi $\kappa E(t) \geq 0$ dan $\big(\gamma + u(t)\big)I(t) \geq 0$. Dengan demikian, dinamika sistem tidak mengarahkan solusi keluar dari daerah nonnegatif sehingga setiap kompartemen tetap memiliki interpretasi biologis yang sesuai.

Penggunaan proses Wiener yang sama dengan tanda berlawanan pada persamaan $S(t)$ dan $E(t)$ menunjukkan bahwa fluktuasi jumlah infeksi baru yang keluar dari kompartemen rentan akan masuk ke kompartemen terpapar dalam jumlah yang sama. Oleh karena itu, gangguan stokastik hanya memengaruhi perpindahan individu antarkompartemen dan tidak mengubah jumlah populasi total secara langsung. Untuk merumuskan kontrol pada sistem stokastik (4), terlebih dahulu ditentukan ruang probabilitas dan himpunan kontrol yang diperbolehkan. Hal ini diperlukan agar kontrol $u(t)$ hanya bergantung pada informasi yang tersedia hingga waktu t dan tetap memenuhi batas kapasitas intervensi.

Definisi 1. Misalkan $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ merupakan ruang probabilitas lengkap dengan filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Himpunan kontrol yang diperbolehkan didefinisikan sebagai berikut:

$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{u | : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}\ \ u(t)$ teradaptasi terhadap $\mathcal{F}_t$ dan $0 \le u(t) \le u_{\max}$ hampir pasti$\}$.

Setiap $u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ disebut kontrol yang diperbolehkan.

Lema 1. Misalkan kondisi awal memenuhi $S(0), E(0), I(0), R(0) \ge 0$ dan $N(0) > 0$. Untuk parameter model yang bernilai nonnegatif dan kontrol $0 \le u(t) \le u_{max}$, sistem stokastik (4) mempunyai solusi kuat yang tunggal dan tetap berada pada daerah nonnegatif selama interval pengamatan. Selain itu, $N(t) > 0$ untuk setiap $t \ge 0$.

Bukti. Koefisien drift dan difusi pada sistem (4) bersifat *locally Lipschitz* pada daerah $N(t) > 0$ sehingga menjamin eksistensi dan ketunggalan solusi lokal. Berdasarkan bentuk koefisien difusi yang telah dipilih, suku stokastik menghilang pada batas $S = 0$ dan $E = 0$, sedangkan komponen drift pada setiap batas kompartemen mengarah ke daerah nonnegatif. Oleh karena itu, solusi tetap berada pada ortan nonnegatif.

Dengan menjumlahkan seluruh persamaan pada sistem (4), diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) - \delta I(t).$$

Karena $0 \le I(t) \le N(t)$, maka

$$\frac{dN(t)}{dt} \ge \Lambda - (\mu\ +\ \delta)N(t).$$

Berdasarkan prinsip perbandingan diperoleh

$$N(t) \ge\ N(0)e^{\{-(\mu+\delta)t\}}\ + \frac{\Lambda}{\mu+\delta}[1\ -\ e^{\{-(\mu+\delta)t\}}],$$

untuk $\mu + \delta > 0$. Karena $N(0) > 0$ dan $\Lambda \ge 0$, maka $N(t) > 0$ untuk setiap $t \ge 0$.Untuk batas atas, karena $I(t) \ge 0$, sehingga $\frac{dN(t)}{dt} \le \Lambda - \mu N(t)$. Jika $\mu > 0$, maka

$$N(t) \le max\left\{N(0), \frac{\Lambda}{\mu}\right\}.$$

Dengan demikian, solusi tetap terbatas dan tidak mengalami *finite-time explosion*. Oleh karena itu, solusi lokal dapat diperpanjang menjadi solusi global pada interval pengamatan. ■

Perancangan Kontrol *Sliding Mode* Adaptif atau Adaptif Sliding Mode Control (ASMC)

Setelah model stokastik dan himpunan kontrol yang diperbolehkan dirumuskan, tahap berikutnya adalah merancang kontrol *sliding mode* adaptif. Tujuan pengendalian adalah menurunkan jumlah individu terpapar dan terinfeksi menuju tingkat yang dapat ditangani oleh sistem pelayanan kesehatan. Misalkan $I_d(t)$ menyatakan jumlah individu terinfeksi yang diinginkan. Karena individu pada kompartemen $E(t)$ berpotensi menjadi infeksius, permukaan sliding dibentuk dengan melibatkan kedua kompartemen tersebut. Kontrol $u(t)$ dirancang sebagai gabungan kontrol ekuivalen dan kontrol switching, yaitu $u(t) = u_{\text{eq}}(t) + u_{\text{s}}(t)$ (Assegaf et al., 2020; Suhika et al., 2025b).

Definisi 2. Permukaan sliding didefinisikan sebagai

$$s(t) = cE(t) + I(t) - I_d(t), \tag{5}$$

dengan $c > 0$ merupakan konstanta pembobot dan $I_d(t) \geq 0$ merupakan lintasan target jumlah individu terinfeksi. Himpunan $\mathcal{S} = \{(S, E, I, R)| \in \mathbb{R}^4 \;\; cE + I - I_d = 0\}$ disebut permukaan *sliding*.

Selanjutnya, untuk mengurangi fenomena *chattering*, didefinisikan pula lapisan batas

$$\mathcal{S}_\phi = \{(S, E, I, R)| \in \mathbb{R}^4 | cE + I - I_d| \leq \phi\} \tag{6}$$

dengan $\phi > 0$. Berdasarkan Definisi 2, diperoleh

$$ds(t) = c\, dE(t) + dI(t) - \dot{I}_d(t)\, dt. \tag{7}$$

dengan $\dot{I}_d(t)$ menyatakan turunan $I_d(t)$ terhadap waktu. Dengan menyubstitusikan persamaan $dE(t)$ dan $dI(t)$ dari sistem (4), diperoleh

$$\begin{aligned} ds(t) = [&c\beta \tfrac{S(t)I(t)}{N(t)} + \big(\kappa - c(\kappa + \mu)\big)E(t) \\ &- (\gamma + \delta + \mu)I(t) - u(t)I(t) - \dot{I}_d(t)]dt \\ &+ c\sigma_\beta \tfrac{E(t)S(t)I(t)}{N(t)}\, dW(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Misalkan $\hat{\beta}$ merupakan nilai nominal laju transmisi dan $\beta = \hat{\beta} + \tilde{\beta}$, dengan $\tilde{\beta}$ menyatakan ketidakpastian laju transmisi. Selanjutnya, didefinisikan $\Delta(t) = c\tilde{\beta}\, \frac{S(t)I(t)}{N(t)}$ dan $G(t) = c\sigma_\beta \frac{E(t)S(t)I(t)}{N(t)}$. Dengan demikian, dinamika permukaan sliding persamaan (8) menjadi

$$\begin{aligned} ds(t) = [&c\hat{\beta} \tfrac{S(t)I(t)}{N(t)} + \big(\kappa - c(\kappa + \mu)\big)E(t) \\ &- (\gamma + \delta + \mu)I(t) - u(t)I(t) - \dot{I}_d(t) + \Delta(t)]dt \\ &+ G(t)\, dW(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Dinamika nominal permukaan sliding dipilih sebagai $\dot{s}(t) = -\lambda s(t)$, $\lambda > 0$. Untuk menghindari singularitas ketika $I(t)$ mendekati nol, didefinisikan

$$I_\varepsilon(t) = \max\{I(t), \varepsilon\}, \; \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Kontrol ekuivalen kemudian dirumuskan:

$$\begin{aligned} u_{\text{eq}}(t) = \tfrac{1}{I_\varepsilon(t)} [&c\hat{\beta} \tfrac{S(t)I(t)}{N(t)} + \big(\kappa - c(\kappa + \mu)\big)E(t) \\ &-(\gamma + \delta + \mu)I(t) - \dot{I}_d(t) + \lambda s(t)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Komponen switching dirancang sebagai berikut:

$$u_{\text{sw}}(t) = \tfrac{K(t)}{I_\varepsilon(t)} \text{sat}\left(\tfrac{s(t)}{\phi}\right), \tag{12}$$

dengan fungsi saturasi

$$\text{sat}\left(\tfrac{s}{\phi}\right) = \begin{cases} 1, & s > \phi, \\ \frac{s}{\phi}, & |\, s\, | \leq \phi, \\ -1, & s < -\phi. \end{cases} \tag{13}$$

Berdasarkan persamaan (11) dan (12) diperoleh kontrol *sliding mode* adaptif sebagai berikut:

$$u(t) = \text{Proj}_{[0,u_{max}]}\left[u_{\text{eq}}(t) + \frac{K(t)}{I_\varepsilon(t)}\text{sat}\left(\frac{s(t)}{\phi}\right)\right]. \tag{14}$$

Gain switching diperbarui menggunakan hukum adaptasi

$$\dot{K}(t) = \rho|s(t)| - v(K(t) - K_{min}),\ K(0) \geq K_{min} > 0, \tag{15}$$

dengan $\rho > 0$ merupakan laju adaptasi.

Asumsi 1. Misalkan terdapat konstanta $\bar{\Delta} > 0$ dan $\bar{G} > 0$ sehingga

$$|\Delta(t)| \leq \bar{\Delta},\ |G(t)| \leq \bar{G},\ t \geq 0. \tag{16}$$

Nilai $\bar{\Delta}$ tidak harus diketahui oleh pengendali karena gain $K(t)$ diperbarui secara adaptif.

Teorema 1. Misalkan permukaan sliding diberikan oleh persamaan (5) dan kontrol $u(t)$ diberikan oleh persamaan (14). Jika operator proyeksi pada persamaan (14) tidak aktif dan $I(t) \geq \varepsilon$, maka dinamika permukaan *sliding* sistem *closed-loop* memenuhi

$$ds(t) = \left[\Delta(t) - \lambda s(t) - K(t)\,\text{sat}\left(\frac{s(t)}{\phi}\right)\right]dt + G(t)\,dW(t) \tag{17}$$

Bukti. Berdasarkan definisi permukaan sliding pada persamaan (5), diperoleh

$$ds(t) = c\,dE(t) + dI(t) - \dot{I}_d(t)\,dt.$$

Dengan menyubstitusikan persamaan $dE(t)$dan $dI(t)$dari model stokastik, diperoleh

$$\begin{aligned} ds(t) = [&c\hat{\beta}\tfrac{S(t)I(t)}{N(t)} + \big(\kappa - c(\kappa+\mu)\big)E(t) \\ &- (\gamma+\delta+\mu)I(t) - u(t)I(t) - \dot{I}_d(t) + \Delta(t)]dt \\ &+ G(t)\,dW(t). \end{aligned} \tag{18}$$

Karena kontrol belum mengalami saturasi atau Karena operator proyeksi pada persamaan (14) tidak aktif

dan $I(t) \geq \varepsilon$, maka $I_\varepsilon(t) = I(t)$. Dengan demikian, kontrol pada persamaan (14) dapat dituliskan sebagai berikut

$$u(t) = u_{\text{eq}}(t) + \frac{K(t)}{I(t)}\text{sat}\left(\frac{s(t)}{\phi}\right).$$

Dengan menyubstitusikan kontrol tersebut ke dalam persamaan (18), diperoleh

$$u(t)I(t) = u_{eq}(t)I(t) + K(t)sat\left(\frac{s(t)}{\phi}\right).$$

Berdasarkan definisi $u_{eq}(t)$ pada persamaan (11), bagian nominal pada dinamika permukaan sliding dikompensasi oleh $u_{eq}(t)$, sehingga diperoleh

$$ds(t) = \left[\Delta(t) - \lambda s(t) - K(t)\,\text{sat}\left(\frac{s(t)}{\phi}\right)\right]dt + G(t)\,dW(t).$$

Dengan demikian, dinamika permukaan sliding sistem *closed-loop* memenuhi persamaan (17). ■

Analisis Kestabilan Model Stokastik

Definisi 3. (Suhika et al., 2025c) Permukaan sliding dikatakan stabil secara praktis stokastik dalam arti kuadrat rata-rata apabila terdapat suatu konstanta $r > 0$ sehingga

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}[s^2(t)] \le r^2. \tag{19}$$

Definisi 3 menunjukkan bahwa lintasan sistem tidak harus tepat mencapai $s(t) = 0$, tetapi tetap berada dalam suatu lingkungan terbatas di sekitar nol dalam arti kuadrat rata-rata.

Untuk mempermudah analisis teoretis, fungsi saturasi pada persamaan (17) terlebih dahulu diganti dengan fungsi signum. Dengan demikian, dinamika sliding ideal diberikan oleh

$$ds(t) = \big[\Delta(t) - \lambda s(t) - K(t)\text{sign}\big(s(t)\big)\big]dt + G(t)\, dW(t) \tag{20}$$

Fungsi saturasi tetap digunakan pada simulasi numerik untuk mengurangi fenomena *chattering* (Alyoussef et al., 2019; Suhika et al., 2025c).

Berdasarkan batas ketidakpastian pada Asumsi 1 dan hukum adaptasi gain yang telah dirumuskan. Selanjutnya, dilakukan analisis kestabilan praktis stokastik permukaan *sliding* pada sistem *closed-loop*. Hasil analisis tersebut dinyatakan dalam Teorema 2 berikut.

Teorema 2. Misalkan dinamika permukaan sliding diberikan oleh persamaan (20), sedangkan gain adaptif memenuhi persamaan (15). Selain itu, misalkan Asumsi 1 berlaku dan terdapat konstanta K^* yang memenuhi $K^* > \bar{\Delta}$. Maka permukaan sliding sistem *closed-loop* terbatas secara praktis stokastik dalam arti kuadrat rata-rata. Lebih lanjut, jika $\alpha = min\{2\lambda, \nu\}$ dan $C = \frac{1}{2}\bar{G}^{\,2} + \frac{\nu}{2\rho}(K^* - K_{min})^2$,

maka berlaku $\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}[s^2(t)] \le \frac{2C}{\alpha}$.

Bukti. Pilih fungsi Lyapunov stokastik sebagai berikut (Suhika et al., 2025c):

$$V(s, K) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2\rho}(K - K^*)^2$$

Berdasarkan formula Itô (Allen, 2010; Moghadam & Kebriaei, 2020), generator infinitesimal dari fungsi V diberikan oleh

$$\mathcal{L}V = s[\Delta - \lambda s - K\text{sign}(s)] + \frac{1}{2}G^2 + \frac{K-K^*}{\rho}\dot{K} \tag{21}$$

Dengan menggunakan hukum adaptasi pada persamaan (19), diperoleh

$$\mathcal{L}V = s\Delta - \lambda s^2 - K \mid s \mid + \frac{1}{2}G^2 + (K - K^*) \mid s \mid - \frac{\nu}{\rho}(K - K^*)(K - K_{\min})$$

Karena $-K|s| + (K - K^*)|s| = -K^*|s|$, maka

$$\mathcal{L}V = s\Delta - \lambda s^2 - K^*|s| + \frac{1}{2}G^2 - \frac{\nu}{\rho}(K - K^*)(K - K_{\min})$$

Selanjutnya, $s\Delta \le |s||\Delta| \le \bar{\Delta}\,|s|$. Selain itu,

$$-\frac{\nu}{\rho}(K-K^*)(K-K_{\min}) \le -\frac{\nu}{2\rho}(K-K^*)^2 + \frac{\nu}{2\rho}(K^*-K_{\min})^2$$

Dengan menggunakan $| G(t) | \le \bar{G}$, diperoleh

$$\mathcal{L}V \le -\lambda s^2 - (K^*-\bar{\Delta}) \mid s \mid -\frac{\nu}{2\rho}(K-K^*)^2 + \frac{1}{2}\bar{G}^{\,2} + \frac{\nu}{2\rho}(K^*-K_{\min})^2$$

Karena $K^* > \bar{\Delta}$, suku $-(K^*-\bar{\Delta})|s|$ bersifat nonpositif. Dengan mengabaikan suku tersebut, diperoleh

$$\mathcal{L}V \le -\lambda s^2 - \frac{\nu}{2\rho}(K-K^*)^2 + C. \tag{22}$$

Berdasarkan definisi V dan $\alpha = \min\{2\lambda, \nu\}$, pertidaksamaan (22) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathcal{L}V \le -\alpha V + C \tag{23}$$

Dengan menggunakan formula Dynkin (Orlovskyi et al., 2025), diperoleh

$$\mathbb{E}[V(t)] \le e^{-\alpha t}V(0) + \frac{C}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}).$$

Akibatnya, $\limsup_{t\to\infty}\mathbb{E}[V(t)] \le \frac{C}{\alpha}$. Karena $\frac{1}{2}s^2(t) \le V(t)$, maka $\limsup_{t\to\infty}\mathbb{E}[s^2(t)] \le \frac{2C}{\alpha}$. Dengan demikian, permukaan sliding terbatas secara praktis stokastik dalam arti kuadrat rata-rata. ■

Pada implementasi numerik, fungsi signum diganti dengan fungsi saturasi untuk mengurangi fenomena *chattering*. Untuk fungsi saturasi pada persamaan (13) berlaku $s\ sat\left(\frac{s}{\phi}\right) \ge |s| - \frac{\phi}{4}$. Dengan menggunakan fungsi saturasi, suku $-K|s|$ pada analisis Lyapunov berubah sehingga memenuhi

$$-K\ s\ sat\left(\frac{s}{\phi}\right) \le -K|s| + \frac{K\phi}{4}.$$

Jika gain adaptif dibatasi oleh $K(t) \le K^*$, maka dengan langkah analisis yang sama seperti pada Teorema 2 diperoleh

$$\mathcal{L}V \le -\alpha V + \ C + \frac{K^*\phi}{4}.$$

Oleh karena itu,

$$\limsup_{t\to\infty}\mathbb{E}[s^2(t)] \le \frac{2}{\alpha}\left(C + \frac{K^*\phi}{4}\right), t \to \infty$$

Hasil tersebut menunjukkan bahwa penggunaan fungsi saturasi tetap menjamin keterbatasan praktis stokastik permukaan *sliding*, tetapi menghasilkan tambahan batas galat yang bergantung pada lebar lapisan batas ϕ. Semakin kecil nilai ϕ, semakin kecil tambahan batas galat, tetapi kecenderungan terjadinya *chattering* semakin besar. Oleh karena itu, pemilihan ϕ merupakan kompromi antara ketelitian pelacakan permukaan *sliding* dan kehalusan sinyal kontrol.

Korolari 1. Jika $\sigma_\beta = 0$, maka $G(t) = 0$. Jika selanjutnya dipilih $K_{min} = K^*$, maka $C = 0$ dan pertidaksamaan (23) menjadi $\mathcal{L}V \leq -\alpha V$. Oleh karena itu, $\mathbb{E}[V(t)] \leq e^{-\alpha t}V(0)$, sehingga $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$.

Dengan demikian, pada kasus deterministik tanpa gangguan stokastik, lintasan sistem mencapai permukaan sliding secara asimtotik $s(t) = 0$.

Teorema 2 menunjukkan bahwa ketika gangguan stokastik bekerja, permukaan *sliding* tetap terbatas dan berada dalam suatu lingkungan di sekitar nol. Besarnya lingkungan tersebut dipengaruhi oleh intensitas gangguan stokastik dan parameter pengendali. Sementara itu, Korolari 1 menunjukkan bahwa pada kasus deterministik tanpa gangguan stokastik, permukaan *sliding* dapat menuju nol secara asimtotik berdasarkan kondisi yang ditetapkan.

Selanjutnya, berdasarkan definisi permukaan *sliding* pada persamaan (5), berlaku

$$cE(t) + I(t) = I_d(t) + s(t).$$

Karena $E(t) \geq 0$ dan $I(t) \geq 0$, maka diperoleh $I(t) \leq I_d(t) + |s(t)|$ dan $E(t) \leq \frac{[I_d(t)+|s(t)|]}{c}$. Dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy–Schwarz, diperoleh

$$\mathbb{E}[|s(t)|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[s^2(t)]}.$$

Oleh karena itu, keterbatasan kuadrat rata-rata permukaan *sliding* memberikan batas terhadap nilai harapan kompartemen terpapar dan infeksius. Jika $\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}[s^2(t)] \leq B$ dengan $B = \frac{2}{\alpha}\left(C + \frac{K^*\phi}{4}\right)$, maka untuk lintasan target konstan I_d diperoleh $\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}[I(t)] \leq I_d + \sqrt{B}$ dan $\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}[E(t)] \leq \left(I_d + \sqrt{B}\right)/c$. Pada simulasi digunakan lintasan target konstan $I_d(t) = 0{,}005$ sebagai nilai referensi bagi kombinasi $cE(t) + I(t)$ pada permukaan *sliding*. Dengan demikian, keterbatasan permukaan *sliding* tidak hanya menunjukkan sifat kestabilan secara matematis, tetapi juga memberikan batas terhadap dinamika individu terpapar dan infeksius sesuai dengan tujuan pengendalian.

Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk menggambarkan dinamika penyebaran virus Nipah dan mengevaluasi kinerja kontrol *sliding mode* adaptif / *adaptive sliding mode control* (ASMC). Sistem deterministik diselesaikan menggunakan metode Runge–Kutta orde empat, sedangkan sistem stokastik diselesaikan menggunakan metode Euler–Maruyama. Untuk sistem stokastik umum (Allen, 2010; Ghosh et al., 2023; Higham, 2001; Moghadam & Kebriaei, 2020; Suhika et al., 2025c):

$$dX(t) = f\big(X(t), u(t)\big)\,dt + g\big(X(t)\big)\,dW(t),$$

diskretisasi Euler–Maruyama diberikan oleh

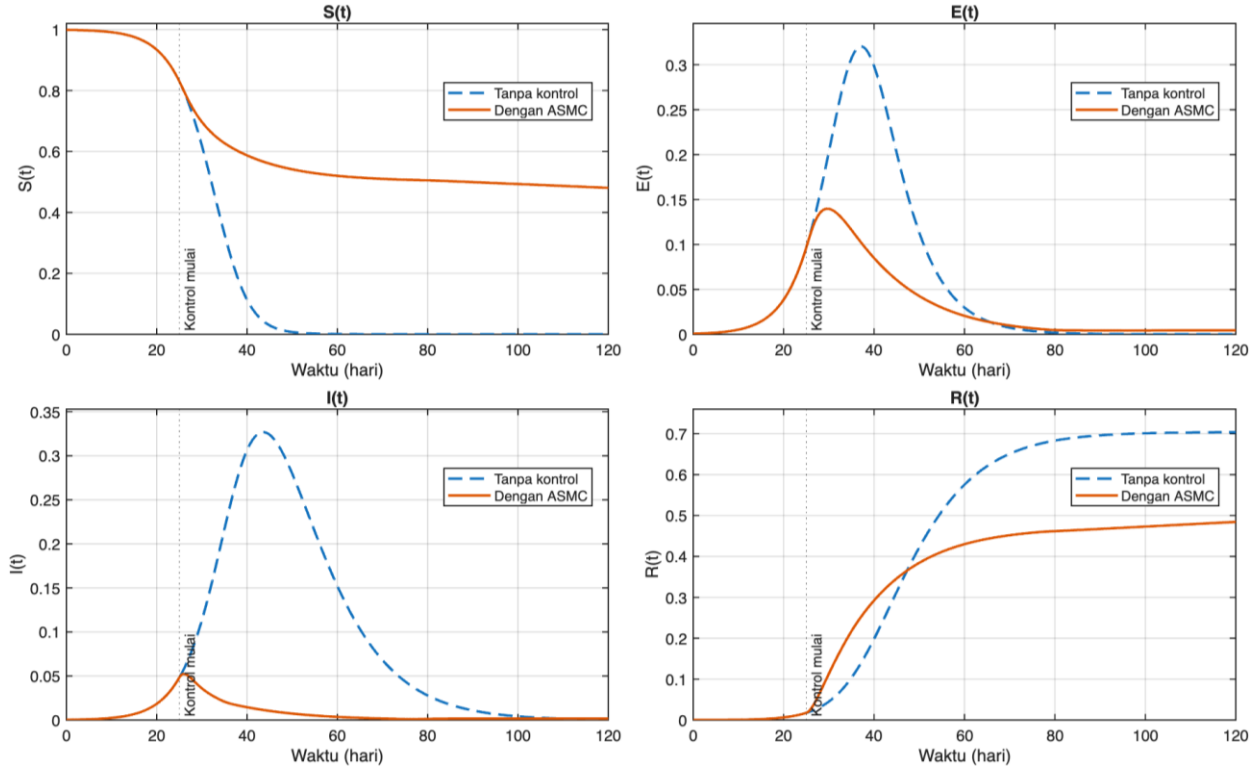
$$X_{n+1} = X_n + f(X_n, u_n)\Delta t + g(X_n)\Delta W_n,$$

dengan $\Delta W_n = \sqrt{\Delta t}\, Z_n$, $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ dan Δt merupakan ukuran langkah waktu, sedangkan Z_n merupakan peubah acak berdistribusi normal standar. Simulasi stokastik dilakukan untuk sejumlah lintasan atau realisasi agar pengaruh gangguan acak terhadap dinamika penyakit dapat diamati secara lebih representatif.

Nilai parameter epidemiologi diperoleh dari beberapa rujukan (Boulaaras et al., 2026; M. Y. Khan et al., 2024; S. Khan et al., 2024; Raza et al., 2021; Xie et al., 2025) seperti pada Tabel 1. Laju transmisi $\beta = 0{,}75$ hari^{-1} mengacu pada nilai laju infeksi antarmanusia yang digunakan dalam penelitian terdahulu mengenai virus Nipah (Boulaaras et al., 2026), sedangkan laju perkembangan individu terpapar menjadi infeksius ditetapkan sebesar $\kappa = \frac{1}{7}$ hari^{-1}, yang merepresentasikan masa inkubasi rata-rata sekitar 7 hari (Raza et al., 2021; Xie et al., 2025). Laju pemulihan $\gamma = \frac{1}{4}$ hari^{-1} $\approx 0{,}0714$ hari^{-1} yang merepresentasikan periode pemulihan dasar sekitar 14 hari. Namun, pada model yang digunakan, individu tidak hanya keluar dari kompartemen I melalui proses pemulihan, tetapi juga melalui kematian akibat penyakit dan intervensi kontrol. Oleh karena itu, laju keluar total dari kompartemen infeksius diberikan oleh $\gamma + \delta + \mu + u(t)$, sehingga waktu tinggal efektif pada kompartemen I dipengaruhi oleh seluruh mekanisme tersebut dan tidak hanya ditentukan oleh γ (Boulaaras et al., 2026; M. Y. Khan et al., 2024). Parameter lainnya, seperti laju kematian akibat penyakit $\delta = 0{,}03$ hari^{-1}, disesuaikan dengan struktur model yang digunakan dalam penelitian ini.

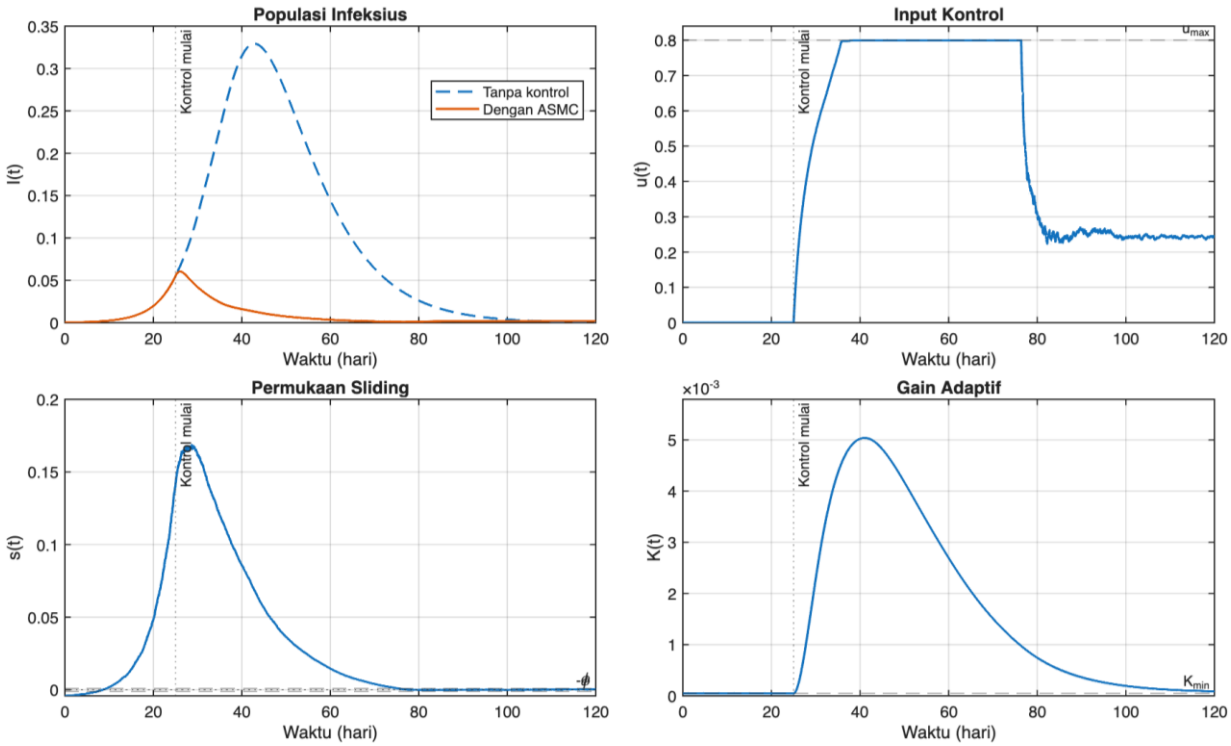
Simulasi dilakukan selama 120 hari dengan kondisi awal $S(0) = 0{,}9990, E(0) = 0{,}0007, I(0) = 0{,}0003,$ dan $R(0) = 0$. Seluruh variabel keadaan dinyatakan sebagai proporsi terhadap populasi awal sehingga $S(0) + E(0) + I(0) + R(0) = 1$. Model deterministik diselesaikan menggunakan metode Runge–Kutta orde empat, sedangkan model stokastik diselesaikan menggunakan metode Euler–Maruyama dengan langkah waktu $\Delta t = 0{,}02$ hari. Parameter desain kontrol yang digunakan adalah $c = 0{,}80$, $\lambda = 0{,}04, \rho = 0{,}005, \nu = 0{,}08, \phi = 0{,}001, K_{min} = 5 \times 10^{-5}, K_{max} = 2 \times 10^{-2}, \varepsilon = 10^{-5}$, dan $u_{max} = 0{,}80\,\text{hari}^{-1}$, dengan lintasan referensi konstan $I_d(t) = 0{,}005$. Intervensi diasumsikan mulai pada hari ke-25 sebagai skenario keterlambatan penerapan pengendalian setelah perkembangan awal wabah, sehingga sebelum waktu tersebut sistem berkembang tanpa kontrol. Nilai hari ke-25 merupakan asumsi skenario simulasi dan tidak dimaksudkan sebagai waktu intervensi epidemiologis yang berlaku secara umum. Karena simulasi dilakukan untuk menggambarkan dinamika wabah dalam periode yang relatif singkat, laju rekrutmen dan laju kematian alami diasumsikan sama dengan nol. Intensitas gangguan stokastik $\sigma_\beta = 0{,}08$ ditetapkan sebagai asumsi untuk merepresentasikan ketidakpastian pada proses transmisi.

Dengan demikian, parameter epidemiologis sedapat mungkin merujuk pada literatur, sedangkan parameter yang tidak tersedia secara langsung serta parameter pengendali ditetapkan sebagai asumsi dan parameter desain dalam penelitian. Kondisi awal dipilih dengan mengasumsikan bahwa telah terjadi *zoonotic spillover* sebelum waktu awal pengamatan, sehingga terdapat individu pada kompartemen terpapar atau terinfeksi.



Gambar 2. Perbandingan Model SEIR Deterministik

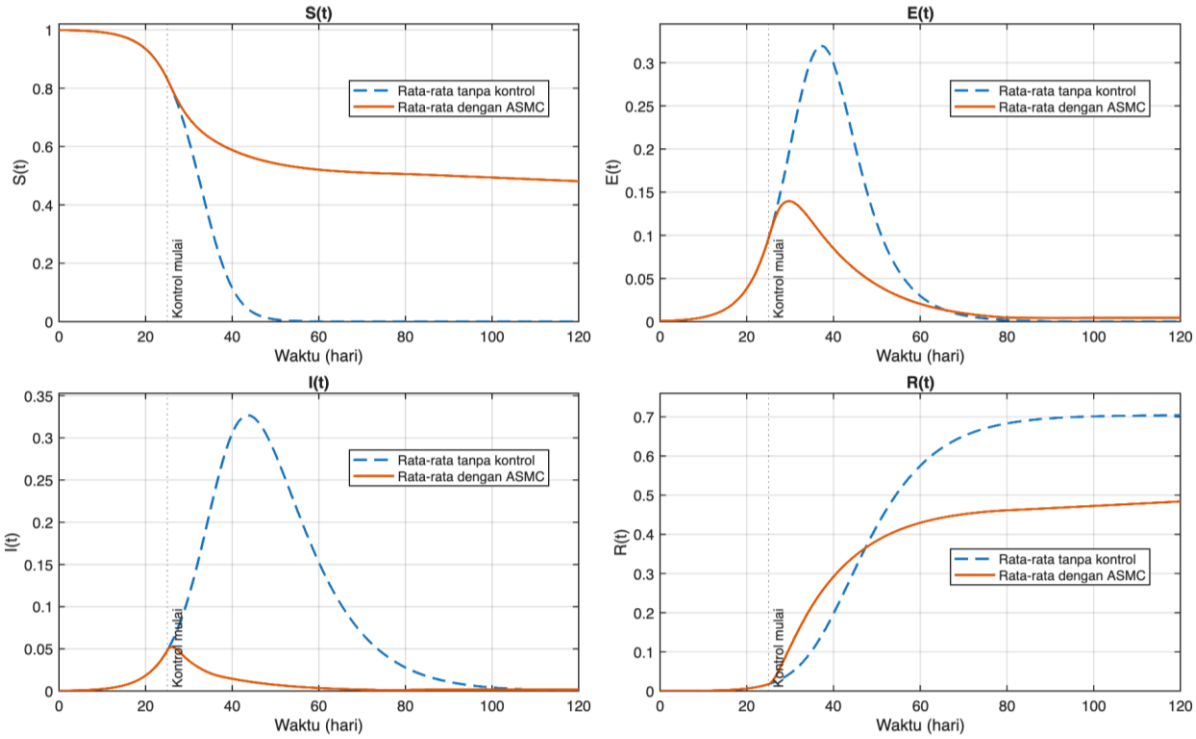
Gambar 2 memperlihatkan perbandingan dinamika model SEIR deterministik tanpa kontrol dan dengan ASMC. Sebelum intervensi diaktifkan pada hari ke-25, kedua lintasan menunjukkan perilaku yang sama. Setelah kontrol diterapkan, proporsi individu terpapar dan infeksius mengalami penurunan yang signifikan dibandingkan dengan skenario tanpa kontrol. Puncak populasi infeksius tanpa kontrol mencapai sekitar 0,32, sedangkan dengan ASMC puncaknya dapat ditekan menjadi sekitar 0,05–0,06. Selain itu, proporsi individu rentan pada akhir simulasi tetap lebih tinggi pada skenario terkontrol. Hasil ini menunjukkan bahwa ASMC mampu mengurangi intensitas penyebaran penyakit, menekan puncak infeksi, dan mempertahankan lebih banyak individu dalam kompartemen rentan.



Gambar 3. Dinamika Kontrol Sliding Mode Adaptif

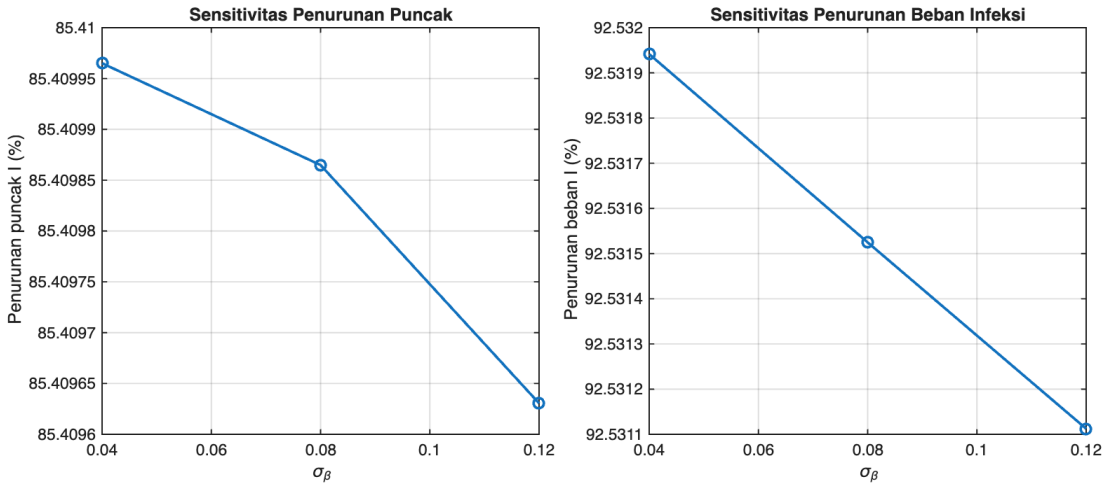
Gambar 3 menunjukkan dinamika input kontrol, permukaan sliding $s(t)$, dan gain adaptif $K(t)$. Sebelum hari ke-25, input kontrol bernilai nol karena intervensi belum diterapkan. Setelah intervensi dimulai, nilai kontrol meningkat hingga mencapai batas maksimum $u_{max} = 0{,}8$, yang menunjukkan perlunya tindakan pengendalian yang kuat untuk menekan peningkatan populasi terpapar dan infeksius. Permukaan sliding kemudian bergerak menuju nol dan memasuki lingkungan lapisan batas, sehingga menunjukkan tercapainya kondisi sliding secara praktis. Kontrol $u(t)$ bertahan pada nilai maksimum selama periode ketika nilai dan masih relatif tinggi. Setelah beban infeksi menurun, nilai kontrol juga berkurang hingga berada di sekitar 0,24–0,25 pada akhir simulasi.

Gain adaptif $K(t)$ meningkat setelah kontrol mulai diterapkan dan mencapai nilai maksimum sementara sekitar hari ke-40, kemudian menurun menuju batas minimumnya setelah keadaan sistem mendekati target. Hasil ini memperlihatkan bahwa mekanisme adaptasi mampu menyesuaikan kekuatan kontrol berdasarkan kondisi epidemiologis yang sedang berlangsung.



Gambar 4. Dinamika Rata-rata Model Stokastik

Gambar 4 menyajikan rata-rata dinamika model stokastik berdasarkan 200 realisasi Monte Carlo. Secara umum, rata-rata lintasan stokastik menunjukkan pola yang konsisten dengan model deterministik. Tanpa kontrol, proporsi individu rentan mengalami penurunan tajam, sedangkan kompartemen terpapar dan infeksius mencapai puncak yang tinggi. Sebaliknya, penerapan ASMC mampu menurunkan rata-rata puncak populasi terpapar dan infeksius serta mempertahankan proporsi individu rentan pada tingkat yang lebih tinggi. Konsistensi hasil deterministik dan stokastik menunjukkan bahwa pengendali tetap efektif ketika laju transmisi mengalami gangguan acak. Dengan demikian, ASMC memperlihatkan kemampuan yang robust dalam menekan dinamika penyebaran penyakit di bawah ketidakpastian transmisi. Hasil simulasi menunjukkan potensi teoritis ASMC dalam mengendalikan dinamika model SEIR virus Nipah. Hasil tersebut tidak dimaksudkan sebagai prediksi epidemiologis langsung maupun rekomendasi intervensi klinis, karena parameter yang digunakan masih bersifat ilustratif dan penelitian hanya dilakukan melalui pemodelan matematika serta simulasi komputasi.



Gambar 5. Sensitivitas Kinerja ASMC terhadap Intensitas Gangguan Stokastik

Gambar 5 menunjukkan sensitivitas kinerja kontrol *sliding mode* adaptif terhadap perubahan intensitas gangguan stokastik pada nilai $\sigma_\beta = 0{,}04,\ 0{,}08,$ dan $0{,}12$. Penurunan puncak proporsi individu infeksius berada di sekitar 85,41% pada seluruh skenario, sedangkan penurunan beban infeksi tetap berada di sekitar 92,53%. Perubahan kedua indikator tersebut relatif kecil meskipun intensitas gangguan meningkat. Hasil ini menunjukkan bahwa pada rentang gangguan yang diuji, kinerja rata-rata ASMC relatif konsisten dalam menekan puncak dan beban infeksi. Dengan demikian, perubahan intensitas gangguan stokastik pada rentang tersebut tidak memberikan pengaruh yang berarti terhadap efektivitas pengendalian.

Tabel 2. Kinerja Kontrol Sliding Mode Adaptif pada Model Deterministik dan Stokastik

Indikator	Deterministik Tanpa Kontrol	Deterministik ASMC	Stokastik Tanpa Kontrol	Stokastik ASMC
Puncak	0,326708	0,048139	0,326669	0,047712
Waktu puncak (hari)	43,60	25,00	43,64	25,00
Penurunan puncak (%)	–	85,27	–	85,41
Penurunan beban infeksi (%)	–	92,48	–	92,53

Berdasarkan Tabel 2, penerapan ASMC mampu menurunkan puncak proporsi individu infeksius secara signifikan pada model deterministik maupun stokastik. Pada model deterministik, puncak infeksi menurun dari 0,326708 menjadi 0,052214, sedangkan pada model stokastik menurun dari 0,326669 menjadi 0,052099. Puncak infeksi pada skenario dengan ASMC terjadi sekitar hari ke-26, lebih awal dibandingkan tanpa kontrol yang mencapai puncak sekitar hari ke-44. Penurunan puncak infeksi masing-masing mencapai 84,02% dan 84,05% pada model deterministik dan stokastik. Selain itu, beban infeksi berkurang sekitar 90% pada kedua model, yang menunjukkan bahwa kinerja pengendali tetap konsisten meskipun terdapat gangguan stokastik.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian, model SEIR deterministik dengan kontrol dan model SEIR stokastik telah dikonstruksi untuk menggambarkan dinamika penyebaran virus Nipah dengan mempertimbangkan intervensi pengendalian dan ketidakpastian pada laju transmisi. Kontrol *sliding mode* adaptif dirancang berdasarkan permukaan *sliding* yang melibatkan kompartemen terpapar dan infeksius serta gain adaptif untuk menyesuaikan intensitas kontrol terhadap kondisi sistem. Analisis kestabilan menggunakan metode Lyapunov menunjukkan bahwa, pada kondisi yang ditetapkan dalam teorema, permukaan *sliding* pada sistem deterministik dapat menuju nol secara asimtotik, sedangkan pada sistem stokastik permukaan *sliding* terbatas secara praktis dalam arti kuadrat rata-rata. Hasil simulasi deterministik menunjukkan bahwa kontrol menurunkan puncak proporsi individu infeksius dari 0,326708 pada hari ke-43,60 menjadi 0,048139 pada hari ke-25, dengan penurunan puncak sebesar 85,27% dan penurunan beban infeksi sebesar 92,48%. Pada simulasi stokastik dengan 200 realisasi, puncak kurva rata-rata individu infeksius menurun dari 0,327016 menjadi 0,047712, dengan penurunan puncak sebesar 85,41% dan penurunan beban infeksi sebesar 92,53%. Analisis sensitivitas pada beberapa tingkat gangguan juga menunjukkan bahwa kinerja rata-rata pengendali relatif konsisten pada rentang intensitas gangguan yang diuji. Dengan demikian, kontrol *sliding mode* adaptif mampu menekan dinamika infeksi dan mempertahankan kinerja pengendalian pada skenario ketidakpastian transmisi yang dianalisis.

Saran

Penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada kalibrasi parameter menggunakan data epidemiologi aktual agar hasil simulasi lebih representatif terhadap kondisi wabah tertentu. Selain itu, model dapat dikembangkan dengan menambahkan kompartemen lain, seperti isolasi atau kematian, serta mempertimbangkan sumber ketidakpastian pada parameter selain laju transmisi. Kajian lanjutan juga dapat dilakukan melalui analisis sensitivitas parameter kontrol dan perbandingan kinerja kontrol *sliding mode* adaptif dengan metode pengendalian lain untuk memperoleh strategi yang lebih efisien dan realistis.

REFERENSI

Aditi, & Shariff, M. (2019). Nipah Virus Infection: A Review. In *Epidemiology and Infection* (Vol. 147). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/S0950268819000086

Allen, L. (2010). *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology Second Edition*. CRC Press.

Alyoussef, F., Zolfaghari, B., Zulu, A., & Kaya, I. (2019). A Review on Nonlinear Control Approaches:

Sliding Mode Control, Backstepping Control, and Feedback Linearization Control. *International Engineering and Natural Sciences Conference (IENSC 2019)*, 608–619. https://www.researchgate.net/publication/338337143_A_REVIEW_ON_NONLINEAR_CONTROL_APPROACHES_SLIDING_MODE_CONTROL_BACK-STEPPING_CONTROL_AND_FEEDBACK_LINEARIZATION_CONTROL

Asokan, S., Luke, M. S., Atiyah, H. M., Noori, S. S., Atiyah, M. M., Makeshkumar, V., Verma, G., Jagadeesan, A., Beniwal, N., Vijayan, S., & Rajeswary, D. (2026). Nipah Virus as a Pandemic Threat: Current Knowledge, Diagnostic Gaps, and Future Research Priorities. In *Diagnostic Microbiology and Infectious Disease* (Vol. 114, Number 2). Elsevier Inc. https://doi.org/10.1016/j.diagmicrobio.2025.117141

Assegaf, F., Saragih, R., & Handayani, D. (2020). Adaptive Sliding Mode Control for Cholera Epidemic Model. *IFAC-PapersOnLine*, *53*(2), 16092–16099. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.428

Behera, A. K., & Bandyopadhyay, B. (2017). Robust Sliding Mode Control: An Event-Triggering Approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, *64*(2), 146–150. https://doi.org/10.1109/TCSII.2016.2551542

Boulaaras, S., M., A., G., S. K., & S., S. (2026). A Comprehensive Mathematical Model of Nipah Virus Transmission Dynamics: Stability Analysis and Numerical Simulations. *Alexandria Engineering Journal*, *143*, 103–115. https://doi.org/10.1016/j.aej.2026.04.014

Ghosh, S., Birrell, P. J., & De Angelis, D. (2023). An Approximate Diffusion Process for Environmental Stochasticity in Infectious Disease Transmission Modelling. *PLOS Computational Biology*, *19*(5), e1011088. https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1011088

Grzybek, M., Mundt, B., Kant, R., & Bogacka, A. (2026). Nipah Virus Preparedness in a One Health Framework: Implications for Europe. In *One Health* (Vol. 22). Elsevier B.V. https://doi.org/10.1016/j.onehlt.2026.101447

Higham, D. J. (2001). An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations *. In *Society for Industrial and Applied Mathematics* (Vol. 43, Number 3). http://www.maths.strath.ac.uk/~aas96106/algfiles.html

Hu, C., Wu, D., Liao, Y., & Hu, X. (2021). Sliding Mode Control Unified with the Uncertainty and Disturbance Estimator for Dynamically Positioned Vessels Subjected to Uncertainties and Unknown Disturbances. *Applied Ocean Research*, *109*. https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102564

Ibeas, A., De La Sen, M., & Alonso-Quesada, S. (2013). Sliding Mode Robust Control of SEIR Epidemic Models. *2013 21st Iranian Conference on Electrical Engineering, ICEE 2013*. https://doi.org/10.1109/IranianCEE.2013.6599820

Khan, M. Y., Ullah, S., Farooq, M., Al Alwan, B., & Saqib, A. B. (2024). Optimal Control Analysis for the Nipah Infection with Constant and Time-Varying Vaccination and Treatment Under Real Data Application. *Scientific Reports*, *14*(1). https://doi.org/10.1038/s41598-024-68091-6

Khan, S., Akbar, S. M. F., Mahtab, M. Al, Uddin, M. N., Rashid, M. M., Yahiro, T., Hashimoto, T., Kimitsuki, K., & Nishizono, A. (2024). Twenty-Five Years of Nipah Outbreaks in Southeast Asia: A Persistent Threat to Global Health. *IJID Regions*, *13*. https://doi.org/10.1016/j.ijregi.2024.100434

Moghadam, A. R., & Kebriaei, H. (2020). Stochastic Sliding Mode Control of Active Vehicle Suspension with Mismatched Uncertainty and Multiplicative Perturbations. *Asian Journal of Control*, *22*(6), 2330–2339. https://doi.org/10.1002/asjc.2135

Mohammad, K. M., & Kamrujjaman, M. (2025). Stochastic Differential Equations to Model Influenza Transmission with Continuous and Discrete-Time Markov Chains. *Alexandria Engineering Journal*, *110*, 329–345. https://doi.org/10.1016/j.aej.2024.10.012

Orlovskyi, I., Proske, F., & Tymoshenko, O. (2025). Long-Time Behaviors of Some Stochastic Differential Equations Driven by Lévy Noise. *Journal of Differential Equations*, *442*. https://doi.org/10.1016/j.jde.2025.113561

Poznyak, A. (2018). Stochastic Super-Twist Sliding Mode Controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *63*(5), 1538–1544. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2755594

Raza, A., Awrejcewicz, J., Rafiq, M., & Mohsin, M. (2021). Breakdown of a Nonlinear Stochastic Nipah Virus Epidemic Models Through Efficient Numerical Methods. *Entropy*, *23*(12). https://doi.org/10.3390/e23121588

Sam, Y. M., Osman, J. H. S., & Ghani, M. R. A. (2004). A Class of Proportional-Integral Sliding Mode Control with Application to Active Suspension System. *Systems and Control Letters*, *51*(3–4), 217–223. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2003.08.007

Santos, D. M. L., Rodrigues, V. H. P., & Oliveira, T. R. (2022). Epidemiological Control of COVID-19 Through the Theory of Variable Structure and Sliding Mode Systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, *33*(1), 63–77. https://doi.org/10.1007/s40313-021-00826-6

Sharifi, M., & Moradi, H. (2017). Nonlinear Robust Adaptive Sliding Mode Control of Influenza Epidemic in the Presence of Uncertainty. *Journal of Process Control*, *56*, 48–57. https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2017.05.010

Suhika, D., Saragih, R., & Handayani, D. (2024). Application of Nonlinear Robust Sliding Mode Control on Mathematical Model for Spreading of Covid-19. *AIP Conference Proceedings*, *3095*(1). https://doi.org/10.1063/5.0205191

Suhika, D., Saragih, R., Handayani, D., & Apri, M. (2025a). A Vaccination and Isolation Strategy Based on an Adaptive Sliding Mode Control Design for the COVID-19 Virus (Omicron Variant) in Jakarta, Indonesia. *Communication in Biomathematical Sciences*, *8*(1), 19–41. https://doi.org/10.5614/cbms.2025.8.1.2

Suhika, D., Saragih, R., Handayani, D., & Apri, M. (2025b). Adaptive Sliding Mode Control under Uncertainty for a Stochastic Epidemic Model with Mobility. *2025 25th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, 1189–1194. https://doi.org/10.23919/ICCAS66577.2025.11301158

Suhika, D., Saragih, R., Handayani, D., & Apri, M. (2025c). Sliding Mode Control With Stochastic Modeling and Mobility Interaction for Managing Epidemic Spread in High-Population Regions. *Parasite Epidemiology and Control*, *30*, e00439. https://doi.org/10.1016/j.parepi.2025.e00439

Tottori, T., & Kobayashi, T. J. (2023). Forward-Backward Sweep Method for the System of HJB-FP Equations in Memory-Limited Partially Observable Stochastic Control. *Entropy*, *25*(2). https://doi.org/10.3390/e25020208

Xie, M., Khan, M. Y., Ullah, S., Farooq, M., Riaz, M. B., & Alwan, B. Al. (2025). Optimal Control Analysis for the Transmission of Nipah Infection with Imperfect Vaccination. *PLoS ONE*, *20*(4 April). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0317408

Zewdie, A. D., & Gakkhar, S. (2020). A Mathematical Model for Nipah Virus Infection. *Journal of Applied Mathematics*, *2020*. https://doi.org/10.1155/2020/6050834

Zhu, X., Gao, B., Zhong, Y., Gu, C., & Choi, K. S. (2021). Extended Kalman Filter Based on Stochastic Epidemiological Model for COVID-19 Modelling. *Computers in Biology and Medicine*, *137*. https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2021.104810