Math Educa Journal 1(1)(2017): 86-95

MATH EDUCA
Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Email: mej.uinibpadang@gmail.com

Hubungan antara Keterobservasian dan Keterkonstruksian Sistem Linier Kontinu Bergantung Waktu

Ezhari Asfa'ani
Tadris matematika, Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, IAIN Imam Bonjol Padang, Indonesia
Email: ezhariasfa@gmail.com

Received: March 2017; Accepted: May 2017; Published: June 2017

Abstrak

Sistem linier kontinu bergantung waktu merupakan suatu model yang banyak dijumpai dalam aplikasi. Penelitian ini mengkaji hubungan antara keterobservasian dan keterkonstruksian sistem linier kontinu bergantung waktu. Dengan menggunakan metode aljabar, dalam tulisan ini dibuktikan beberapa teorema yang mengkaji hubungan antara keterobservasian dan keterkonstruksian sistem linier kontinu bergantung waktu. Selain itu, diberikan beberapa contoh sebagai ilustrasi untuk memperkuat keberlakuan teorema-teorema yang telah dibuktikan.

Kata kunci: keterobservasian, keterkonstruksian, sistem linier kontinu bergantung waktu

Abstract

Continuous time-varying linier system is a model which many peoples to find in any applications. This paper to teaching connection of observability and constructibility for continuous time-varying linear system. With algebra method we can proof any theorems to result connection of observability and constructibility for continuous time-varying linear system. Futhermore, we gave any examples for illustration to be valid this theorems and this proof.

Keywords: observability, constructability, continuous time-varying linier system

PENDAHULUAN

Diberikan suatu sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t); \quad t_0 \le t \le t_1, \\ \mathbf{y}(t) &= C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$. Dalam sistem (1), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor input dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ menyatakan vektor output. Semua entri pada matriks $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ dan $D(t) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ berupa fungsi-fungsi bernilai riil. Notasi $\mathbb{R}^n$ menyatakan himpunan vektor riil berdimensi n, dan $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks riil berukuran $n \times m$. Jika entri-entri dari matriks A dan B bergantung terhadap waktu, maka sistem pada persamaan (1) disebut *time-varying*. Sebaliknya, jika entri-entri dari matriks

Peer review under responsibility IAIN Imam Bonjol Padang.

p-ISSN: 2580-6726

A dan B tidak bergantung terhadap waktu, maka sistem (1) disebut *time-invariant*. Solusi persamaan pertama dalam (1) adalah

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2)$$

dimana $\Phi(t,t_0)$ menyatakan matriks transisi keadaan untuk persamaan tersebut. Dengan demikian:

$$\mathbf{y}(t) = C(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + D(t)\mathbf{u}(t). \quad (3)$$

Hal yang menarik untuk dikaji dari sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu adalah masalah keterobservasian dan keterkonstruksian. Secara umum, sistem (1) dikatakan terobservasi keadaan jika keadaan awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dapat ditentukan dengan mengetahui output dan input sekarang dan akan datang. Selain itu, sistem (1) dikatakan terkonstruksi jika keadaan awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dapat ditentukan dengan mengetahui output dan input sekarang dan masa lalu.

Makalah ini mengkaji kembali hubungan antara keterobservasian dan keterkonstruksian dari sistem (1).

LANDASAN TEORI

Sistem Linier Kontinu Bergantung terhadap Waktu

Diberikan sistem linier bergantung waktu sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4)$$

dimana $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ adalah matriks riil bergantung waktu.

Asumsikan $B(t) = \mathbf{0}$, maka (4) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (5)$$

yang merupakan sistem linier homogen bergantung waktu.

Misalkan $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah matriks dengan n kolomnya berupa n solusi bebas linier dari (5). Matriks Ψ dikatakan sebagai matriks fundamental dari (5).

Definisi 1. Jika Ψ adalah matriks fundamental dari (5), maka Φ yang didefinisikan sebagai

$$\Phi(t,t_0) \triangleq \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0), \; untuk \; t, t_0 \in (\alpha,\beta)$$

dikatakan matriks transisi keadaan dari (5)

Teorema 2. Misalkan $t_0 \in (\alpha,\beta)$ dan $\Phi(t,t_0)$ adalah matriks transisi keadaan dari (5) untuk $t \in (\alpha,\beta)$ maka pernyataan berikut benar:

1. $\Phi(t,t_0)$ merupakan solusi tunggal dari persamaan diferensial matriks

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0), \quad (6)$$

dengan $\Phi(t_0,t_0) = I$.

2. Untuk setiap $t, s, \tau \in (\alpha,\beta)$, berlaku

$$\Phi(t,\tau) = \Phi(t,s)\Phi(s,\tau).$$

3. Untuk setiap $t, \tau \in (\alpha,\beta)$, berlaku $\Phi(t,\tau)$ tak singular dan

$$\Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau,t).$$

Bukti.

1. Misalkan Ψ matriks fundamental dari (5). Dengan menggunakan Definisi 1 diperoleh $\Phi(t,t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$. Oleh karena itu,

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0),$$

dan

$$\Phi(t_0,t_0) = I.$$

2. Misalkan Ψ matriks fundamental dan Φ matriks transisi dari (1).

   Dengan menggunakan Definisi 1 diperoleh

   $$\Phi(t,\tau) = \Phi(t,s)\Phi(s,\tau),$$

   dengan $t,s,\tau \in (\alpha,\beta)$.

3. Misalkan Ψ matriks fundamental, maka $det(\Psi(t)) \neq 0$ untuk setiap $t \in (\alpha,\beta)$.

   Oleh karena itu

   $$det(\Phi(t,\tau)) \neq 0.$$

   Dengan demikian, dapat dibuktikan bahwa $\Phi(t,\tau)$ tak singular dan $\Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau,t)$. □

Teorema 3. Jika untuk setiap t_0 dan t berlaku

$$A(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] = \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]A(t),$$

maka

$$\Phi(t,t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right].$$

Persamaan (3) disebut respon total, yang terdiri dari penjumlahan dua komponen yaitu respon input-nol dan respon keadaan nol. Respon input-nol diberikan oleh

$$\psi(t,t_0,\mathbf{x}_0,0) = C(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0,$$

sedangkan respon keadaan-nol diberikan oleh

$$\rho(t,t_0,0,\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + D(t)\mathbf{u}(t).$$

METODE PENELITIAN

Cara penelitian yang digunakan adalah studi literatur mengenai teori-teori tentang matriks, ruang vektor, transformasi linier, hasil kali dalam, norm, dan sistem linier kontinu bergantung terhadap waktu.

Makalah ini mengkaji kembali hubungan antara keterobservasian dan keterkonstruksian dari sistem (1), serta memberikan beberapa contoh yang berkaitan dengan hubungan tersebut.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Telah diketahui bahwa output untuk sistem (1) diberikan oleh

$$\mathbf{y}(t) = C(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + D(t)\mathbf{u}(t) \tag{7}$$

untuk $t_0, t \in (\alpha,\beta)$, dimana $\Phi(t,\tau)$ menyatakan matriks transisi keadaan dari sistem (1). Selanjutnya, misalkan

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = C(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 \tag{8}$$

dimana

$$\bar{\mathbf{y}}(t) \triangleq \mathbf{y}(t) - \left[\int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + D(t)\mathbf{u}(t)\right]$$

dan $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$

(9)

Keterobservasian Sistem Linier Kontinu

Definisi 4. Suatu keadaan $\mathbf{x}$ dikatakan tak terobservasi pada waktu t_0 jika respon input-nol dari sistem adalah nol untuk setiap $t \geq t_0$, yaitu jika

$$C(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\; untuk\ setiap \;\; t \geq t_0. \tag{10}$$

Misalkan $\Re_{\bar{o}}^{t_0}$ menyatakan himpunan semua keadaan tak terobsercvasi pada t=t_0, atau secara simbolis dapat ditulis

$$\Re_{\bar{o}}^{t_0} = \{\mathbf{x} | \ \mathbf{x} \text{ tak terobservasi pada } t = t_0\} \tag{11}$$

Definisi 5. Sistem (1) dikatakan terobservasi keadaan pada t_0, jika keadaan yang tak terobservasi pada t_0 hanyalah keadaan nol, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, yaitu jika $\Re_{\bar{o}}^{t_0}=\{\mathbf{0}\}$.

Teorema 6. Suatu keadaan $\mathbf{x}$ adalah tak terobservasi pada t_0 jika dan hanya jika

$$\mathbf{x}\in ker(W_o(t_0,t_1)) \qquad (12)$$

untuk setiap $t_1 \geq t_0$, dimana

$$W_o(t_0,t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau \qquad (13)$$

adalah matriks simetris untuk setiap $t_1 > t_0$.

Dari Teorema 6, jelas bahwa keadaan $\mathbf{x}$ terobservasi pada t_0 jika dan hanya jika terdapat $t_1 \geq t_0$ sedemikian sehingga $W_o(t_0,t_1)\mathbf{x}\neq \mathbf{0}$.

Bukti.

($\Leftarrow$) Misalkan $\mathbf{x}\in ker(W_o(t_0,t_1))$ maka $W_o(t_0,t_1)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ untuk setiap $t_1 \geq t_0$. Akan ditunjukkan bahwa keadaan $\mathbf{x}$ tak terobservasi pada t_0. Karena $W_o(t_0,t_1)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ maka $\mathbf{x}^T W_o(t_0,t_1)\mathbf{x}=0$ untuk setiap $t_1 \geq t_0$.

Karena

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\|C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\mathbf{x}\right\|^2 d\tau = 0$$

maka haruslah

$$C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\mathbf{x}=\mathbf{0} \text{ untuk setiap } \tau \geq t_0.$$

Jadi keadaan $\mathbf{x}$ tak terobservasi pada t_0.

($\Rightarrow$)Misalkan keadaan $\mathbf{x}$ tak terobservasi pada t_0, akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}\in ker(W_o(t_0,t_1))$ untuk setiap $t_1 \geq t_0$. Karena keadaan $\mathbf{x}$ tak terobservasi pada t_0, maka $C(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ untuk setiap $t \geq t_0$. Akibatnya

$$W_o(t_0,t_1)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

Jadi $\mathbf{x}\in ker(W_o(t_0,t_1))$ untuk setiap $t_1 \geq t_0$. □

Dari Teorema 6, jelas bahwa keadaan $\mathbf{x}$ terobservasi pada t_0 jika dan hanya jika terdapat $t_1 \geq t_0$ sedemikian sehingga $W_o(t_0,t_1)\mathbf{x}\neq \mathbf{0}$.

Akibat 7. Sistem (1) adalah terobservasi keadaan pada t_0 jika dan hanya jika terdapat suatu waktu berhingga $t_1 > t_0$ sedemikian sehingga

$$rank(W_0(t_0,t_1)) = n. \qquad (14)$$

Jika sistem terobservasi, maka keadaan $\mathbf{x}_0$ pada t_0 adalah

$$\mathbf{x}_0 = W_o^{-1}(t_0,t_1)\left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)\bar{\mathbf{y}}(\tau)d\tau\right]. \quad (15)$$

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan sistem (1) terobservasi keadaan pada t_0. Akan dicari suatu waktu berhingga $t_1 > t_0$ sedemikian sehingga

$$rank(W_o(t_0,t_1)) \;=\; n.$$

Karena (1) terobservasi keadaan pada t_0, maka keadaan yang tak terobservasi pada t_0 hanyalah keadaan nol, yaitu $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Berdasarkan Teorema 6, terdapat $t_1 > t_0$ sedemikian sehingga

$$ker(W_o(t_0,t_1)) = \{\mathbf{0}\}.$$

Telah diketahui bahwa

$$null(W_o(t_0,t_1)) = 0.$$

Karena $W_o(t_0,t_1)$ adalah matriks $n\times n$, dan

$$rank(W_o(t_0,t_1)) + null(W_o(t_0,t_1)) = n,$$

maka dapat disimpulkan bahwa

$$rank(W_o(t_0,t_1)) = n.$$

($\Leftarrow$) Misalkan terdapat suatu waktu berhingga $t_1 > t_0$ sedemikian sehingga

$$rank(W_o(t_0,t_1)) = n.$$

Akan ditunjukkan bahwa sistem (1) terobservasi keadaan pada t_0. Karena $rank(W_o(t_0,t_1)) = n$ untuk suatu waktu berhingga $t_1 > t_0$, maka

$$null(W_o(t_0,t_1)) = 0.$$

Akibatnya $ker(W_o(t_0,t_1)) = \{\mathbf{0}\}$ yang bermakna bahwa keadaan yang tak terobservasi pada t_0 hanyalah keadaan nol, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Berdasarkan Definisi 5, maka sistem (1) adalah terobservasi keadaan pada t_0. Selanjutnya, dari persamaan (13) dan (8) diperoleh

$$W_o(t_0,t_1)\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)\bar{\mathbf{y}}d\tau \qquad (16)$$

Dengan mengalikan kedua ruas (16) dengan $W_o^{-1}(t_0,t_1)$ diperoleh

$$\mathbf{x}_0 = W_o^{-1}(t_0,t_1)\left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)\bar{\mathbf{y}}(\tau)d\tau\right]. \quad \square$$

(17)

Keterkonstruksian Sistem Linier Kontinu

Definisi 8. *Suatu keadaan* $\mathbf{x}$ *dikatakan tak terkonstruksi pada waktu* t_1 *jika untuk setiap waktu berhingga* $t \le t_1$, *respon input-nol dari sistem adalah nol untuk semua* t, *yaitu,*

$$C(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \textit{untuk setiap}\ t \le t_1.$$

Misalkan $\Re_{cn}^{t_1}$ menyatakan himpunan semua keadaan tak terkonstruksi pada $t = t_1$, atau secara simbolis dapat ditulis

$$\Re_{cn}^{t_1} = \{\mathbf{x} | \ \mathbf{x} \text{ tak terkonstruksi pada } t = t_1\}$$

Definisi 9. Sistem (1) dikatakan terkonstruksi keadaan pada t_1, jika keadaan yang tak terkonstruksi pada t_1 hanyalah keadaan nol, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yaitu jika $\Re_{cn}^{t_1} = \{\mathbf{0}\}$.

Teorema 10. Suatu keadaan $\mathbf{x}$ adalah tak terobservasi pada t_1 jika dan hanya jika

$$\mathbf{x} \in ker(W_{cn}(t_0,t_1))$$

untuk setiap $t_0 \le t_1$, dimana

$$W_{cn}(t_0,t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau,t_1)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_1)d\tau$$

(18)

adalah matriks simetris untuk setiap $t_0 < t_1$.

Bukti.

($\Leftarrow$) Misalkan $\mathbf{x} \in ker(W_{cn}(t_0,t_1))$ maka $W_{cn}(t_0,t_1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ untuk setiap $t_0 \le t_1$. Akan ditunjukkan bahwa keadaan $\mathbf{x}$ tak terkonstruksi pada t_1. Karena $W_{cn}(t_0,t_1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ maka $\mathbf{x}^T W_{cn}(t_0,t_1)\mathbf{x} = 0$ untuk setiap $t_0 \le t_1$.

Karena

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| C(\tau)\Phi(\tau,t_1)\mathbf{x} \right\|^2 d\tau = 0$$

maka haruslah

$$C(\tau)\Phi(\tau,t_1)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ untuk setiap } \tau \le t_1.$$

Jadi keadaan $\mathbf{x}$ tak terkonstruksi pada t_1.

($\Rightarrow$)Misalkan keadaan $\mathbf{x}$ tak terkonstruksi pada t_1, akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x} \in ker(W_{cn}(t_0,t_1))$ untuk setiap $t_0 \le t_1$. Karena keadaan $\mathbf{x}$ tak terkonstruksi pada t_1, maka $C(t)\Phi(t,t_1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ untuk setiap $t \le t_1$. Akibatnya

$$W_{cn}(t_0,t_1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Jadi $\mathbf{x} \in ker(W_{cn}(t_0,t_1))$ untuk setiap $t_0 \le t_1$. $\square$

Akibat 11. Sistem (1) adalah terkonstruksi keadaan pada t_1 jika dan hanya jika terdapat suatu waktu berhingga $t_0 < t_1$ sedemikian sehingga

$$rank(W_{cn}(t_0,t_1)) = n. \tag{19}$$

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan sistem (1) terkonstruksi keadaan pada t_1. Akan dicari suatu waktu berhingga $t_0 < t_1$ sedemikian sehingga

$$\mathrm{rank}(W_{cn}(t_0,t_1)) = n.$$

Karena (1) terkonstruksi keadaan pada t_1, maka keadaan yang tak terkonstruksi pada t_1 hanyalah keadaan nol, yaitu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Berdasarkan Teorema 6, terdapat $t_0 < t_1$ sedemikian sehingga

$$ker(W_{cn}(t_0,t_1)) = \{\mathbf{0}\}.$$

Telah diketahui bahwa

$$\mathrm{null}(W_{cn}(t_0,t_1))=0.$$

Karena $W_{cn}(t_0,t_1)$ adalah matriks $n \times n$, dan

$$\mathrm{rank}(W_{cn}(t_0,t_1))+\mathrm{null}(W_{cn}(t_0,t_1))=n,$$

maka dapat disimpulkan bahwa

$$\mathrm{rank}(W_{cn}(t_0,t_1))=n.$$

($\Leftarrow$) Misalkan terdapat suatu waktu berhingga $t_0<t_1$ sedemikian sehingga

$$\mathrm{rank}(W_{cn}(t_0,t_1))=n.$$

Akan ditunjukkan bahwa sistem (1) terkonstruksi keadaan pada t_1. Karena $rank(W_{cn}(t_0,t_1)) = n$ untuk suatu waktu berhingga $t_0<t_1$ maka

$$\mathrm{null}(W_{cn}(t_0,t_1))=0.$$

Akibatnya $ker(W_{cn}(t_0,t_1)) = \{\mathbf{0}\}$ yang bermakna bahwa keadaan yang tak terkonstruksi pada t_1 hanyalah keadaan nol, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Berdasarkan definisi 9, maka sistem (1) adalah terkonstruksi keadaan pada t_1. □

Hubungan Antara Keterobservasian dan Keterkonstruksian Sistem Linier Kontinu

Teorema berikut memperlihatkan hubungan antara keterobservasian dan keterkonstruksian sistem (1).

Teorema 12. Jika sistem (1) terobservasi keadaan pada t_0, maka sistem tersebut terkonstruksi keadaan pada suatu $t_1 > t_0$. Selanjutnya, jika sistem (1) terkonstruksi keadaan pada t_1, maka sistem tersebut terobservasi keadaan pada suatu $t_0 < t_1$.

Bukti.

Misalkan sistem (1) terboservasi keadaan pada t_0, akan dibuktikan bahwa sistem tersebut terkonstruksi keadaan pada t_1. Karena sistem (1) terobservasi keadaan pada t_0, maka terdapat suatu waktu berhingga $t_1 > t_0$ sedemikian sehingga

$$rank(W_o(t_0,t_1)) = n.$$

Perhatikan matriks $W_{cn}(t_0,t_1)$ pada persamaan (19) . Dengan mengalikan matriks $W_{cn}(t_0,t_1)$ dari kiri dengan $\Phi^T(t_1,t_0)$ dan dari kanan dengan $\Phi(t_1,t_0)$, diperoleh

$$\Phi^T(t_1,t_0)W_{cn}(t_0,t_1)\Phi(t_1,t_0) = W_o(t_0,t_1).$$

Karena $\Phi(t_1,t_0)$ adalah matriks tak singular untuk setiap t_0 dan t_1, maka $rank(\Phi(t_1,t_0)) = n.$

Karena $rank(W_o(t_0,t_1))=n$ dan $rank(\Phi(t_1,t_0))=n$, maka mestilah $rank(W_{cn}(t_0,t_1))=n$ untuk setiap t_1 yang menunjukkan bahwa sistem terkonstruksi keadaan.

Misalkan sistem (1) terkonstruksi keadaan pada, akan dibuktikan bahwa sistem tersebut terobservasi keadaan pada t_0. Karena sistem (1) terkonstruksi pada t_1, maka terdapat suatu waktu berhingga $t_0 < t_1$ sedemikian sehingga

$rank(W_{cn}(t_0,t_1))=n.$

Perhatikan matriks $W_o(t_0,t_1)$ pada persamaan (13). Dengan mengalikan matriks $W_o(t_0,t_1)$ dari kiri dengan $(\Phi^T(t_1,t_0))^{-1}$ dan dari kanan dengan $(\Phi(t_1,t_0))^{-1}$ diperoleh

$$(\Phi^T(t_1,t_0))^{-1}W_o(t_0,t_1)(\Phi(t_1,t_0))^{-1} =$$
$$(\Phi^T(t_1,t_0))^{-1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau\right]$$
$$(\Phi(t_1,t_0))^{-1}$$

Karena $\Phi(t_1,t_0)$ matriks transisi keadaan, maka $(\Phi^T(t_1,t_0))^{-1}=\Phi^T(t_0,t_1)$ dan $(\Phi(t_1,t_0))^{-1}=\Phi(t_0,t_1)$. Akibatnya

$$(\Phi^T(t_0,t_1))W_o(t_0,t_1)(\Phi(t_1,t_0))^{-1}=W_{cn}(t_0,t_1)$$

Karena $\Phi(t_1,t_0)$ adalah matriks tak singular untuk setiap t_0 dan t_1, maka $rank(\Phi(t_1,t_0))=n$. Selanjutnya, karena $rank(W_{cn}(t_0,t_1))=n$ dan $rank(\Phi(t_1,t_0))=n$, maka mestilah $rank(W_o(t_0,t_1))=n$ untuk setiap t_1 yang menunjukkan bahwa sistem terobservasi keadaan. □

Berikut disajikan beberapa contoh yang memperlihatkan hasil-hasil diatas.

Contoh 1. Diketahui $\dot{x}=-x,\ y=e^t x$. Akan diperlihatkan bahwa sistem ini terobservasi keadaan dengan menentukan keadaan x_0. Matriks transisi keadaan untuk sistem ini adalah $\Phi(t,\tau)=e^{-(t-\tau)}$ dan $C(\tau)\Phi(\tau,t_0)=e^{\tau}e^{-(\tau-t_0)}=e^{t_0}$. Sehingga

$$\begin{aligned} W_o(t_0,t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} e^{t_0}e^{t_0}d\tau \\ &= e^{2t_0}(t_1-t_0). \end{aligned}$$

Diberikan $\bar{\mathbf{y}}(t_0)=\mathbf{y}(t_0)=\alpha e^{t_0}$, maka x_0 dapat ditentukan menggunakan (12), yaitu

$$\begin{aligned} x_0 &= \left[\frac{e^{-2t_0}}{(t_1-t_0)}\right]\left[\int_{t_0}^{t_1} e^{t_0}(\alpha e^{t_0})d\tau\right] \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Contoh 2. Diketahui sistem $\dot{\mathbf{x}}=A(t)\mathbf{x},\quad \mathbf{y}=C(t)\mathbf{x}$ dimana $A(t)=\begin{bmatrix}-1 & e^{2t}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ dan $C(t)=\begin{bmatrix}0 & e^{-t}\end{bmatrix}$.

Akan diperlihatkan bahwa sistem ini tak terobservasi keadaan.

Karena

$$\begin{aligned} A(t)\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right] &= \begin{bmatrix}(t-t_0) & -\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{2t_0})-(t-t_0)e^{2t}\\ 0 & (t-t_0)\end{bmatrix} \\ &= \left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]A(t) \end{aligned}$$

maka matriks transisi keadaan dapat ditentukan dengan rumus

$$\Phi(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \Phi(t,t_0) &= \exp\begin{bmatrix}-(t-t_0) & \frac{1}{2}(e^{2t}-e^{2t_0})\\ 0 & -(t-t_0)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}e^{-(t-t_0)} & \frac{1}{2}(e^{t+t_0}-e^{-t+3t_0})\\ 0 & e^{-(t-t_0)}\end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$C(\tau)\Phi(\tau,t_0)=\begin{bmatrix}0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & \frac{1}{2}[e^{t+t_0}-e^{-t+3t_0}] \\ 0 & e^{-(t-t_0)}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & e^{-2\tau+t_0}\end{bmatrix}.$$

Sehingga

$$W_o(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\begin{bmatrix}0 \\ e^{-2\tau+t_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & e^{-2\tau+t_0}\end{bmatrix}d\tau$$
$$=-\frac{1}{4}e^{2t_0}\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & e^{-4t_1}-e^{-4t_0}\end{bmatrix}.$$

Karena $rank(W_o(t_0,t_1))=1<2=n$, maka sistem tak terobservasi.

Contoh .

1. Diketahui sistem $\dot{\mathbf{x}}=A(t)\mathbf{x},\ \mathbf{y}=C(t)\mathbf{x}$ dimana $A(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ dan $C(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$. Akan diperlihatkan bahwa sistem ini terobservasi keadaan dengan menentukan keadaan $\mathbf{x}_0$. Terlebih dahulu akan ditentukan matriks transisi keadaan dari sistem tersebut.
   Dengan menggunakan, akan ditunjukkan bahwa
   Karena

$$A(t)\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]A(t),$$

   maka matriks transisi keadaan dapat ditentukan dengan rumus

$$\Phi(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]$$

   Selanjutnya,

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & (t-t_0) \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

   dan

$$C(\tau)\Phi(\tau,t_0)=\begin{bmatrix}1 & (\tau-t_0)\end{bmatrix}$$

   Diberikan $\bar{\mathbf{y}}(t_0)=\begin{bmatrix}\alpha & (\tau-t_0)\alpha\end{bmatrix}$, maka $\mathbf{x}_0$ dapat ditentukan menggunakan (12), yaitu

$$\mathbf{x}_0=W_o^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)\begin{bmatrix}\alpha & (\tau-t_0)\alpha\end{bmatrix}d\tau$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \alpha\end{bmatrix}.$$

2. Jika $A(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ sama seperti contoh sebelumnya, tetapi $C(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$. Akan diperlihatkan bahwa sistem ini tidak terobservasi keadaan. Karena A sama seperti contoh sebelumnya, maka matriks transisi keadaan

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & (t-t_0) \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

   dan

$$C(\tau)\Phi(\tau,t_0)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & (\tau-t_0) \\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

   Sehingga

$$W_o(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}d\tau$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & (t_1-t_0)\end{bmatrix}.$$

   Karena $rank(W_o(t_0,t_1))=1<2=n$, maka sistem tak terobservasi.

Contoh 4. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}}=A(t)\mathbf{x},\ \ \mathbf{y}=C(t)\mathbf{x}$ dimana $A(t)=\begin{bmatrix}-1 & e^{2t} \\ 0 & -1\end{bmatrix}$ dan $C(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\end{bmatrix}$. Sistem ini terobservasi keadaan pada t_0. Akan diperlihatkan bahwa sistem ini terkontruksi keadaan pada t_0. Karena sistem terobservasi keadaan pada t_0, maka terdapat suatu waktu berhingga $t_1 > t_0$ sedemikian sehingga

$$rank(W_o(t_0,t_1)) = 2.$$

Telah diperoleh

$$\Phi(t,t_1) = \begin{bmatrix} e^{-(t_1-t)} & \frac{1}{2}(e^{t_1+t} - e^{-t_1+3t}) \\ 0 & e^{-(t_1-t)} \end{bmatrix}$$

dan

$$C(\tau)\Phi(\tau,t_1) = \begin{bmatrix} e^{-t_1} & \frac{1}{2}(e^{t_1} - e^{2\tau+t_1}) \end{bmatrix}.$$

Sehingga

$$W_{cn}(t_0,t_1) = \begin{bmatrix} e^{2t_1}(t_1 - t_0) & \frac{1}{2}(1 - e^{2t_0-2t_1}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{2t_0-2t_1}) & -\frac{1}{4}(e^{t_1} - e^{2t_0+t_1}) \end{bmatrix}.$$

Karena $rank(W_{cn}(t_0,t_1)) = n$, maka sistem terkonstruksi.

Contoh 3.3.5. Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = C(t)\mathbf{x}$ dimana $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $C(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \end{bmatrix}$. Sistem ini terkonstruksi keadaan pada t_1. Akan diperlihatkan bahwa sistem ini terobservasi keadaan pada t_0. Karena sistem terkonstruksi keadaan pada t_1, maka terdapat suatu waktu berhingga $t_0 < t_1$ sedemikian sehingga

$$rank(W_{cn}(t_0,t_1)) = 2.$$

Telah diperoleh

$$\Phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & \frac{1}{2}[e^{t+t_0} - e^{-t+3t_0}] \\ 0 & e^{-(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

dan

$$C(\tau)\Phi(\tau,t_0) = \begin{bmatrix} e^{-(2\tau-t_0)} & \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-2\tau+3t_0}) \end{bmatrix}.$$

Sehingga

$$W_o(t_0,t_1)$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} e^{2t_0} \begin{bmatrix} e^{-(2\tau-t_0)} \\ \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-2\tau+3t_0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-(2\tau-t_0)} & \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-2\tau+3t_0}) \end{bmatrix} d\tau$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-(4t_1-2t_0)} - e^{-2t_0} & \frac{1}{2}(e^{-(2t_1-2t_0)} - e^{-4t_1+4t_0}) \\ \frac{1}{2}(e^{-(2t_1-2t_0)} - e^{-4t_1+4t_0}) & \frac{1}{4}(e^{t_0} - e^{-2t_1+3t_0})^2 \end{bmatrix}.$$

Karena $rank(W_0(t_0,t_1)) = 2$, maka sistem terobservasi.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan uraian di atas, dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut:

1. Syarat cukup dan perlu untuk keterobservasian dari sistem (1) adalah
$$rank(W_o(t_0,t_1)) = n,$$
2. Syarat cukup dan perlu untuk keterkonstruksian dari sistem (1) adalah
$$rank(W_{cn}(t_0,t_1)) = n,$$
3. Jika sistem (1) terobservasi keadaan pada t_0, maka sistem tersebut terkons-truksi keadaan pada suatu $t_1 > t_0$. Selain itu, jika sistem tersebut terkons-truksi keadaan pada t_1, maka sistem tersebut terobservasi keadaan pada suatu $t_0 < t_1$.

Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk membahas tentang hubungan antara keterobservasian dan keterkonstruksian sistem diskret bergantung waktu.

REFERENSI

Anton, H. (1991). *Aljabar Linier Elementer Edisi Lima*. Jakarta: Erlangga.

Antsaklis, P.J. and A.N. Michel. (2006). *Linear Systems*. Boston: Birkhäuser.

Antsaklis, P.J. and A.N. Michel. (2007). *A Linear Systems Primer*. Boston: Birkhäuser.

Cullen, C.G. (1966). *Matrices and Linear Transformation*. Pittburg-Pennsylvania: Addison Wesley Publising.

Jacob, B. (1990). *Linear Algebra*. New York: W.H Freeman and Company.

Laub, A.J. (2005). *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*. USA: SIAM.