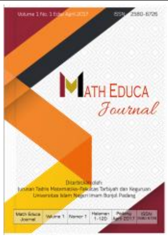
Math Educa Journal 1 (2) (2017): 211-224

MATH EDUCA
Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Website: http://ejournal.uinib.ac.id/index.php?journal=mej
Email: mej.uinibpadang@gmail.com



Titik Setimbang Nash pada Permainan Linear Kuadratik Non-kooperatif dengan Asumsi Keseluruhan Pemain dapat Menstabilkan Sistem

Ezhari Asfa'ani
(Program Studi Tadris matematika, Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, UIN Imam Bonjol Padang)
Email: ezhariasfa@gmail.com

Received: 2017; Accepted: 2017; Published: 2017

Abstrak

Pada makalah ini diperhatikan titik setimbang Nash pada permainan diferensial linear kuadratik non-kooperatif lingkar terbuka. Telah dibahas syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash dengan asumsi setiap pemain dapat menstabilkan sistem. Pada makalah ini dibahas syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash dengan asumsi semua pemain secara bersama-sama dapat menstabilkan sistem.

Kata kunci: permainan diferensial linear kuadratik, struktur informasi lingkar terbuka

Abstract

We discuss about Nash equilibria for the linear quadratic differential game for an infinite planning horizon. We consider an open-loop information structure. In the standard literature this problem is solved under the assumption and provide both necessary and sufficient conditions for existence of Nash equilibria for this game under the assumption that the system as a whole is stabilizable.

Keywords: linear quadratic differential games, open-loop information structure

ISSN: 2580-6726 (print), 2598-2133 (online)

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai masalah yang melibatkan dua atau lebih orang, instansi, perusahaan, daerah, kota, propinsi, negara dan lain-lain. Permasalahan tersebut dapat berupa persaingan atau konflik untuk memperoleh kemenangan terhadap orang atau kelompok lain. Masalah ini disebut dengan permainan. Contoh permainan yaitu monopoli, perdagangan, politik, dan peperangan.

Dalam makalah ini dibahas permainan diferensial linear kuadratik dengan dua pemain, yaitu permainan yang memberikan kendali terhadap suatu sistem linear dan setiap pemain berusaha mengoptimalkan fungsi *cost* berbentuk kuadratik. Permainan diferensial linear kuadratik ini bertipe lingkar terbuka (*open loop*), yaitu strategi untuk mengendalikan permainan tersebut diambil sebelum permainan dimulai berdasarkan pada persamaan *state* dan fungsi *cost* setiap pemain yang bersangkutan sehingga tidak terdapat informasi yang diperoleh pemain yang dapat membantu dalam pengambilan keputusan dan keputusan pemain dalam satu periode yang telah diambil tidak akan dapat diubah didalam periode tersebut.

Permainan diferensial linear kuadratik ini merupakan permainan non-kooperatif, yaitu para pemainnya tidak saling bekerjasama untuk mencapai tujuannya. Dalam permainan ini dicari strategi permainan optimal sedemikian sehingga apapun strategi yang diambil oleh pemain lain (lawan), hasil permainan yang diperoleh tidak akan bernilai lebih buruk (disebut strategi setimbang Nash). Hal yang menarik untuk dikaji dari permainan diferensial linear kuadratik adalah titik setimbang Nash.

Diberikan permainan diferensial linear kuadratik yang meminimalkan

$$J_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T (\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t)R_i\mathbf{u}_i(t))dt, i = 1,2, \quad (1)$$

dengan kendala persamaan *state* dinamis

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

dimana $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{U}_s$, dengan $\mathcal{U}_s$ merupakan himpunan fungsi kendali dari para pemain.

Dalam permainan diferensial linear kuadratik (1,2), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor state dan $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ menyatakan vektor masukan/kendali (strategi) dan semua entri pada matriks $R_i, Q_i, A,$ dan B adalah konstan. Selain itu, Q_i adalah matriks semidefinit positif dan R_i adalah matriks definit positif, $i = 1,2.$

Dalam Engwerda (2005) telah mengkaji syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash untuk permainan (1,2) dengan asumsi bahwa setiap pemain dapat menstabilkan sistem atau $(A, B_i), i = 1,2,$ dapat distabilkan. Dalam makalah ini dikaji kembali paper yang ditulis oleh Engwerda (2012) dan Engwerda (2014) yang membahas syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash untuk (1,2) dengan asumsi semua pemain secara bersama-sama dapat menstabilkan sistem atau $\left(A, \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}\right)$ dapat distabilkan.

TINJAUAN PUSTAKA

Paper pendukung dalam makalah ini ditulis oleh Engwerda (2008) membahas tentang ketunggalan solusi dari masalah kendali optimal linear kuadratik.

Teori-teori yang digunakan dalam makalah ini telah dikemukakan oleh banyak ahli, diantaranya Mital (1983) dan Boyd (2009) membahas optimisasi fungsi konveks yang mencakup himpunan dan fungsi konveks, fungsi berbentuk kuadratik, dan optimisasi fungsi konveks tanpa kendala. Olsder (2004) yang membahas tentang sistem kontinu LTI, keterkendalian, ruang bagian invarian, kendali umpan balik dan *stabilizability*. Sedangkan Engwerda (2005) membahas tentang kendali optimal linear kuadratik dan teori permainan dinamis. Klein (2002) membahas tentang faktor diskon.

LANDASAN TEORI

Teori permainan mempelajari masalah yang didalamnya terdapat konflik kepentingan. Dalam teori permainan dipelajari cara-cara penyelesaian optimal untuk berbagai jenis permainan. Permainan non-kooperatif adalah permainan (2 pemain atau N pemain) dengan para pemain tidak saling bekerjasama untuk mencapai tujuannya. Dalam permainan jenis ini dicari strategi permainan optimal sedemikian sehingga apapun strategi yang diambil oleh pemain lain (lawan), hasil permainan yang diperoleh tidak akan bernilai lebih buruk (disebut strategi setimbang Nash).

Teori permainan dinamis merupakan perpaduan teori kendali dan teori permainan. Pada teori kendali permasalahannya adalah meminimalkan satu fungsi *cost* dengan dipenuhinya satu sistem persamaan, sedangkan teori permainan dinamis adalah masalah N pemain yang meminimalkan N fungsi *cost* masing-masing dengan para pemain bersama-sama memenuhi satu sistem persamaan. Dalam tesis ini dibahas permainan dinamis linear kuadratik dengan dua pemain, yaitu permainan yang memberikan kendali terhadap suatu sistem linear dan setiap pemain berusaha mengoptimalkan fungsi *cost* berbentuk kuadratik.

Definisi berikut menjelaskan tentang *stabilizability*.

Definisi 2.1. *Sistem (2) dapat distabilkan jika terdapat matriks real* F *berukuran* $m \times n$ *sedemikian sehingga* $Re(\lambda) < 0$ *untuk setiap nilai eigen* λ *dari* $A + BF$.

Definisi berikut menjelaskan tentang titik setimbang Nash.

Definisi 2.2. *Pasangan strategi* $(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*)$ *dikatakan titik setimbang Nash atau solusi optimal Nash jika untuk semua pasangan strategi* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ *dengan* $\mathbf{u}_1$ *dan* $\mathbf{u}_2$ *adalah strategi yang dapat dipergunakan oleh pemain pertama dan kedua, berlaku*

$$J_1(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) \le J_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^*) \text{ dan } J_2(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) \le J_2(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2).$$

METODE PENELITIAN

Cara penelitian yang digunakan adalah studi literatur mengenai teori-teori tentang optimisasi fungsi konveks, sistem kontinu LTI, keterkendalian, ruang bagian invarian, kendali umpan balik dan *stabilizability*, kendali optimal linear kuadratik dan teori permainan dinamis.

Makalah ini membahas syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash dalam permainan diferensial linear kuadratik dengan asumsi semua pemain secara bersama-sama dapat menstabilkan sistem.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dijelaskan syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash dengan asumsi semua pemain secara bersama-sama dapat menstabilkan sistem dan penerapan permainan linear kuadratik. Pertama akan dibahas dahulu contoh sistem dengan keseluruhan pemain dapat menstabilkan sistem.

Contoh *Stabilizability*

Diberikan permainan diferensial linear kuadratik yang meminimalkan Persamaan (1) dengan kendala Persamaan (2). Pada bagian 1 diberikan contoh $(A, B_i), i = 1,2$ dan $(A, [B_1 \quad B_2])$ dapat distabilkan, yang artinya setiap pemain dapat menstabilkan sistem dan kedua pemain secara bersama-sama juga dapat menstabilkan sistem. Kemudian pada bagian 2 diberikan contoh $(A, B_i), i = 1,2$, tidak dapat distabilkan sedangkan $(A, [B_1 \quad B_2])$ dapat distabilkan, yang artinya setiap pemain tidak dapat menstabilkan sistem sedangkan kedua pemain secara bersama-sama dapat menstabilkan sistem.

1. Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

maka untuk $i = 1,2$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk $\lambda = 2$ dan $\lambda = 3$, matriks di atas memiliki rank baris penuh. Jadi (A,B_i) dapat distabilkan.

Misalkan $B := [B_1 \quad B_2]$, maka

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk $\lambda = 2$ dan $\lambda = 3$, matriks di atas memiliki rank baris penuh. Jadi (A,B) dapat distabilkan.

2. Diberikan

$$A := \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix};\ B_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ B_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

maka

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk $\lambda = \alpha_2$, matriks $(A - \lambda I \quad B_1)$ tidak memiliki rank baris penuh, sehingga (A, B_1) tidak dapat distabilkan.

Untuk $\lambda = \alpha_1$, matriks $(A - \lambda I \quad B_2)$ tidak memiliki rank baris penuh, sehingga (A, B_2) tidak dapat distabilkan.

Misalkan $B := [B_1 \quad B_2]$, maka

$$\begin{bmatrix} A-\lambda I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk setiap $\lambda = \alpha_1$ dan $\lambda = \alpha_2$, matriks $\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \end{pmatrix}$ memiliki rank baris penuh. Jadi (A, B) dapat distabilkan.

Titik Setimbang Nash pada Permainan Linear Kuadratik Non-Kooperatif dengan Asumsi Keseluruhan Pemain dapat Menstabilkan Sistem

Pada bagian ini akan dijelaskan syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash untuk permainan linear kuadratik non-kooperatif dengan asumsi semua pemain secara bersama-sama dapat menstabilkan sistem.

Misalkan T_i adalah matriks transformasi nonsingular yang mengubah (A, B_i) ke bentuk kanonik terkendalinya, $i = 1, 2$. Misalkan

$$A_i := \begin{bmatrix} I_{n_i} & 0 \end{bmatrix} T_i A T_i^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_i} & 0 \end{bmatrix}^T;$$
$$\tilde{Q}_i := \begin{bmatrix} I_{n_i} & 0 \end{bmatrix} T_i^{-1^T} Q_i;$$
$$\tilde{S}_i := B_i R_i^{-1} B_i^T T_i^T \begin{bmatrix} I_{n_i} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Teorema berikut menjelaskan hubungan antara titik setimbang Nash dengan ruang bagian invarian dan persamaan aljabar Riccati, serta mencari titik setimbang Nash pada permainan diferensial kuadratik dengan asumsi semua pemain secara bersama-sama dapat menstabilkan sistem.

Teorema 4.1. *Diberikan permainan diferensial linear kuadratik (1,2). Diasumsikan bahwa* $(A, [B_1 \quad B_2])$ *dapat distabilkan. Diberikan matriks*

$$M = \begin{bmatrix} A & -\tilde{S}_1 & -\tilde{S}_2 \\ -\tilde{Q}_1 & -A_1^T & 0 \\ -\tilde{Q}_2 & 0 & -A_2^T \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Jika permainan diferensial linear kuadratik (1,2) memiliki titik setimbang Nash lingkar terbuka untuk setiap state awal, maka

1. M *memiliki sedikitnya* n *nilai eigen stabil. Selanjutnya, terdapat suatu ruang bagian M-invarian* S *stabil p-dimensional, dengan* $p \geq n$ *sedemikian sehingga* $Im[I_n \quad V_1^T \quad V_2^T]^T \subset S$, *untuk suatu* $V_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$.
2. *Dengan*

   $$Q_{11i} := [I_{n_i} \quad 0] T_i^{-1^T} Q_i T_i^{-1} [I_{n_i} \quad 0]^T$$

   dan

   $$S_i := [I_{n_i} \quad 0] T_i B_i R_i^{-1} B_i^T T_i^T [I_{n_i} \quad 0]^T,$$

   dua persamaan aljabar Riccati,

   $$A_i^T K_i + K_i A_i - K_i S_i K_i + Q_{11i} = 0, \qquad (4)$$

   memiliki suatu solusi simetris $K_i(.)$ *sedemikiann sehingga* $A_i - S_i K_i$ *stabil,* $i = 1, 2$.

Sebaliknya, jika dua persamaan aljabar Riccati (4) memiliki solusi menstabilkan dan $[\mathbf{x}^T(t), \psi_1^T(t), \psi_2^T(t)] := \mathbf{v}^T(t)$ *adalah solusi stabil asimtotik dari*

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = M\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \qquad (5)$$

maka

$$\mathbf{u}_i^* = -R_i^{-1} B_i^T T_i^T [I_{n_i} \quad 0]^T \psi_i(t), \; i = 1, 2,$$

merupakan titik setimbang Nash lingkar terbuka untuk permainan diferensial linear kuadratik (1,2).

Misalkan

$\tilde{A}_2 := \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}; \tilde{Q} := \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \end{bmatrix}; B := \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ dan $\tilde{S} := \begin{bmatrix} \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 \end{bmatrix}$. Diberikan pasangan persamaan aljabar Riccati

$$0 = \tilde{A}_2^T P + PA - P\tilde{S}P + \tilde{Q}. \qquad (6)$$

Persamaan aljabar Riccati (6) berbeda dengan persamaan Riccati (4), karena matriks $\tilde{A}_2^T$ berbeda dengan A, dimensi kedua matriks tersebut juga berbeda dan P bukan matriks kuadrat. Solusi dari persamaan Riccati simetris (4) stabil jika matriks $A_i - S_i K_i$ stabil. Solusi P ari persmaan aljabar Riccati nonsimetris (6) stabil jika semua nilai eigen dari matriks $A - \tilde{S}P$ memiliki bagian real negatif. Dengan transposkan Persmaan (6), solusi P stabil jika matriks $\tilde{A}_2 - \tilde{S}^T P^T$ stabil. Oleh karena itu, berikut ini diberikan definisi menstabilkan dan menstabilkan kiri-kanan dari solusi persamaan aljabar Riccati (6).

Definisi 4.2. *Solusi* $P^T =: [P_1^T, P_2^T]$ *dengan* $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$, *dari persamaan aljabar Riccati (6) dikatakan*

a) menstabilkan, jika $\sigma(A - \tilde{S}P) \subset \mathbb{C}^-$;

b) menstabilkan kiri-kanan (LRS) jika

i. solusi tersebut merupakan solusi menstabilkan, dan

ii. $\sigma(-\tilde{A}_2^T + P\tilde{S}) \subset \mathbb{C}_0^+$.

Lemma berikut memberikan solusi dari persamaan aljabar Riccati non-simetris berdasarkan ruang bagian invarian.

Lemma 4.3. *Misalkan* $V \subset \mathbb{R}^{n+n_1+n_2}$ *adalah ruang bagian invariant n-dimensional dari* M, *dan* $X_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}, i = 0,1,2$ *(dengan* $n = n_0$*) adalah tiga matriks real sedemikian sehingga*

$$V = \mathrm{im}[X_0^T, X_1^T, X_2^T]^T.$$

Jika X_0 *invertibel, maka*

$$P_i := X_i X_0^{-1}, i = 1,2$$

merupakan penyelesaikan Persamaan (6) dan $\sigma(A - \tilde{S}P) = \sigma(M|_V)$. *Selanjutnya,* (P_1, P_2) *bebas dari pemilihan basis* V.

Lemma berikut menjelaskan hubungan ruang bagian invarian dari matriks M dan solusi dari persamaan aljabar Riccati (6) serta memberikan syarat untuk ketunggalan solusi tersebut.

Lemma 4.4.

1. *Persamaan aljabar Riccati (6) memiliki solusi LRS* $P^T = [P_1^T \quad P_2^T]$ *jika dan hanya jika matriks* M *memiliki ruang bagian graf stabil n-dimensional dan* M *memiliki* $n_1 + n_2$ *nilai eigen pada* $\mathbb{C}_0^+$.
2. *Jika persamaan aljabar Riccati (6) memiliki solusi LRS, maka solusi tersubut tunggal.*

Akibat berikut menjelaskan hubungan antara titik setimbang Nash dengan persamaan aljabar Riccati non-simetris dan simetris pada permainan diferensial kuadratik serta mencari titik setimbang Nash.

Akibat 4.5. *Permainan diferensial linear kuadratik dua pemain infinite-planning horizon (1,2) memiliki* *strategi setimbang Nash* $(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*)$ *lingkar terbuka, untuk setiap state awal jika dan hanya jika*

1. *terdapat* P_1 *dan* P_2 *yang merupakan solusi dari pasangan persamaan aljabar Riccati (6) memenuhi penambahan kendala yaitu semua nilai eigen dari*

$$A_{cl} := A - \tilde{S}_1 P_1 - \tilde{S}_2 P_2$$

   terletak pada bidang kompleks setengah kiri, dan

2. *dua persamaan aljabar Riccati (4) memiliki solusi simetris* $K_i(.)$ *sedemikian sehingga* $A_i - S_i K_i$ *stabil,* $i = 1, 2.$

Jika (P_1, P_2) *adalah solusi menstabilkan dari pasangan persamaan aljabar Riccati (6) , maka strategi*

$$\mathbf{u}_i^*(t) = -R_i^{-1} B_i^T T_i^T \begin{bmatrix} I_{n_i} \\ 0 \end{bmatrix} P_i \Phi(t,0)\mathbf{x}_0, i = 1, 2, \quad (7)$$

dengan $\Phi(t,0)$ *memenuhi persamaan transisi* $\dot{\Phi} = (t,0) = A_{cl}\Phi(t,0); \quad \Phi(0,0) = I,$ *merupakan titik setimbang Nash lingkar terbuka. Dengan menggunakan strategi ini, fungsi cost untuk setiap pemain adalah*

$$\mathbf{x}_0^T M_i \mathbf{x}_0,\ i = 1, 2,$$

dengan M_i *adalah solusi tunggal dari persamaan Lyapunov*

$$A_{cl}^T M_i + M_i A_{cl} + Q_i + P_i^T S_i P_i = 0.$$

Akibat berikut memberikan syarat cukup dan perlu untuk ketunggalan strategi setimbang Nash.

Akibat 4.5. *Permainan diferensial linear kuadratik (1,2) memiliki titik setimbang Nash lingkar terbuka tunggal untuk setiap state awal jika dan hanya jika*

1. *pasangan persamaan aljabar Riccati (6) memiliki solusi LRS, dan*
2. *dua persamaan aljabar Riccati (4) memiliki solusi menstabilkan.*

Selain itu, strategi setimbang tunggal diberikan oleh (7).

Hasil yang telah diperoleh dapat diperumum untuk kasus *N*-pemain. Semua hasil mengenai matriks M dapat disubstitusikan oleh

$$M = \begin{bmatrix} A & -\tilde{S} \\ -\tilde{Q} & -\tilde{A}_2^T \end{bmatrix},$$

dengan $\tilde{S} = [\tilde{S}_1 \quad \cdots \quad \tilde{S}_N], \tilde{Q} = [\tilde{Q}_1^T \quad \cdots \quad \tilde{Q}_N^T]$

dan $\tilde{A}_2 = diag(A_i)$. Pada contoh berikut ini akan diilustrasikan untuk permainan 3-pemain.

Penerapan Permainan Linear Kuadratik pada Kestabilan Hutang Pemerintah

Selama tahun 1980, banyak negara maju dan berkembang yang terlilit hutang dan mengalami masalah dalam menstabilkan hutang. Oleh karena itu, masalah hutang negara akan dibahas pada bagian ini sebagai penerapan permainan dinamis dalam masalah ekonomi. Model menstabilkan hutang pemerintah telah diberikan pada Tabellini (1986) dan telah dianalisa secara umum pada Engwerda (2013).

Model merupakan permainan diferensial dengan hutang pemerintah dimodelkan sebagai persamaan *state* dan para pemain adalah otoritas fiskal dan moneter. Persamaan *state* berikut menyatakan akumulasi hutang pemerintah merupakan penjumlahan tingkat bunga pembayaran hutang dan defisit fiskal dikurangi pembiayaan moneter yang dilakukan oleh bank sentral

$$\dot{d}(t) = rd(t) + f(t) - m(t),\ \ d(0) = d_0, \qquad (8)$$

dengan

d : hutang pemerintah

f : defisit fiskal, dikendalikan oleh otoritas fiskal

m : keuntungan yang diperoleh bank sentral, dikendalikan oleh otoritas moneter

$rd(t)$: tingkat bunga pembayaran hutang pemerintah

d_0 : stok awal dari sisa hutang pemerintah.

Fungsi objektif dari para pemain diberikan oleh

$$L_F = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}\{(f(t) - \bar{f})^2 + \beta_F(d(t) - \bar{d}_F)^2\}dt \quad (9)$$

dan

$$L_M = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta t}\{(m(t) - \bar{m})^2 + \beta_M(d(t) - \bar{d}_M)^2\}dt. \quad (10)$$

Persamaan (9) menyatakan bahwa otoritas fiskal meminimalkan deviasi defisit fiskal dengan target yang diberikan untuk defisit fiskal dan deviasi hutang pemerintah dengan target yang diberikan oleh otoritas fiskal untuk hutang pemerintah.

Sedangkan Persamaan (10) menyatakan bahwa otoritas moneter meminimalkan deviasi keuntungan bank sentral dengan target yang diberikan untuk keuntungan bank sentral dan deviasi hutang pemerintah dengan target yang diberikan oleh otoritas moneter untuk hutang pemerintah.

Di negara-negara Eropa atau European Union (EU), terdapat sebuah perserikatan yang menghimpun masalah ekonomi dan keuangan. Perserikatan tersebut dikenal dengan istilah EMU (European Moneter Union). Di dalam EMU masalah kebijakan makro ekonomi dibedakan menjadi dua jenis, yakni kebijakan moneter dan kebijakan fiskal. Kebijakan moneter dilakukan oleh Eropean Central Bank (ECB), yang terbentuk dari koalisi antara bank sentral masing-masing Negara di Eropa. Di dalam EU diasumsikan terbentuk dua blok negara yang merupakan perwakilan dari seluruh Negara yang ada di Eropa. Pemerintah dari dua blok Negara inilah yang nantinya akan melakukan sebuah kebijakan fiskal. ECB bertugas mengendalikan perkembangan perekonomian EMU secara keseluruhan pada masing-masing Negara di EMU. Kebijakan fiskal mempunyai tujuan untuk menghindari defisit yang berlebihan serta menjaga supaya tidak terjadi kenaikan dan penurunan harga secara drastis.

Konflik timbul antara pemegang otoritas fiskal dan moneter, apakah kebijakan yang mereka tetapkan bisa menyesuaikan dan membantu menstabilkan hutang di dalam EU. Model masalah ini merupakan modifikasi dari model menstabilkan hutang pemerintah yang telah diberikan sebelumnya. Bedanya dalam permainan ini terdapat tiga pemain ($N = 3$) yang terdiri dari pihak pemerintah dari blok negara satu sebagai pemain pertama, pemerintah dari blok negara dua sebagai pemain kedua, dan bank sentral (ECB) sebagai pemain ketiga.

Masalah defisit fiskal utama dipengaruhi oleh pembuatan uang atau oleh akumulasi hutang pemerintah. Pengambilan keputusan mengenai defisit fiskal utama adalah tanggung jawab pemerintah. Ketika kebijaksanaan moneter dan fiskal dipegang oleh institusi yang berbeda, kebijaksanaan mereka menjadi saling bergantung satu sama lain. Budget pemerintah menunjukkan hubungan antara defisit fiskal utama, pembuatan uang, bunga pembayaran hutang pemerintah dan akumulasi hutang pemerintah. Berdasarkan persamaan (8) dan memisalkan $x(t) = d(t), \alpha = r, f(t) = u(t), m(t) = u_E(t)$ serta $\gamma_i u_E(t)$ merupakan keuntungan yang diperoleh bank sentral untuk blok negara i, maka dapat digambarkan model dua persamaan diferensial

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(t) = \alpha_i x_i(t) + u_i(t) - \gamma_i u_E(t), \\ &x_i(0) = x_{i0}, \ \ i = 1,2. \end{aligned} \tag{11}$$

Fungsi $x_i(t), u_i(t)$ dan $u_E(t)$ digambarkan sebagai faktor dari GDP (*gross domestic product*). Jika defisit fiskal $u_i(t) + \alpha_i x_i(t)$ melebihi pendapatan dari uang pemegang otoritas moneter $\gamma_i u_E(t)$, maka akumulasi hutang pemerintah menjadikan pembuatan kebijakan untuk merubah pengaturan beban hutang yang akan disesuaikan dengan defisit fiskal di masa mendatang. Untuk mewujudkan anggaran pemerintah yang baik diperlukan diperlukan keterlibatan pemegang otoritas fiskal dan moneter. Nilai awal dari hutang pemerintah dari blok negara i adalah $x_i(0)$. Jika nilai awal hutang pemerintah besar dan tingkat suku bunganya tinggi, maka untuk stabilisasi hutang pemerintah dari blok negara i dibutuhkan usaha yang lebih keras dari pada situasi dengan nilai awal dan tingkat bunga yang rendah.

Stabilnya hutang pemerintah didapatkan dengan 2 jalan yaitu dengan menurunkan defisit fiskal utama atau dengan meningkatkan pembuatan uang. Konflik kebijakan akan timbul karena kebijakan fiskal dan moneter dikendalikan oleh institusi berbeda yang mempunyai tujuan berlainan dalam hal inflasi, stabilisasi hutang pemerintah dan pengeluaran publik. Akan dibentuk strategi setimbang Nash antara penguasa fiskal kedua blok negara dan moneter dalam bentuk permainan.

Berdasarkan Persamaan (9) dan dimisalkan $\bar{f} = \bar{d}_F = \theta = 0$, maka fungsi kerugian pemegang otoritas fiskal dari blok negara i adalah

$$J_i(u_i(.)) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u_i^2(t) + \beta_i x_i^2(t) dt$$

Mula-mula hutang pemerintah adalah $x(0)$. Pemegang kebijakan fiskal mengatur defisit fiskal utama untuk meminimalkan fungsi kerugiannya dengan tujuan meminimalkan defisit fiskal utama, pertumbuhan dasar uang dan hutang pemerintah.

Berdasarkan Persamaan (10) dan dimisalkan $\bar{f} = \bar{d}_M = \theta = 0$ serta dengan mengasumsikan $d(t)$ sebagai kombinasi linear dari x_1 dan x_2, maka fungsi kerugian dari pemegang otoritas moneter (ECB) digambarkan sebagai berikut

$$J_E(u_E(.)) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u_E^2(t) + \beta_E(\omega x_1(t) + (1-\omega)x_2(t))^2 dt. \tag{12}$$

Berdasarkan Persamaan (11) perkembangan hutang kedua blok negara tersebut dapat ditulis dalam bentuk *state space*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u_1(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u_2(t)+\begin{bmatrix}-\gamma_1\\ -\gamma_2\end{bmatrix}u_E(t).$$

Misalkan

$$A:=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix};\ B_1:=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix};\ B_2:=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\ B_E:=-\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}$$

$$B:=[B_1\quad B_2\quad B_E];\ Q_1:=\begin{bmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$Q_2:=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \beta_2\end{bmatrix};Q_E:=\beta_E\begin{bmatrix}\omega^2 & \omega(1-\omega)\\ \omega(1-\omega) & (1-\omega)^2\end{bmatrix};$$

dan $S_i:=B_iB_i^T, i=1,2,E.$

Sehingga masalah dapat ditulis sebagai meminimalkan

$$J_i=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t)+u_i^2dt,\ i=1,2,E,$$

dengan kendala

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}+B_1u_1(t)+B_2u_2(t)+B_Eu_E(t).$$

Pasangan $(A,B_i), i=1,2$ tidak dapat distabilkan. Oleh karena itu, teori standar pada permainan diferensial linear kuadratik untuk menentukan titik setimbang Nash lingkar terbuka pada Engwerda (2005) tidak dapat digunakan secara lansung. Diperhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix}A-\lambda I & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1-\lambda & 0 & 1 & 0 & -\gamma_1\\ 0 & \alpha_2-\lambda & 0 & 1 & -\gamma_2\end{bmatrix}.$$

Untuk setiap $\lambda=\alpha_1$ dan $\lambda=\alpha_2$, matriks $\begin{pmatrix}A-\lambda I & B\end{pmatrix}$ memiliki rank baris penuh. Jadi (A,B) dapat distabilkan. Dengan

$$T_1=I,T_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},T_E=I,n_1=n_2=1$$

dan $n_E=2,$ maka

$$M=\begin{bmatrix}A & -\tilde{S}_1 & -\tilde{S}_2 & -\tilde{S}_3\\ -\tilde{Q}_1 & -A_1^T & 0 & 0\\ -\tilde{Q}_2 & 0 & -A_2^T & 0\\ -\tilde{Q}_3 & 0 & 0 & -A_3^T\end{bmatrix},$$

Dengan

$\tilde{S}_1=B_1,\tilde{S}_2=B_2,\tilde{S}_3=B_E,\tilde{Q}_1=\begin{bmatrix}\beta_1 & 0\end{bmatrix},\tilde{Q}_2=\begin{bmatrix}\beta_2 & 0\end{bmatrix},$
$\tilde{Q}_3=Q_E, A_1=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}\alpha_2 & 0\end{bmatrix},$
dan $A_3=A.$ Determinan dari $M-\lambda I$ sama dengan

$det:=\lambda^6+\eta_5\lambda^5-\eta_4\lambda^4-\eta_3\lambda^3+\rho_2\lambda^2+\eta_1\lambda+\eta_0,$
dimana $\eta_i>0.$

Jadi, tanda ρ_2 bebas, polinomial berorde enam ini memiliki 2 tanda yang berubah. Menurut aturan Descartes persamaan karakteristik matriks M memiliki dua atau tidak akar real positif. Selanjutnya, dengan mengganti λ dengan $-\lambda$ polinomial yang bersesuaian memiliki 4 tanda yang berubah. Dengan aturan Descartes persamaan karakteristik ini memiliki 4, 2 atau tidak akar-akar real negatif. Jadi, pada kasus ini persamaan karakteristik matriks M memiliki enam akar-akar real, 2 positif dan 4 negatif. Oleh karena itu, terdapat paling banyak $\binom{4}{2}$ titik setimbang Nash lingkar terbuka.

Dipilih
$x_1(0)=0.7, x_2(0)=1.5, \alpha_1=0.03, \alpha_2=0.08,$
$\gamma_1=1, \gamma_2=0.5, \beta_1=0.04, \beta_2=0.08,$
$\beta_E=0.04$ dan $\omega=0.3.$ Sehingga matriks M memiliki nilai eigen $\{0.3123, 0.2158, -0.3103, -0.2204, -0.0753, \text{-}0.0321\}$, dan dapat diselidiki bahwa terdapat 6 strategi setimbang berbeda.

Dengan memasukkan faktor diskon ke dalam biaya, masalah menjadi meminimalkan

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-rt}(\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + u_i^2)dt,\ i = 1, 2, E,$$

dengan kendala

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} + B_1u_1(t) + B_2u_2(t) + B_Eu_E(t).$$

Misalkan $\mathbf{y}(t) := e^{-\frac{1}{2}rt}\mathbf{x}(t)$ dan $v_i(t) := e^{-\frac{1}{2}rt}u_i(t)$, maka masalah dapat ditulis sebagai meminimalkan

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-\frac{1}{2}rt}\mathbf{x}^T(t)Q_ie^{-\frac{1}{2}rt}\mathbf{x}(t) + (e^{-\frac{1}{2}rt}2u_i)^2)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{y}^T(t)Q_i\mathbf{y}(t) + v_i^2)dt,\ i = 1, 2, E,$$

dengan

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \frac{d}{dt}(e^{-\frac{1}{2}rt}\mathbf{x}(t))$$
$$= (A - \frac{1}{2}rI)\mathbf{y}(t) + B_1v_1(t) + B_2v_2(t) + B_Ev_E(t))$$

Matriks M yang bersesuaian dengan masalah ini adalah

$$M = \begin{bmatrix} (A-\frac{1}{2}rI) & -\tilde{S}_1 & -\tilde{S}_2 & -\tilde{S}_3 \\ -\tilde{Q}_1 & -(A_1^T - \frac{1}{2}rI) & 0 & 0 \\ -\tilde{Q}_2 & 0 & -(A_2^T - \frac{1}{2}rI) & 0 \\ -\tilde{Q}_3 & 0 & 0 & -(A_3^T - \frac{1}{2}rI) \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang telah dipilih di atas dan $r = 0,16$, maka nilai-nilai eigen dari matriks M adalah {-0.3006,-0.2222,0.3027,0.2184,$ $0.004,0.0478} yang menyebabkan sejumlah titik setimbang berkurang dan $M = TJT^{-1}$ dengan

$$T = \begin{bmatrix} 0.4362 & -0.9843 & -0.355 & 0.9668 & 0.4098 & 0.0355 \\ 0.8654 & 0.0902 & -0.8992 & -0.1005 & -0.0094 & -0.1949 \\ 0.0498 & -0.1446 & 0.0562 & -0.2297 & 0.3563 & 0.6309 \\ 0.2303 & 0.0325 & 0.2377 & 0.0368 & 0.1892 & 0.3265 \\ 0.0252 & -0.0102 & 0.0349 & -0.0157 & 0.0303 & -0.6713 \\ 0.0686 & -0.0293 & 0.0681 & -0.0282 & -5.8175 & 0.0738 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, terdapat titik setimbang yang tunggal. Misalkan $T =: [T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_5 \quad T_6]$, maka

$$\mathcal{P} = Im[T_1 \quad T_2] =: \begin{bmatrix} W \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

dengan W, Z matriks berukuran 2×2 dan X, Y matriks berukuran 1×2.

Sehingga,

$$P_1 := XW^{-1}$$
$$= [59.6144 \quad -29.9164],$$
$$P_2 := YW^{-1}$$
$$= [104.7003 \quad -52.1635],$$

dan

$$P_E := ZW^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 14.811 & -7.3986 \\ 40.6927 & -20.3292 \end{bmatrix}.\partial$$

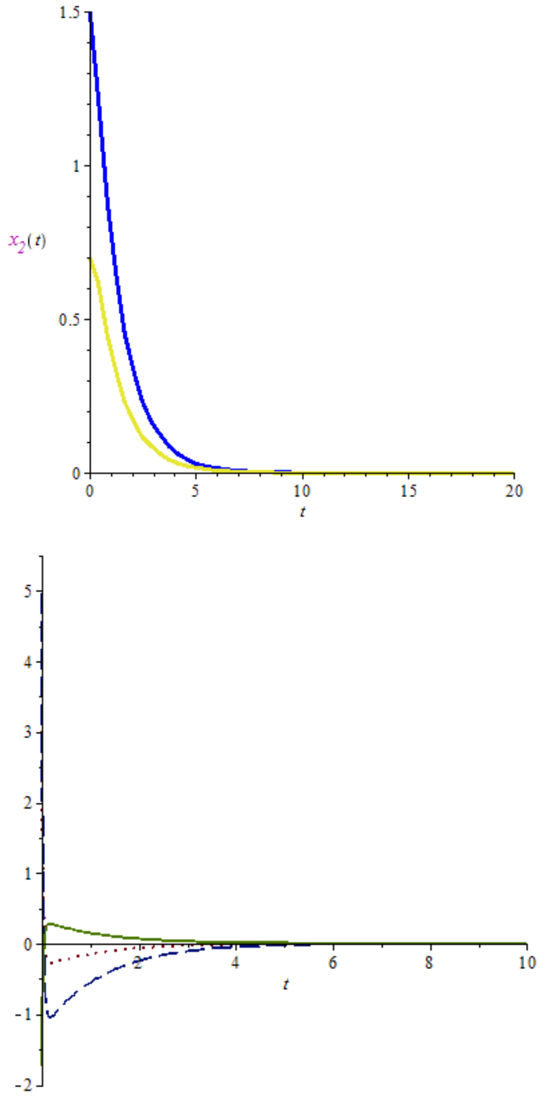
Jadi strategi setimbang Nash yaitu,

$u_1(t) = -P_1\mathbf{x}(t),$

$u_2(t) = -P_2\mathbf{x}(t)$ dan $u_E(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} P_E\mathbf{x}(t)$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A - B_1P_1 - B_2P_2 + B_E\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} P_E)\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$



Gambar 1. Kestabilan Hutang Fiskal

Gambar 1 menunjukkan bahwa *state* dan strategi setimbang Nash menuju nol. Hal ini menunjukkan bahwa strategi setimbang Nash tersebut mampu menstabilkan sistem. Ini berarti defisit fiskal dan pembiayaan moneter yang dilakukan oleh bank sentral dapat menstabilkan hutang kedua blok negara.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Syarat cukup dan perlu permainan linear kuadratik non-kooperatif memiliki titik setimbang Nash lingkar terbuka yang tunggal adalah persamaan aljabar Riccati non-simetris memiliki solusi LRS dan persamaan aljabar Riccati simetris memiliki solusi menstabilkan.

Saran

Penelitian lanjutan untuk topik terkait dapat dicoba untuk permainan dinamis linear kuadratik non-kooperatif lingkar terbuka untuk sistem deskriptor.

REFERENSI

Boyd, S. dan L. Vandenberghe. (2009). *Convex Optimization*. Cambridge: University Press.

Engwerda, Jacob. (2005). *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*. John wiley and sons: Tilburg University, Netherlands.

Engwerda, Jacob. (2008). Uniqueness Conditions for the Affine Open-loop Linear Quadratic Differential Game, *Automatica* 44 (2008) 504–511.

Engwerda, Jacob. (2012). Open-Loop Nash Equilibria in the Non-cooperative Infinite-planning Horizon LQ Game, *Proceedings of the 15th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization*, University of Bologna, Rimini, Italy, September13–16, 2012.

Engwerda, J., van Aarle, B., Plasmans, J., Weeren, A. (2012) Debt Stabilization Games in the Presence of Risk Premia, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37 (2013) 2525–2546.

Engwerda, Jacob. (2014) Open-Loop Nash Equilibria in the Non-cooperative Infinite-planning Horizon LQ Game, *Journal of The Franklin Institute*, 351 (2014) 2657–2674.

Jacob, B. (1990) *Linear Algebra*. W.H Freeman and Company: New York.

Klein, M.W. (2002). *Mathematical Methods for* Economics, Second Edition. Addison Wesley.

Mital, K.V. (1983). *Optimization Methods in Operations* Research *and Systems Analysis*, Wiley Eastern Limited: Canada.

Olsder, G. J. dan J. W. van der Woude. (2004). Mathematical *Systems Theory intermediate third edition*. Delft University of Technology: Netherlands.

Tabellini G. (1986). Money, debt and deficits in a dynamic game, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.10, pp.427-442.